目　录

第一章　向量值函数的积分与向量值测度

本章目的在于把实分析中的基本概念推广到向量值情况，这里的向量通常指赋范线性空间中的元．由于分析数学的基础是收敛概念，而无限维赋范线性空间又有若干种不同的拓扑结构，因此，实分析中一个概念，在向量值函数理论中，往往可以引伸出强形式的推广和弱形式的推广．两者有区别，又有联系，在某种情况下还可能是一致的，它们分别应用于不同问题的研究，丰富了向量值函数分析的内容．

作为引子，我们首先在§1.1中建立了向量值函数的微积分．从简要的讨论中人们可以看到，由数值函数过渡到向量值函数，相应的概念可能如何推广，也能初步体会到Hahn-Banach定理、共鸣定理等泛函分析的基本结果在这类推广中的作用．§1.2和§1.3用于讨论向量值函数的可测性，并在此基础上导出Bochner积分和Pettis积分，它们是Lebesgue积分在强、弱两种情况下的推广，也是较常用的两种向量值函数的积分．本章的另一个对象是§1.4所讨论的向量值测度，对这种可列可加向量值集函数的研究，不可避免地要大量使用前两节所提供的工具．我们在这一节中初步介绍了向量值测度的Radon-Nikodym性质，人们对该问题研究的兴趣至今未衰．我们还用一定的篇幅讨论了数值函数关于向量值测度的积分，Hilbert空间上的谱积分当然可以看作这里的一个特例．

§1.1　向量值函数的微积分

在本书中，我们用 $\mathbb{K}$ 表示实数域或复数域，X 表示赋范线性空间. 本节中所谓向量值函数是指从 $\mathbb{K}$ 的子集 Ω 到 X 的任一单值映射.

本节作为初等分析的推广，主要讨论向量值函数的连续性、可导性和 Riemann 积分. 由于 Banach 空间中有几种不同的拓扑结构，即有几种不同的极限，因而相应地产生了几种不同的连续性、可导性等概念.

1.1.1　向量值函数的连续性

定义　设 $\Omega\subset\mathbb{K}$，x 是定义于 Ω 取值于 X 的向量值函数，即 $x:\Omega\to X$，$t_0\in\Omega$，

(i) 如果对一切 $f\in X^*$，

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t))=f(x(t_0)),$$

则称 x 在 t_0 **弱连续**；

(ii) 如果

$$\lim_{t\to t_0}\|x(t)-x(t_0)\|=0,$$

则称 x 在 t_0 **强连续**；

如果 x 在 Ω 上每一点均是弱(强)连续的，那末，称 x 在 Ω 上弱(强)连续.

显然，如果向量值函数 x 在 t_0 强连续，则必在 t_0 弱连续，但反之不然.

例 1　设有向量值函数 $x:[0,1]\to l^2$，

$$x(t)=\begin{cases}e_n, & t=\dfrac{1}{n},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中，e_n 是 l^2 中第 n 个坐标为 1，其余坐标为 0 的元. 于是，易见 $w\text{-}\lim\limits_{t\to 0}x(t)=0$，但 $\left\|x\left(\frac{1}{n}\right)-x(0)\right\|=1$，所以 x 在 0 点弱连续而不强连续.

特别地，设 $B(X\to X)$ 为 X 上有界线性算子全体，则它按算子范数是赋范线性空间，自然可以考察定义于 Ω 取值于 $B(X\to X)$ 的向量值函数(也称作算子值函数). 这时，常用到下列连续性的概念.

定义 设有向量值函数 $U:\Omega\to B(X\to X)$，$t_0\in\Omega$，

(i) 如果对任何 $x\in X$，$f\in X^*$，均有

$$\lim_{t\to t_0} f((U(t)-U(t_0))x)=0,$$

则称 U 于 t_0 处**按弱算子拓扑连续**，

(ii) 如果对任何 $x\in X$，均有

$$\lim_{t\to t_0}\|(U(t)-U(t_0))x\|=0,$$

则称 U 于 t_0 处**按强算子拓扑连续**；

(iii) 如果

$$\lim_{t\to t_0}\|U(t)-U(t_0)\|=0,$$

则称 U 在 t_0 处**按一致算子拓扑连续**.

显然，由算子值函数按一致算子拓扑连续可以导出按强算子拓扑连续，由按强算子拓扑连续又可导出按弱算子拓扑连续. 但反之未必成立. 读者可自行举出相应的例子.

定理 1 设 Ω 是 $\mathbb{K}$ 中的有界闭集，

(i) 如果向量值函数 $x:\Omega\to X$ 弱连续，则 $\{\|x(t)\|\mid t\in\Omega\}$ 是有界集；

(ii) 如果算子值函数 $U:\Omega\to B(X\to X)$ 按弱算子拓扑连续,并且X是 Banach 空间,则$\{\|U(t)\| \mid t\in\Omega\}$是有界集.

证 (i) 由假设,对任何$f\in X^*$, $f(x(t))$是Ω上的连续数值函数,因此,在Ω上有界,即

$$\sup_{t\in\Omega}|f(x(t))|<+\infty, \quad \forall f\in X^*,$$

记τ为嵌入映射 $X\to X^{**}$,上式即为

$$\sup_{t\in\Omega}|\tau(x(t))(f)|<+\infty, \quad \forall f\in X^*,$$

由共鸣定理得到

$$\sup_{t\in\Omega}\|\tau(x(t))\|<+\infty,$$

但$\|x(t)\|=\|\tau(x(t))\|$,所以

$$\sup_{t\in\Omega}\|x(t)\|<+\infty.$$

(ii) 由假设,对每个$x\in X$, $t\longmapsto U(t)x$是弱连续的向量值函数,定义于Ω,由(i)可知

$$\sup_{t\in\Omega}\|U(t)x\|<+\infty, \forall x\in X,$$

再利用共鸣定理,即知

$$\sup_{t\in\Omega}\|U(t)\|<+\infty. \quad \text{证毕.}$$

定理 2 设Ω是 $\mathbf{K}$ 中的有界闭集,向量值函数 $x:\Omega\to X$ 强连续,则它在Ω上必是均匀强连续的,即对任何 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $t_1, t_2\in\Omega$, $|t_1-t_2|<\delta$ 时

$$\|x(t_1)-x(t_2)\|<\varepsilon.$$

这个结论的证明和数值函数的情况完全一致,此处从略.

1.1.2 向量值函数的可导性

定义 设Ω是 $\mathbf{K}$ 中的开子集, $t_0\in\Omega$,向量值函数 $x:\Omega\to X$ 称为在 t_0 处强可导,是指存在 $x_0\in X$,使得

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}-x_0\right\|=0.$$

称 x_0 为 $x(t)$在 t_0 处的**强导数**；称向量值函数 x 在 t_0 处**弱可导**，是指存在 $x_0\in X$，使得

$$\lim_{h\to 0}f\left(\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\right)=f(x_0),\quad \forall f\in X^*$$

此时，称 x_0 为 $x(t)$在 t_0 处的**弱导数**，记为 $x_0=x'(t_0)$.

显然，强可导必定弱可导，并且强导数即是弱导数，x 在t_0 的强导数一般仍记为 $x'(t_0)$. 反过来，弱可导未必强可导，下面就是一个例子.

例 1　设有向量值函数 $x:(-1,1)\to l^2$,

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{n}e_n, & t=\frac{1}{n}\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

e_n 是 l^2 中第 n 个坐标为 1，其余坐标为 0 的元. 于是

$$\frac{x(t)-x(0)}{t}=\begin{cases}e_n, & t=\frac{1}{n},\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

由于 $w\text{-}\lim\limits_{h\to 0}\frac{x(h)-x(0)}{h}=0$，因此 x 在$t_0=0$处弱可导，且$x'(0)=0$，

但是 $\left\|\frac{x\left(\frac{1}{n}\right)-x(0)}{\frac{1}{n}}\right\|=1$，因而 x 在 $t_0=0$ 处不是强可导的.

由定义容易知道：如果向量值函数 $x:\Omega\to X$ 在 t_0 处弱可导，那末对任何 $f\in X^*$，相应的数值函数 $f(x(t))$ 必定在 t_0 处可导，而且

$$\{f(x(t))\}'_{t=t_0}=f(x'(t_0)).$$

但是，这个结论的逆命题一般并不成立，关于这一点，此处不拟详

细讨论.

定理 1　设 Ω 是 $\mathbb{K}$ 中的一个区域,向量值函数 $x:\Omega\to X$, 则 $x(t)\equiv x_0(t\in\Omega)$ 的充要条件是 x 弱可导且 $x'(t)\equiv 0(t\in\Omega)$.

证　必要性是显然的. 下面证明充分性: 设 x 弱可导且 $x'(t)\equiv 0(t\in\Omega)$. 此时,对任何 $f\in X^*$, $f(x(t))$ 在 Ω 内可导. 且满足

$$\frac{d}{dt}\{f(x(t))\}=f(x'(t))=f(0)=0,$$

因此, $f(x(t))$ 为常数值函数. 任取 $t_0\in\Omega$, 即有

$$f(x(t))=f(x(t_0)),\quad \forall f\in X^*,$$

从而必有 $x(t)\equiv x(t_0)(t\in\Omega)$. 证毕.

不难看出, 在某一点弱(强)可导的向量值函数必在该点弱(强)连续. 实际上,还可以有进一步的结论.

定理 2　设 x 是定义于开集 Ω 的向量值函数, $t_0\in\Omega$, x 在 t_0 弱可导,则 x 必在 t_0 强连续.

证　对任意的 $|\delta_n|\searrow 0$, 记 $x_{\delta_n}=\frac{1}{\delta_n}[x(t_0+\delta_n)-x(t_0)]$. 由于 x 在 t_0 弱可导,所以对任何 $f\in X^*$, 极限

$$\lim_{n\to\infty}f(x_{\delta_n})$$

存在. 和 1.1.1 的定理 1 一样,可知存在常数 M, 使得

$$\sup_n\|x_{\delta_n}\|\leqslant M,$$

从而

$$\|x(t_0+\delta_n)-x(t_0)\|\leqslant M|\delta_n|\to 0,$$

即 x 在 t_0 是强连续的. 证毕.

1.1.3　向量值函数的 Riemann 积分

为了便于今后的应用, 这里简单介绍一下向量值函数的 Riemann 积分.

定义 设 x 是定义于实数区间$[a,b]$而取值于赋范线性空间X的向量值函数，对$[a,b]$的任一有限分割$\mathscr{D}$: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，作和

$$S_{\mathscr{D}}=\sum_{i=1}^{n-1}x(\xi_i)(t_{i+1}-t_i),\quad \xi_i\in[t_i,t_{i+1}]$$

又记 $\lambda=\max\limits_i(t_{i+1}-t_i)$，如果存在 $z\in X$，使得$\lim\limits_{\lambda\to0}\|S_{\mathscr{D}}-z\|=0$，那末称 $x(t)$在$[a,b]$上 **Riemann 可积**，z 称为 $x(t)$在$[a,b]$上的 **Riemann 积分**，记作

$$z=\int_a^b x(t)dt.$$

由定义立即可知：如果 $x(t)$是 Riemann 可积的向量值函数，泛函 $f\in X^*$，那末 $f(x(t))$ 必定是 Riemann 可积的数值函数，而且

$$f\left(\int_a^b x(t)dt\right)=\int_a^b f(x(t))dt.$$

和数学分析类似地，有下述基本定理.

定理 1 设向量值函数 $x(t)$ 定义于$[a,b]$，取值于 Banach 空间X，x在$[a,b]$上强连续，则x必在$[a,b]$上 Riemann 可积.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使得

$$|t_1-t_2|<\delta,\ t_1,t_2\in[a,b]\text{时}\ \|x(t_1)-x(t_2)\|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

由 1.1.1 定理 2，这是可以办到的. 于是，当分割$\mathscr{D}_1$，$\mathscr{D}_2$的相邻分点最大距离都小于 δ 时，

$$\|S_{\mathscr{D}_1}-S_{\mathscr{D}_2}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

由于X是完备的，故仿数学分析可证$\{S_{\mathscr{D}}\}$必收敛于 X中的一个元. 证毕.

定理 2 (Newton-Leibniz 公式) 设 X 是 Banach 空间，向量值函数 $x:[a,b]\to X$ 在 $[a,b]$ 上弱可导，而且 $x'(t)$在$[a,b]$上 Riemann 可积，则

$$\int_a^b x'(t)dt = x(b)-x(a).$$

证 对任何 $f\in X^*$，利用 1.1.2 的定理 2 有

$$f\left(\int_a^b x'(t)dt\right)=\int_a^b f(x'(t))\,dt$$
$$=\int_a^b \frac{d}{dt}f(x(t))dt$$
$$=f(x(b))-f(x(a)).$$

因此

$$\int_a^b x'(t)dt = x(b)-x(a).$$ 证毕.

§1.2 向量值可测函数

向量值函数 Riemann 积分概念在应用上往往受到较大的限制，人们根据实变函数论的经验，试图讨论更为一般的 Lebesgue 积分. 为此，我们先引入向量值可测函数的概念.

1.2.1 可测函数的定义

在本节中，设$(\Omega,\ \mathscr{R},\ \mu)$是完全测度空间，$X$ 为赋范线性空间.

定义 设有向量值函数 $x:\Omega\to X$，如果对任何 $f\in X^*$，数值函数 $f(x(t))$是$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$上的可测函数，则称 $x(t)$是$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$上的弱可测函数.

定义 设有向量值函数 $x:\Omega\to X$，如果可以把 Ω 分解为有限

个(或可列个)互不相交的可测集 S_k 的并,在每个 S_k 上,$x(t)$取常值 $x_k \in X$,则称 x 为**有限(或可数)值函数**①.

定义 称向量值函数 $x: \Omega \to X$ 是$(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ **上强可测函数**,是指存在一列可数值函数$\{x_n\}$,使得$\{x_n\}$几乎处处强收敛于 x.

由定义容易看到:有限值函数和可数值函数都是强可测的.而且也是弱可测的;定义于Ω的强(弱)连续的向量值函数必是强(弱)可测的;$(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$上强(弱)可测的向量值函数的线性组合也是强(弱)可测的.

定理1 设$(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$是全有限完全测度空间,则向量值函数$x(t)$强可测的充要条件是$x(t)$为有限值函数列几乎处处强收敛的极限.

证 只要证明必要性.设$x(t)$强可测,于是存在一列可数值函数$\{x_n(t)\}$和一个零集 Ω_0,当 $t \in \Omega \backslash \Omega_0$ 时,

$$s\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t).$$

取Ω上定义的有限值函数 $\bar{x}_n(t)$,使得 $\mu(B_n) < \frac{1}{n^2}$,其中 $B_n = \{t \mid \bar{x}_n(t) \neq x_n(t)\}$.由于 $\mu(\Omega) < \infty$,这是可以办到的.记 $\Omega_1 = \overline{\lim_{n \to \infty}} B_n$.有 $\mu(\Omega_1) = 0$.当$t \in \Omega \backslash (\Omega_0 \cup \Omega_1)$时,存在$N$,$n > N$时,$t \overline{\in} B_n$,故而

$$s\text{-}\lim_{n \to \infty} \bar{x}_n(t) = s\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t),$$

即 $x(t)$ 是有限值函数列几乎处处强收敛的极限.证毕.

1.2.2 强可测与弱可测的关系

由定义容易得到下面的结果.

定理1 设$x(t)$是$(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$上强可测的向量值函数,则$x(t)$

---

① 通常把有限值函数也视为可数值函数.

是弱可测函数，$\|x(t)\|$是实值可测函数.

证　由假设，$x(t)$是一列可数值函数$\{x_n(t)\}$几乎处处强收敛的极限，注意到对$f\in X^*$，$f(x_n(t))$及$\|x_n(t)\|$均是可数值函数，且几乎处处收敛于$f(x(t))$和$\|x(t)\|$，因此，$x(t)$是弱可测函数，$\|x(t)\|$是实值可测函数．证毕．

为了进一步讨论强可测与弱可测的关系，再引入一个概念．

定义　向量值函数$x:\Omega\to X$称为**可分值函数**，是指$\{x(t)|t\in\Omega\}$是X的可分子集．如果存在$\Omega_0\in\mathscr{R}$，$\mu(\Omega_0)=0$，使得$\{x(t)|t\in\Omega\setminus\Omega_0\}$是可分的，则称向量值函数$x(t)$是**几乎可分值函数**.

引理 1　设$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$上弱可测向量值函数$x(t)$是几乎可分值的，则$\|x(t)\|$是实值可测函数.

证　因为改变实值函数$\|x(t)\|$在零集上的值并不影响其可测性，故不妨设$x(t)$是可分值的；必要时再用$\overline{\text{span}\{x(t)|t\in\Omega\}}$代替$X$，可知又不妨设$X$本身是可分空间.

由于X可分，存在可列集$\{x_i\}$在X中稠密．对每个x_i，又存在$f_i\in X^*$，$\|f_i\|=1$，使得$f_i(x_i)=\|x_i\|$，因此，对任何$x\in X$，以及$\varepsilon>0$，必有j使得$\|x-x_j\|<\varepsilon$，从而

$$\|x\|-\varepsilon<\|x_j\|=f_j(x_j)\leqslant\sup_k|f_k(x_j)|\leqslant\sup_k|f_k(x)|+\varepsilon, \quad (1)$$

因为ε是任意的，由上式可得

$$\|x\|=\sup_k|f_k(x)|,\ x\in X. \quad (2)$$

在上式中取x为$x(t)$，就得到

$$\|x(t)\|=\sup_k|f_k(x(t))|,\ t\in\Omega. \quad (3)$$

由于$x(t)$是弱可测的，即$f_k(x(t))$ $(k=1,2,\cdots)$都是可测函数，从(3)立即可知$\|x(t)\|$可测．证毕.

定理 2　(Pettis) 测度空间$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$上向量值函数$x(t)$强可测的充要条件是$x(t)$为弱可测且是几乎可分值的.

证　必要性　设 $x(t)$ 强可测，则由定理1，$x(t)$ 是弱可测的．取一列可数值函数 $x_n(t)$ 和零集 Ω_0，使得

$$x(t)=s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n(t)\quad \forall t\in\Omega\backslash\Omega_0$$

记 $X_1=\overline{\{x_n(t)\mid t\in\Omega\backslash\Omega_0, n=1,2\cdots\}}$，则 X_1 是可分子集．显然，$\{x(t)\mid t\in\Omega\backslash\Omega_0\}\subset X_1$，因此，$x(t)$ 是几乎可分值的．

充分性　因为在一个零测度的集合上改变向量值函数 $x(t)$ 的值，不影响其强可测性，故不妨设 $x(t)$ 是可分值的．设 $x_k\in X$，$k=1,2,\cdots$，满足

$$\{x(t)\mid t\in\Omega\}\subset\overline{\{x_k\mid k=1,2,\cdots\}},\tag{4}$$

记 $B_{kn}=\left\{t\mid \|x(t)-x_k\|<\dfrac{1}{n}\right\}$．由假设，对 $x(t)-x_k$ 应用引理1，可知 B_{kn} 可测．又由(4)式可知，对每个 n，

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{kn}.$$

在 Ω 上定义向量值函数 $x_n(t)$ 如下：

$$x_n(t)=x_k,\quad 当\ t\in B_{kn}\backslash\bigcup_{j=1}^{k-1}B_{jn}\ 时.\tag{5}$$

显然，$B_{kn}\backslash\bigcup_{j=1}^{k-1}B_{jn}(k=1,2,\cdots)$ 是一列互不相交的可测集，其并是 Ω，故而 $x_n(t)$ 是可数值函数．又由 $x_n(t)$ 的定义易知对任意的 $t\in\Omega$，有

$$\|x_n(t)-x(t)\|<\frac{1}{n},\tag{6}$$

故而 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$，即 $x(t)$ 是强可测的．证毕．

由定理2及其证明过程可以得到下列推论：

系1　$x(t)$ 是强可测的充要条件是存在一列可数值函数 $\{x_n(t)\}$ 和一个零集 Ω_0，在 $\Omega\backslash\Omega_0$ 上 $\{x_n(t)\}$ 均匀收敛于 $x(t)$（也称

作几乎处处均匀收敛).

这只要注意到定理证明中的(6)式即可.

系 2 取值于可分空间的向量值函数强可测等价于弱可测.

系 3 $[a, b]$ 上定义的弱连续向量值函数关于 Lebesgue-Stieltjes 测度空间必是强可测的.

证 假设 $x(t)$ 弱连续. $x(t)$ 弱可测是显然的. 今证它是可分值的. 设 $\{r_k \mid k=1,2,\cdots\}$ 是 $[a,b]$ 中有理数全体. 作

$$X_0=\overline{\operatorname{span}\{x(r_k) \mid k=1,2,\cdots\}},$$

X_0 是可分的. 对任意的 $r\in[a,b]$, 取 $\{r_k\}$ 的子列 $\{r_{n_k}\}$, 使 $r_{n_k}\to r$. 由弱连续性, 得 $w\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x(r_{n_k})=x(r)$. 但因 X_0 强闭, 由 Hahn-Banach 定理, 可知它也是弱闭的, 因此, $x(r)\in X_0$, 故

$$\{x(t) \mid t\in[a,b]\}\subset X_0,$$

即 $x(t)$ 是可分值的. 由定理 2 得 $x(t)$ 是强可测的. 证毕.

系 4 设 $x(t)$ 是强可测的向量值函数, $\alpha(t)$ 是实值可测的有限函数, 则 $\alpha(t)x(t)$ 必是强可测的.

证 设 $f\in X^*$, 由 $x(t)$ 的强可测性, 知它必为弱可测, 故 $f(x(t))$ 可测, 从而 $f(\alpha(t)x(t))=\alpha(t)f(x(t))$ 可测, 即 $\alpha(t)x(t)$ 是弱可测的向量值函数.

由定理 2 可知 $x(t)$ 是几乎可分值的. 设 $\Omega_0\in\mathscr{R}$, $\mu(\Omega_0)=0$, $\{t_n\}\subset\Omega$ 满足 $\{x(t_i) \mid i=1, 2, \cdots\}$ 稠密于 $\{x(t) \mid t\in\Omega\setminus\Omega_0\}$. 记 $\{r_k \mid k=1,2,\cdots\}$ 为有理数全体, $S=\{r_j x(t_i) \mid i,j=1,2,\cdots\}$. S 是 X 的可分子集, 且满足

$$\overline{S}\supset\{\alpha(t)x(t) \mid t\in\Omega\setminus\Omega_0\},$$

这说明 $\alpha(t)x(t)$ 是几乎可分值的. 由定理 2 得 $\alpha(t)x(t)$ 强可测. 证毕.

利用定理 2, 还可以得到强可测向量值函数列极限函数可测

性的结论.

定理 3 设 $x_n(t)\ (n=1,2,\cdots)$ 均为测度空间 $(\Omega,\mathscr{R},\ \mu)$ 上强可测的向量值函数，$\{x_n(t)\}$ 几乎处处弱收敛于向量值函数 $x(t)$，则 $x(t)$ 也是强可测的.

证 设 $\Omega_0\in\mathscr{R}$, $\mu(\Omega_0)=0$, $t\in\Omega\backslash\Omega_0$ 时，对任何 $f\in X^*$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n(t))=f(x(t)),$$

所以 $f(x(t))$ 是可测函数列 $\{f(x_n(t))\}$ 几乎处处收敛的极限，从而可测，即 $x(t)$ 弱可测.

对每个 n, $x_n(t)$ 强可测，故存在 $\{x_n^{(j)}\}_j\subset X$ 和 $\Omega_n\in\mathscr{R}$, $\mu(\Omega_n)=0$，使得 $\{x_n^{(j)}\}_j$ 在 $\{x_n(t)\mid t\in\Omega\backslash\Omega_n\}$ 中稠密. 作

$$X_0=\overline{\operatorname*{span}_{n,j}\{x_n^{(j)}\}},$$

X_0 是（强）闭且可分的线性子空间，X_0 实际上也是弱闭的. 由 $x(t)=w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$，所以

$$\left\{x(t)\mid t\in\Omega\Big\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right)\right\}\subset X_0,$$

但 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right)=0$，因此 $x(t)$ 是几乎可分值的. 由定理 2 可知 $x(t)$ 是强可测的. 证毕.

系 强可测向量值函数列几乎处处强收敛的极限必是强可测的.

此外，定理 3 证明中的第一段实际上说明：弱可测向量值函数列几乎处处弱收敛的极限是弱可测函数.

1.2.3 算子值可测函数

前两部分的讨论当然适用于 $x(t)$ 是算子值函数的特殊情形，

但在这种情形下，下列概念更适合于应用.

定义　设 $U:\Omega\to B(X\to X)$ 是算子值函数

(i) 如果存在可数值的算子值函数序列，按一致拓扑几乎处处收敛到 $U(t)$，则称 $U(t)$ 在 Ω 上一致可测；

(ii) 如果对任意的 $x\in X$，向量值函数 $U(t)x$ 强可测，则称 $U(t)$ 在 Ω 上强可测；

(iii) 如果对任意的 $x\in X$, $f\in X^*$, $f(U(t)x)$ 可测，则称 $U(t)$ 在 Ω 上弱可测.

容易看出，$U(t)$ 的一致可测性即是把 $U(t)$ 视为通常的向量值函数的强可测性.

算子值函数的三种可测性之间，有下述的重要关系.

定理 1　设 $U:\Omega\to B(x\to X)$ 是算子值函数，则

(i) $U(t)$ 强可测的充要条件是 $U(t)$ 弱可测，且对每个 $x\in X$，$U(t)x$ 是几乎可分值的；

(ii) $U(t)$ 一致可测的充要条件是 $U(t)$ 弱可测，且在 $B(X\to X)$ 中是几乎可分值的.

证　(i) 由 1.2.2 定理 2 直接可得.

(ii) **必要性**　设 $U(t)$ 一致可测，由 1.2.2 定理 2 的必要性部分可知 $U(t)$ 在 $B(X\to X)$ 中是几乎可分值的. 又由定义可知 $U(t)$ 必是强可测的，从而再由 1.2.2 定理 2 必要性部分知 $U(t)$ 是弱可测的.

充分性　先证 $\|U(t)\|$ 可测. 由于 $U(t)$ 在 $B(X\to X)$ 中几乎可分值，故对任意的 $x\in X$, $U(t)x$ 在 X 中几乎可分值，从而由 (i) 可知 $U(t)$ 强可测.

不妨设 $\{U(t)\mid t\in\Omega\}$ 是可分的. 于是，可取到 $U_i\in B(X\to X)$ $(i=1,2,\cdots)$，$\{U_i\}$ 在 $\{U(t)\mid t\in\Omega\}$ 中稠密. 对每个 i，取 $\{x_{ij}\}$，满足

$$\|x_{ij}\|=1,\quad \|U_i x_{ij}\|\geqslant\|U_i\|-\frac{1}{j}.$$

由于$U(t)$强可测,故由1.2.2引理1,$\|U(t)x_{ij}\|$可测. 今证

$$\|U(t)\|=\sup_{ij}\|U(t)x_{ij}\|. \tag{1}$$

如(1)式得证,则立即可知$\|U(t)\|$可测. 下面仿1.2.2引理1的证明来证明(1). 注意到对确定的t,显然有

$$\sup_{ij}\|U(t)x_{ij}\|\leqslant\|U(t)\|,$$

反之,对任意的j,取U_i,使$\|U(t)-U_i\|\leqslant\frac{1}{j}$.这样

$$\begin{aligned}\sup_{ij}\|U(t)x_{ij}\|&\geqslant\|U(t)x_{ij}\|\\&\geqslant\|U_i x_{ij}\|-\|(U(t)-U_i)x_{ij}\|\\&\geqslant\|U_i\|-\frac{2}{j}\geqslant\|U(t)\|-\frac{3}{j},\end{aligned}$$

由j的任意性,即得(1)式.

现在,用$U(t)$代替1.2.2定理2充分性证明中的$x(t)$,重复同样的过程,即得$U(t)$是一致可测的. 证毕.

§1.3 Bochner积分和Pettis积分

把向量值函数的Riemann积分推广到更一般的Lebesgue积分,可以有强和弱两种不同的方法,它们分别导致Bochner积分和Pettis积分的概念. 由于Bochner积分的应用更多些,所以本节大部分篇幅将以这种积分为对象. 为方便起见,我们先以Pettis积分的简单介绍开始.

在本节中,进一步设$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$为完全的全σ-有限测度空间,X为Banach空间.

1.3.1 Pettis 积分

定义 设有向量值函数 $x:\Omega\to X$，称 $x(t)$ 是 **Pettis 可积的**，是指对任意的 $E\in\mathscr{R}$，存在 $x_E\in X$，使得对一切 $f\in X^*$，积分 $\int_E f(x(t))d\mu(t)$ 存在，且

$$\int_E f(x(t))d\mu(t)=f(x_E),$$

此时，记

$$(P)\int_E x(t)d\mu(t)=x_E,$$

并称 x_E 是 $x(t)$ 在 E 上的 Pettis 积分.

注意，当 $x(t)$Pettis 可积时，在每个 $E\in\mathscr{R}$ 上，Pettis 积分 $(P)\int_E x(t)d\mu(t)$ 是唯一确定的，这是 Hahn-Banach 定理的直接推论.

由定义可以直接看出下列事实：

(i) 当 X 是实数域或复数域时，Pettis 积分即通常的数值函数的积分.

(ii) Pettis 可积的向量值函数必是弱可测的.

(iii) 当 $x_1(t),x_2(t)$ 均为 Pettis 可积时，线性组合 $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ 也是 Pettis 可积的，而且对每个 $E\in\mathscr{R}$，

$$(P)\int_E(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t))d\mu(t)$$
$$=\alpha\{(P)\int_E x_1(t)d\mu(t)\}+\beta\{(P)\int_E x_2(t)d\mu(t)\}.$$

(iv) 如果 $x(t)\doteq y(t)$，则它们的 Pettis 可积性是一致的，而且当 Pettis 可积时，在每个 $E\in\mathscr{R}$ 上，积分值相等.

首先，在自反空间的条件下，讨论一下可积性的定义.

定理1 设X是自反空间，$x(t)$是$\Omega\to X$的向量值函数，且对任意的$f\in X^*$，$\int_\Omega f(x(t))d\mu(t)$存在，则$x(t)$必是Pettis可积的.

证 对$E\in\mathscr{R}$，显然$\int_E f(x(t))d\mu(t)$存在. 作X^*上线性泛函F：

$$F(f)=\int_E f(x(t))d\mu(t),\quad f\in X^* \tag{1}$$

如果能证明$F\in X^{**}$，由于X是自反的，便可取到$x_E\in X$，使

$$F(f)=f(x_E)\quad f\in X^*, \tag{2}$$

由(1)，(2)可知$x(t)$是Pettis可积的（且在E上的Pettis积分就是x_E）.

考察线性算子$T: X^*\to L(E,\mu)$，其定义为

$$T: f\mapsto f(x(t)),\quad f\in X^*,$$

今断言T是闭算子. 实际上，设f_n，$f\in X^*$，$\|f_n-f\|\to 0$，又设$g\in L(E,\mu)$，$\|Tf_n-g\|_L\to 0$. 显然$f\in\mathscr{D}(T)$，又对任意的$t\in\Omega$，

$$|f_n(x(t))-f(x(t))|\leqslant\|f_n-f\|\,\|x(t)\|\to 0.$$

另一方面，

$$\|f_n(x(t))-g\|_L=\|Tf_n-g\|_L\to 0.$$

因此必有$f(x(t))\doteq g(t)$，从而$Tf=g$，这就证明了T是闭的. 由闭图象定理，T是有界的，这样

$$|F(f)|\leqslant\int_E|f(x(t))|d\mu(t)$$

$$=\|Tf\|\leqslant\|T\|\|f\|,$$

即$F\in X^{**}$. 证毕.

下面的定理说明Pettis积分与有界线性算子的作用可以交换次序.

定理2 设X,Y均是Banach空间，$T\in B(X\to Y)$，如果向量

值函数 $x:\Omega\to X$ Pettis 可积，则向量值函数 $T(x(\cdot)):\Omega\to Y$ 必为 Pettis 可积，而且对每个 $E\in\mathscr{R}$，有

$$(P)\int_E Tx(t)d\mu(t)=T\{(P)\int_E x(t)d\mu(t)\}.$$

证　对 $E\in\mathscr{R}$，记 $x_E=(P)\int_E x(t)d\mu(t)$. 由 Pettis 积分的定义，易知只要证明对每个 $f\in Y^*$，$f(Tx(t))\in L(E,\mu)$，且

$$\int_E f(Tx(t))d\mu(t)=f(Tx_E)$$

即可.

记 T 的共轭算子为 T^*. 对 $f\in Y^*$，有 $T^*f\in X^*$，因此

$$f(Tx(t))=(T^*f)(x(t))\in L(E,\mu),$$

而且

$$\int_E f(Tx(t))d\mu(t)=\int_E (T^*f)(x(t))d\mu(t)$$
$$=(T^*f)(x_E)=f(Tx_E).$$

证毕

1.3.2　Bochner 积分

首先，给出 Bochner 积分的定义.

定义　(i) 设有可数值的向量值函数 $x:\Omega\to X$，$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，其中 $\{E_k\}$ 是 Ω 中一列互不相交的可测集，

$$x(t)=x_k,\quad (t\in E_k, k=1,2,\cdots),\tag{1}$$

如果 $\|x(t)\|$ 可积，则称 $x(t)$ 是 Bochner 可积的，且对 $E\in\mathscr{R}$，规定其 Bochner 积分为

$$(B)\int_E x(t)d\mu(t)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\mu(E\cap E_k).\tag{2}$$

(ii) 如果向量值函数 $x(t)$ 是可积的可数值函数列 $\{x_n(t)\}$ 的

几乎处处强收敛的极限，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|x(t)-x_n(t)\|d\mu(t)=0, \tag{3}$$

则规定 $x(t)$ 在 $E\in\mathscr{R}$ 上的 Bochner 积分为

$$(B)\int_E x(t)d\mu(t)=\lim_{n\to\infty}(B)\int_E x_n(t)d\mu(t). \tag{4}$$

这个定义的合理性是需要补充说明的.

第一，在(ii)中，由于 $x_n(t)$ 均是强可测的，由 1.2.2 的定理 3 的系，可知 $x(t)$ 是强可测的，因此 $\|x(t)-x_n(t)\|$ 是可测函数，从而(3)式左边的积分是可以定义的.

其次，我们证明 $\{(B)\int_E x_n(t)d\mu(t)\}$ 是基本序列. 实际上，由可数值函数积分的定义(i)，容易得到

$$\begin{aligned}&\left\|(B)\int_E x_n(t)d\mu(t)-(B)\int_E x_m(t)d\mu(t)\right\|\\&=\left\|(B)\int_E[x_n(t)-x_m(t)]d\mu(t)\right\|\\&\leqslant\int_E\|x_n(t)-x_m(t)\|d\mu(t)\\&\leqslant\int_\Omega\|x_n(t)-x(t)\|d\mu(t)\\&+\int_\Omega\|x_m(t)-x(t)\|d\mu(t)\to 0,\end{aligned}$$

因此，(4)式右边的极限存在.

最后，易知(4)式右边的极限与满足(3)式的 $\{x_n(t)\}$ 的选取无关. 这是因为满足 (3) 式的两列可数值函数交错排列后得到的序列仍然满足(3)式.

定理 1 Bochner 可积的函数必为 Pettis 可积的，且在每个 $E\in\mathscr{R}$ 上，两种积分取值相同.

证 设有如同定义所述的 Bochner 可积函数 $x(t)$ 及可数值

函数列$\{x_n(t)\}$. 由定义易见，可积的可数值函数 $x_n(t)$ 必为 Pettis 可积，且积分值相同，即对任意的 $f\in X^*$,

$$f\left((B)\int_E x_n(t)d\mu(t)\right)=\int_E f(x_n(t))d\mu(t). \tag{5}$$

其次，由于$f(x(t))$是可测函数列$\{f(x_n(t))\}$几乎处处收敛的极限，故是可测的，且有

$$\left|\int_E f(x_n(t))d\mu(t)-\int_E f(x(t))d\mu(t)\right|$$
$$\leqslant\int_E \|f\|\,\|x_n(t)-x(t)\|d\mu(t)\to 0, \tag{6}$$

又由于 $\|(B)\int_E x_n(t)d\mu(t)-(B)\int_E x(t)d\mu(t)\|\to 0$, 所以

$$\left|f\left((B)\int_E x_n(t)d\mu(t)\right)-f\left((B)\int_E x(t)d\mu(t)\right)\right|\to 0, \tag{7}$$

由(5),(6),(7)三式，可以得到

$$f\left((B)\int_E x(t)d\mu(t)\right)=\int_E f(x(t))d\mu(t).$$

这就说明 $x(t)$是 Pettis 可积的，且

$$(P)\int_E x(t)d\mu(t)=(B)\int_E x(t)d\mu(t).$$ 证毕.

鉴于 Bochner 积分存在时，这个积分取值与 Pettis 积分的值一致，下面就把$(B)\int_E x(t)d\mu(t)$ 简记为$\int_E x(t)d\mu(t)$.

对可测的数值函数，可积与绝对可积是等价的，这是 Lebesgue 积分理论中的一个重要结论．相应地，对向量值函数的 Bochner 积分而言，下面的定理是基本而重要的.

定理 2　向量值函数 $x(t)$ 是 Bochner 可积的充要条件是 $x(t)$强可测，而且$\int_\Omega\|x(t)\|d\mu(t)<+\infty$.

证　必要性　设 $x(t)$是 Bochner 可积，于是，存在可积的可

数值函数列$\{x_n(t)\}$，$\{x_n(t)\}$几乎处处强收敛于$x(t)$，故$x(t)$强可测，且由$\|x_n(t)\|\in L(\Omega,\mathscr{R},\mu)$，$n$充分大时，由$x(t)$可积的定义得知$\int_\Omega\|x(t)-x_n(t)\|d\mu(t)<+\infty$. 因此

$$\int_\Omega\|x(t)\|d\mu(t)\leqslant\int_\Omega\|x_n(t)\|d\mu(t)$$

$$+\int_\Omega\|x(t)-x_n(t)\|d\mu(t)<+\infty.$$

充分性 设$x(t)$强可测，且$\int_\Omega\|x(t)\|d\mu(t)<+\infty$. 因为$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$是$\sigma$有限的，故存在一列互不相交的可测集$E_n$，满足$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，而且$0\leqslant\mu(E_n)<+\infty$ $(n=1,2,\cdots)$.

对任何的$\varepsilon>0$，由1.2.2定理2的系1，可取到可数值函数$x_{n\varepsilon}(t)$，使得对E_n上几乎所有的t成立着

$$\|x_{n\varepsilon}(t)-x(t)\|<\frac{\varepsilon}{2^n(\mu(E_n)+1)}. \tag{8}$$

作Ω上的可数值函数x_ε:

$$x_\varepsilon(t)=x_{n\varepsilon}(t),\quad t\in E_n,\ n=1,2,\cdots \tag{9}$$

由(8),(9)可见

$$\int_\Omega\|x(t)-x_\varepsilon(t)\|d\mu(t)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n(\mu(E_n)+1)}\mu(E_n)<\varepsilon, \tag{10}$$

因此，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\|x(t)-x_\varepsilon(t)\|d\mu(t)=0. \tag{11}$$

另一方面，

$$\int_\Omega\|x_\varepsilon(t)\|d\mu(t)\leqslant\int_\Omega\|x(t)\|d\mu(t)$$

$$+\int_\Omega \|x_\varepsilon(t)-x(t)\|d\mu(t)<+\infty, \tag{12}$$

即 $x_\varepsilon(t)$ 是可积函数. 由(11), (12)及 Bochner 积分的定义, 得 $x(t)$是 Bochner 可积的. 证毕.

注 由定理 2 充分性部分的证明, 实际上可以得到如下的结果:

设 $x(t)$是 Bochner 可积的, 则对任何 $\varepsilon>0$, 必存在Ω的一个分割$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 其中 F_n 互不相交, 对任取的 $t_n\in F_n$, 可数值函数

$$x_\varepsilon(t)=x(t_n),\quad t\in F_n,\quad n=1,2,\cdots \tag{13}$$

是 Bochner 可积的,且

$$\int_\Omega \|x_\varepsilon(t)-x(t)\|d\mu(t)<\varepsilon, \tag{14}$$

对更精细的分割,估计式(14)依然成立.

为说明这一点,按定理证明中的记号, 把每个 E_n 分割为互不相交的可测集$\{E_n^{(m)}\}$的并, 在每个 $E_n^{(m)}$上, $x_{n\varepsilon}(t)$ 取常值. 重记$\{E_n^{(m)}\}$为$\{F_n\}$. 于是,当 $t\in F_k\subset E_n$ 时,按(13)定义的 $\bar{x}_\varepsilon(t)$满足

$$\begin{aligned}\|x(t)-\bar{x}_\varepsilon(t)\|&\leqslant\|x(t)-x_{n\varepsilon}(t)\|+\|x_{n\varepsilon}(t)-\bar{x}_\varepsilon(t)\|\\&=\|x(t)-x_{n\varepsilon}(t)\|+\|x_{n\varepsilon}(t_k)-x(t_k)\|\\&<\frac{2\varepsilon}{2^n(\mu(E_n)+1)},\end{aligned}$$

类似于(10),可以得到

$$\int_\Omega \|x(t)-\bar{x}_\varepsilon(t)\|d\mu(t)<2\varepsilon, \tag{15}$$

再取新的 $\bar{x}_\varepsilon(t)$为 $x_{\frac{\varepsilon}{2}}(t)$即可.

利用定理 2 可以构造一个 Pettis 可积而并非 Bochner 可积的例子.

例1 设 c_0 是收敛于 0 的数列$\{x_n\}$全体按通常的线性运算及范数$\|\{x_n\}\|=\sup\limits_n|x_n|$所成的 Banach 空间，$m$是$[0, \infty)$上的勒贝格测度. 向量值函数 $x:[0,\infty)\to c_0$ 定义为

$$x(t)=\frac{1}{n}e_n,\quad t\in[n-1,n),\quad n=1,2,\cdots$$

其中 e_n 是 c_0 中第 n 个坐标为 1，其余坐标为 0 的元素，则 $x(t)$并非 Bochner 可积，但却是 Pettis 可积的.

实际上，注意到

$$\int_0^\infty\|x(t)\|dm(t)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}=\infty,$$

由定理 2 可知 $x(t)$不是 Bochner 可积的.

另一方面，当 $f=\{a_n\}\in(c_0)^*=l^1$ 时，对$[0,\infty)$中任一勒贝格可测集 E，如记 $E_n=E\cap[n-1,n)$，则有

$$\begin{aligned}\int_E f(x(t))dm(t)&=\sum_{n=1}^\infty\int_{E_n}f(x(t))dm(t)\\&=\sum_{n=1}^\infty a_n\frac{m(E_n)}{n}=f(x_E),\end{aligned}$$

其中 $x_E=\left\{\frac{m(E_n)}{n}\right\}\in c_0$，因此，$x(t)$是 Pettis 可积的，且

$$(P)\int_E x(t)dm(t)=\left\{\frac{m(E_n)}{n}\right\}.$$

1.3.3 Bochner 可积函数的性质

Bochner 积分具有和通常的 Lebesgue 积分类似的若干基本性质. 记测度空间 $(\Omega,\ \mathscr{R},\ \mu)$ 上取值于某 Banach 空间 X 的 Bochner 可积函数全体为 $\mathrm{B}(\Omega,\ X,\ \mu)$. 由 Bochner 积分的定义和 1.3.2 定理 2，不难得到下面的结论.

定理 1　设 $x(t), y(t)\in B(\Omega, X, \mu)$，则

(i) 对任意的数 α, β. $\alpha x(t)+\beta y(t)\in B(\Omega, X, \mu)$，且对任意的 $E\in\mathscr{R}$，成立着

$$\int_E [\alpha x(t)+\beta y(t)]d\mu(t)$$
$$=\alpha\int_E x(t)d\mu(t)+\beta\int_E y(t)d\mu(t).$$

(ii) 如果 $x(t)\doteq y(t)$，那末

$$\int_E x(t)d\mu(t)=\int_E y(t)d\mu(t),\quad \forall E\in\mathscr{R}.$$

(iii) $$\left\|\int_E x(t)d\mu(t)\right\|\leqslant\int_E\|x(t)\|d\mu(t),\quad \forall E\in\mathscr{R}. \tag{1}$$

古典分析中的 Lebesgue 控制收敛定理对于 Bochner 积分依然成立.

定理 2　设 $\{x_n(t)\}\subset B(\Omega,\ X,\ \mu)$ 几乎处处强收敛于 $x(t)$，$F(t)\in L(\Omega,\ \mathscr{R},\ \mu)$，满足 $\|x_n(t)\|\leqslant F(t)$，$n=1,2,\cdots$，则 $x(t)\in B(\Omega, X, \mu)$，而且，对任意的 $E\in\mathscr{R}$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_E x_n(t)d\mu(t)=\int_E x(t)d\mu(t).$$

这个定理的证明从略.

下面的定理 3 和定理 4 分别给出 Bochner 积分的“强可列可加性”与“强绝对连续性”.

定理 3　设 $\{E_n\}$ 是 Ω 中一列两两不相交的可测集，$x(t)\in B(\Omega, X, \mu)$，则有

$$\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n}x(t)d\mu(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}x(t)d\mu(t), \tag{2}$$

这里的和式表示强收敛意义下的极限.

定理 4　设 $x(t)\in B(\Omega, X, \mu)$，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)<\delta$ 时

$$\left\|\int_E x(t)d\mu(t)\right\|<\varepsilon. \tag{3}$$

这两个定理的证明主要是利用定理 1 的(iii)，此处从略.

定理 5 设 X, Y 均是 Banach 空间，T 是 X 到 Y 的闭线性算子，$x(t)\in B(\Omega,X,\mu)$，$Tx(t)\in B(\Omega,Y,\mu)$，则对任何 $E\in\mathscr{R}$，

$$T\left[\int_E x(t)d\mu(t)\right]=\int_E Tx(t)d\mu(t). \tag{4}$$

证 首先，我们利用 1.3.2 中定理 2 后面证的结论，用互不相交的可测集 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 分割 Ω: $\Omega=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$，取 $t_n\in E_n$，令

$$x_\varepsilon(t)=x(t_n),\quad t\in E_n,\quad n=1,2,\cdots$$

使得

$$\int_\Omega\|x(t)-x_\varepsilon(t)\|d\mu(t)<\varepsilon \tag{5}$$

$$\int_\Omega\|Tx(t)-Tx_\varepsilon(t)\|d\mu(t)<\varepsilon \tag{6}$$

同时成立. 注意到

$$\int_E x_\varepsilon(t)d\mu(t)=\sum_{n=1}^{\infty}x(t_n)\mu(E\cap E_n)$$

$$=s\text{-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}x(t_n)\mu(E\cap E_n),$$

$$\int_E Tx_\varepsilon(t)d\mu(t)=\sum_{n=1}^{\infty}Tx(t_n)\mu(E\cap E_n)$$

$$=s\text{-}\lim_{N\to\infty}T\left[\sum_{n=1}^{N}x(t_n)\mu(E\cap E_n)\right],$$

由于 T 是闭的，因此 $\int_E x_\varepsilon(t)d\mu(t)\in\mathscr{D}(T)$，而且

$$T\left[\int_E x_\varepsilon(t)\,d\mu\,(t)\right]=\int_E Tx_\varepsilon(t)d\mu(t). \tag{7}$$

取一列 $\varepsilon_n \to 0$，由(5)及定理 1 的(iii)，得到

$$\left\| \int_E x_{\varepsilon_n}(t) d\mu(t) - \int_E x(t) d\mu(t) \right\|$$
$$\leqslant \int_E \| x_{\varepsilon_n}(t) - x(t) \| d\mu(t) \to 0.$$

同样地，由(6)，(7)可得

$$T\left[\int_E x_{\varepsilon_n}(t) d\mu(t)\right]$$
$$= \int_E T x_{\varepsilon_n}(t) d\mu(t) \to \int_E T x(t) d\mu(t).$$

再一次利用 T 的闭性，即得 $\int_E x(t) d\mu(t) \in \mathscr{D}(T)$，且

$$T\left[\int_E x(t) d\mu(t)\right] = \int_E T x(t) d\mu(t).$$ 证毕.

系 设 $T \in B(X \to Y)$，$x(t) \in B(\Omega, X, \mu)$，则 $Tx(t) \in B(\Omega, Y, \mu)$，且

$$T\left[\int_E x(t) d\mu(t)\right] = \int_E T x(t) d\mu(t), \quad \forall E \in \mathscr{R}.$$

证 只要注意到如果 $\{x_n(t)\}$ 是一列可数值的可积函数，几乎处处强收敛于 $x(t)$，且满足

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \| x(t) - x_n(t) \| d\mu(t) = 0,$$

那末 $\{T x_n(t)\} \subset B(\Omega, Y, \mu)$ 也是一列可数值函数，几乎处处强收敛于 $Tx(t)$，而且

$$\int_\Omega \| T x_n(t) - T x(t) \| d\mu(t)$$
$$\leqslant \int_\Omega \| T \| \| x_n(t) - x(t) \| d\mu(t) \to 0,$$

因此，$Tx(t) \in B(\Omega, Y, \mu)$. 证毕.

和 $L(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ 的完备性一样，可以证明

定理 6 线性空间 $B(\Omega, X, \mu)$（其中，几乎处处相等的函数

视为同一)按范数

$$\|x\|=\int_{\Omega}\|x(t)\|d\mu(t) \tag{8}$$

是 Banach 空间.

证 容易看到 $B(\Omega, X, \mu)$ 按(8)是赋范线性空间，今证它是完备的. 设 $\{x_n(t)\}\subset B(\Omega, X, \mu)$ 是基本序列, 取子列 $\{x_{n_k}(t)\}$, 使得 $k'>k$ 时

$$\int_{\Omega}\|x_{n_{k'}}(t)-x_{n_k}(t)\|d\mu(t)<\frac{1}{k^2}. \tag{9}$$

所以, $\sum_{k=2}^{\infty}\int_{\Omega}\|x_{n_k}(t)-x_{n_{k-1}}(t)\|d\mu(t)<+\infty$. 由 Levi 引理可知, 对于几乎所有的 t,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\|x_{n_k}(t)-x_{n_{k-1}}(t)\|<+\infty,$$

因此, 级数

$$x_{n_1}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}[x_{n_k}(t)-x_{n_{k-1}}(t)]$$

几乎处处强收敛, 记其极限函数为 $x(t)$. 由 1.2.2 定理 3 的系, $x(t)$是强可测的.

在(9)式中, 令 $k'\to\infty$, 由 Fatou 引理又得

$$\int_{\Omega}\|x(t)-x_{n_k}(t)\|d\mu(t)\leqslant\frac{1}{k^2}. \tag{10}$$

由此可知

$$\int_{\Omega}\|x(t)\|d\mu(t)<+\infty.$$

由 1.3.2 定理 2 便得 $x(t)\in B(\Omega, X, \mu)$.

注意到

$$\int_{\Omega}\|x(t)-x_n(t)\|d\mu(t)$$

$$\leqslant\int_{\Omega}\|x(t)-x_{n_k}(t)\|d\mu(t)+\int_{\Omega}\|x_{n_k}(t)-x_n(t)\|d\mu(t).$$

由(10)式并利用$\{x_n(t)\}$是基本序列的事实，易得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|x(t)-x_n(t)\|d\mu(t)=0.\quad \text{证毕.}$$

现在，设$(\Omega_1,\mathscr{R}_1,\mu_1)$和$(\Omega_2,\mathscr{R}_2,\mu_2)$分别是两个完全全$\sigma$有限测度空间. 记它们的完全乘积测度空间为$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{R}_1\times\mathscr{R}_2,\mu_1\times\mu_2)$. 关于 Bochner 积分，也有下述的 Fubini 定理.

定理 7 设$x(t,s)$是$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{R}_1\times\mathscr{R}_2,\mu_1\times\mu_2)$上的 Bochner 可积函数，则

$$y(t)=\int_{\Omega_2}x(t,s)d\mu_2(s),\quad z(s)=\int_{\Omega_1}x(t,s)d\mu_1(t)\tag{11}$$

分别在Ω_1和Ω_2上几乎处处有定义，并且

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2}x(t,s)d\mu_1\times\mu_2=\int_{\Omega_1}y(t)d\mu_1(t)=\int_{\Omega_2}z(s)d\mu_2(s).\tag{12}$$

证 因为$\mu_1\times\mu_2$零集的截口几乎处处为零集，故改变$\mu_1\times\mu_2$零集上$x(t,s)$的值不影响定理的结论，所以，不妨设$x(t,s)$是可分值的.

对任何$f\in X^*$，$f(x(t,s))$可测，所以$f(x(t,s))$对几乎所有的t，是s的可测函数. 由 1.2.2 定理 2，对几乎所有的t，$x(t,s)$是s的强可测函数. 同样可知，对几乎所有的s，$x(t,s)$是t的强可测函数.

对$\|x(t,s)\|$用数值函数的Fubini定理，知$\int_{\Omega_2}\|x(t,s)\|d\mu_2(s)$和$\int_{\Omega_1}\|x(t,s)\|d\mu_1(t)$分别对几乎所有的$t$和几乎所有的$s$是有限的. 由 1.3.2 定理 2，(11)中的两个积分几乎处处有定义.

对 $f\in X^*$，由定理 5 的系，

$$f(y(t))=\int_{\Omega_2} f(x(t,s))d\mu_2(s),$$

故 $f(y(t))$可测. 又对几乎所有的 t，

$$y(t)\in\overline{\text{span}\{x(t,s)\mid(t,s)\in\Omega_1\times\Omega_2\}},$$

所以$y(t)$ 是可分值的. 再次利用 1.2.2 定理 2，便知 $y(t)$强可测. 又因为

$$\int_{\Omega_1}\|y(t)\|d\mu_1(t)\leqslant\int_{\Omega_1\times\Omega_2}\|x(t,s)\|d\mu_1\times\mu_2<+\infty.$$

由 1.3.2 定理2，$y(t)$是 Bochner 可积的. 同样，$z(s)$是 Bochner 可积的.

由数值函数的 Fubini 定理及定理 5 的系，得到

$$f\left(\int_{\Omega_1\times\Omega_2} x(t,s)d\mu_1\times\mu_2\right)=\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x(t,s))d\mu_1\times\mu_2$$

$$=\int_{\Omega_1} d\mu_1(t)\int_{\Omega_2} f(x(t,s))d\mu_2(s)=\int_{\Omega_1} f(y(t))d\mu_1(t)$$

$$=f\left(\int_{\Omega_1} y(t)d\mu_1(t)\right).$$

上式对一切 $f\in X^*$成立，从而

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} x(t,s)d\mu_1\times\mu_2=\int_{\Omega_1} y(t)d\mu_1(t).$$

同样可知(12)中第二个等号成立. 证毕.

为满足后面的需要，我们对 Bochner 积分的性质作一些补充讨论. 下面，设Ω为n维欧几里德空间，m是通常的 Lebesgue 测度.

设 I 是Ω上的有界开矩形，$a\in X$，

$$x(t)=\begin{cases}a, & t\in I,\\ 0, & t\overline{\in} I.\end{cases}\tag{13}$$

首先，我们说明这类函数可以用支集有界的向量值连续函数按

$B(\Omega,X,m)$的范数逼近．实际上，作两个开集 I'，I''，使得$\overline{I'}\subset I$，$\overline{I''}\subset I^c$，且 I''^c 为有界集．定义

$$f(t)=\frac{a\rho(t,I'')}{\rho(t,I')+\rho(t,I'')}.$$

显然，$t\in I'$ 时 $f(t)=a$；$t\in I''$ 时 $f(t)=0$．$f(t)$是支集有界的连续函数，当 $m(I''^c-I')\to 0$ 时，$f(t)$必以积分平均收敛于 $x(t)$．

我们把形如(13)的函数的线性组合称为阶梯函数．由可积函数的定义得知，可积的可数值函数全体在 $B(\Omega,X,m)$中稠密，因此，阶梯函数全体必定在$B(\Omega,X,m)$中稠密，再由前段说明可知支集有界的连续函数全体在 $B(\Omega,X,m)$中稠密．由此，可以得到下述定理．

定理 8　设 $x(t)\in B(\Omega,X,m)$，则

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_\Omega \|x(t)-x(t+\alpha)\|dm(t)=0, \tag{14}$$

其中，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$x(t+\alpha)=x(t_1+\alpha_1,\cdots,t_n+\alpha_n)$．

证　(14)对支集有界的向量值连续函数显然成立，利用稠密性易知对一般的可积函数也成立．证毕．

定理 9　设 $x(t)\in B(\Omega,X,m)$，数值函数 $f(t)$有界可测，则

$$y(\xi)=\int_\Omega f(t)x(t-\xi)dm(t)$$

是 ξ 的连续函数．

证　积分的存在性是显然的．设$|f(t)|\leqslant M(\forall t\in\Omega)$，有

$$\|y(\xi+\alpha)-y(\xi)\|\leqslant\int_\Omega |f(t)|\|x(t+\xi+\alpha)-x(\xi+t)\|dm(t)$$

$$\leqslant M\int_\Omega \|x(\tau+\alpha)-x(\tau)\|dm(\tau)\to 0,$$

这里，我们利用了 Lebesgue 测度的平移不变性及定理 8 的结论．证毕．

1.3.4 算子值函数的 Bochner 积分

设 X,Y 是 Banach 空间，今考察定义于Ω，取值于 $B(X\to Y)$ 的算子值函数的可积性.

前面已说过，算子值函数的一致可测性，即把它看作通常的向量值函数的强可测性. 如果把算子值函数视为一般的向量值函数，按前面的定义它是 Bochner 可积的，则称它是一致 Bochner 可积的. 由 1.3.2 定理 2 可以知道：算子值函数$U(t)$是一致 Bochner 可积的充要条件是$U(t)$为一致可测，而且$\int_{\Omega}\|U(t)\|d\mu(t)<+\infty$.

定义于Ω，取值于 $B(X\to Y)$的一致 Bochner 可积函数全体记为 $B(\Omega,B(X\to Y),\mu)$. 如果$U(t)\in B(\Omega,B(X\to Y),\mu)$，则其一致 Bochner积分为$\int_{\Omega}U(t)d\mu(t)\in B(X\to Y)$.

定理1 设 $U(t)\in B(\Omega,\ B(X\to Y),\mu)$，则 $U^*(t)\in B(\Omega,\ B(Y^*\to X^*),\mu)$，并且

$$\left(\int_{\Omega}U(t)d\mu(t)\right)^*=\int_{\Omega}U^*(t)d\mu(t). \tag{1}$$

证 对 $U(t)\in B(\Omega,B(X\to Y),\mu)$，由定义，存在一列可积的可数值函数 $\{U_n(t)\}$，它按算子范数几乎处处收敛到$U(t)$，而且$\int_{\Omega}\|U(t)-U_n(t)\|d\mu(t)\to 0$. 由于共轭运算$U\to U^*$是保范线性的，所以，按算子范数$\{U_n^*(t)\}$几乎处处收敛于 $U^*(t)$，且有$\int_{\Omega}\|U^*(t)-U_n^*(t)\|d\mu(t)\to 0$. 注意到 $U_n^*(t)$仍是可积的可数值函数，因此 $U^*(t)\in B(\Omega,B(Y^*\to X^*),\mu)$.

对任何一个按算子范数意义下收敛的算子值级数 $\sum_1^{\infty}V_n$，成立着

$$\left(\sum_1^\infty V_n\right)^* = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_1^m V_n\right)^* = \lim_{m\to\infty}\sum_1^m V_n^*$$
$$= \sum_1^\infty V_n^*,$$

所以对可积的可数值算子值函数 $U_n(t)$，有

$$\left(\int_\Omega U_n(t)d\mu(t)\right)^* = \int_\Omega U_n^*(t)d\mu(t),$$

两边取极限，即得

$$\left(\int_\Omega U(t)d\mu(t)\right)^* = \int_\Omega U^*(t)d\mu(t).$$ 证毕.

另一方面，若对每个 $x\in X$，$U(t)x\in B(\Omega,Y,\mu)$，则由前面的讨论，$V(x)=\int_\Omega U(t)xd\mu(t)\in Y$. 现在证明这样的 V 定义了 $X\to Y$ 的一个有界线性算子.

定理 2　如果对每个 $x\in X$，有 $U(t)x\in B(\Omega,Y,\mu)$，规定

$$V: x\longmapsto\int_\Omega U(t)xd\mu(t),$$

则 $V\in B(X\to Y)$.

证　显然，V 是线性的. 考察算子 $W: X\to B(\Omega,Y,\mu)$

$$W: x\longmapsto U(t)x,$$

易知 W 是闭线性算子，由闭图象定理，W 有界，故

$$\|Vx\|\leqslant\int_\Omega\|U(t)x\|d\mu(t)=\|Wx\|\leqslant\|W\|\|x\|,$$

故 V 有界. 证毕.

通常称满足定理 2 的算子值函数 $U(t)$ 为**强 Bochner 可积的**，且规定其强 Bochner 积分就是上述的 V.

容易看到，一致 Bochner 可积必定导致强 Bochner 可积，此时，一致 Bochner 积分等于强 Bochner 积分.

§1.4 向量值测度

本节介绍一类特殊的向量值映射：向量值测度，即定义于某个 σ 代数上可列可加的向量值映射.

首先，类比于数值测度，我们直接引入向量值测度的定义，并讨论它的一些初等性质. 其次，我们要介绍向量值测度的 Radon-Nikodym 性质，这是向量值测度理论研究的中心课题之一. 限于篇幅，这里的介绍只能是初步的. 最后，我们还将讨论数值函数关于向量值测度的积分. 如所周知，这类积分是线性算子谱分解不可缺少的工具.

在本节中，设 $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ 是全有限测度空间，用 X 表示Banach空间.

1.4.1 向量值测度的基本概念

定义 设有映射 $F:\mathscr{R}\to X$，F 满足可列可加性，即对任何一列互不相交的可测集 $\{E_n\}$，有

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} F(E_n), \tag{1}$$

其中右端的级数表示 $\left\{\sum_{n=1}^{m} F(E_n)\right\}$ 按 X 中范数收敛的极限，则称 F 为 $\mathscr{R}$ 上的**向量值测度**.

如果 F 是向量值测度，则容易看出：

(i) $F(\varnothing)=0$; (2)

(ii) 当 $\{E_n\}_{n=1}^{N}$ 是 $\mathscr{R}$ 中有限个互不相交的元时，

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)=\sum_{n=1}^{N} F(E_n); \tag{3}$$

(iii) 当 $E_1, E_2 \in \mathscr{R}$, 且 $E_1 \supset E_2$ 时

$$F(E_1 \backslash E_2) = F(E_1) - F(E_2). \tag{4}$$

例 1　设T是$L[0,1]$到X的有界线性算子,对任意的Lebesgue可测集E,规定 $F(E)=T(\chi_E)$, 其中 χ_E 是集合E的特征函数. 易见对任何可测集 E, $\|F(E)\| \leqslant \|T\| \cdot m(E)$, 这里 $m(E)$表示E的Lebesgue 测度. 由此可知, 如果$\{E_n\}$是$[0,1]$中一列互不相交的可测集,则有

$$\lim_{N\to\infty}\left\|F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)-\sum_{n=1}^{N}F(E_n)\right\|=\lim_{N\to\infty}\left\|F\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty}E_n\right)\right\|$$

$$\leqslant\|T\|\lim_{N\to\infty}m\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty}E_n\right)=0,$$

故F满足(1),即它是向量值测度.

定理 1　设F是$\mathscr{R}$上的向量值测度,则

$$\sup_{E\in\mathscr{R}}\|F(E)\|<+\infty. \tag{5}$$

证一　如果

$$\sup_{E}\|F(E)\|=\infty, \tag{6}$$

取 $H_1\in\mathscr{R}$, 使得 $\|F(H_1)\|>1+2\|F(\Omega)\|$. 因为 $F(H_1)=F(\Omega)-F(\Omega\backslash H_1)$, 所以 $\|F(\Omega\backslash H_1)\|>1$. 另一方面,由(6)可知

$$\sup\{\|F(E)\|\mid E\in\mathscr{R}, E\subset H_1\},$$

$$\sup\{\|F(E)\|\mid E\in\mathscr{R}, E\subset\Omega\backslash H_1\}$$

之一必为∞. 若前者为∞,令$E_1=H_1$;否则,令$E_1=\Omega\backslash H_1$,这样总有

$$\sup\{\|F(E)\|\mid E\in\mathscr{R}, E\subset E_1\}=+\infty, \|F(E_1)\|\geqslant 1.$$

用 E_1 代替 Ω,类似于上述讨论,可得 $E_2\in\mathscr{R}, E_2\subset E_1$,使得

$$\sup\{\|F(E)\|\mid E\in\mathscr{R}, E\subset E_2\}=+\infty, \|F(E_2)\|\geqslant 2,$$

如此下去,得到一列单调下降的$\{E_n\}$,使得

$$\sup\{\|F(E)\|\mid E\in\mathscr{R}, E\subset E_n\}=+\infty, \|F(E_n)\|\geqslant n.$$

但是

$$F(E_n)=F(\Omega)-F(\Omega\setminus E_n)$$
$$=F(\Omega)-\{F(\Omega\setminus E_1)+\sum_{k=1}^{n-1}F(E_k\setminus E_{k+1})\},$$

由 F 的可列可加性，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}F(E_k\setminus E_{k+1})$ 存在，此与 $\|F(E_n)\|\geqslant n$ 相矛盾. 证毕.

如果 F 是向量值测度，任取 $f\in X^*$，作 $\mathscr{R}$ 上的数值函数 $f\circ F$：$f\circ F(E)=f(F(E))$，$(E\in\mathscr{R})$. 显然，$f\circ F$ 是通常的(广义)数值测度. 常用 $\{f\circ F\,|\,f\in X^*,\|f\|\leqslant 1\}$ 来讨论 F 的性质. 现在，用这个想法提供定理 1 的另一个证明.

证二 由于对任何 $f\in X^*$，数值测度 $f\circ F$ 必是有界的，即

$$\sup_{E\in\mathscr{R}}|f(F(E))|<+\infty,$$

利用共鸣定理可知

$$\sup_{E\in\mathscr{R}}\|F(E)\|<+\infty.\quad \text{证毕.}$$

我们还需要关于向量值测度的变差及半变差的概念.

定义 设 $F:\mathscr{R}\to X$ 是向量值测度，$E\in\mathscr{R}$，π 是把 E 分解为 $\mathscr{R}$ 中互不相交的有限个元的分割，规定

$$|F|(E)=\sup_{\pi}\sum_{A\in\pi}\|F(A)\|,\tag{7}$$

称 $|F|$ 为 F 的**变差**. 如果 $|F|(\Omega)<+\infty$，则称 F 是具有**有界变差**的测度.

由定义易知，例 1 中引入的测度 F 是具有有界变差的. 实际上，对任何 $E\in\mathscr{R}$，$\|F(E)\|\leqslant\|T\|m(E)$，因此 $|F|(E)\leqslant\|T\|m(E)$.

定理 2 设 F 是具有有界变差的向量值测度，则 $|F|$ 是 $\mathscr{R}$ 上的非负数值测度.

证　显然，$|F|$是有限可加的. 若$\{E_n\}$是$\mathscr{R}$中一列互不相交的元，π是把$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$分解为$\mathscr{R}$中互不相交的元的一个分割，则

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\pi}\|F(A)\| &= \sum_{A\in\pi}\left\|\sum_{n}F(A\cap E_n)\right\| \\ &\leqslant \sum_{A\in\pi}\sum_{n}\|F(A\cap E_n)\| \\ &= \sum_{n}\sum_{A\in\pi}\|F(A\cap E_n)\| \leqslant \sum_{n}|F|(E_n),\end{aligned}$$

由于上式对一切π成立，故而

$$|F|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|F|(E_n). \tag{8}$$

由于$|F|$有限可加，故对每个n，

$$\sum_{k=1}^{n}|F|(E_k)=|F|\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)\leqslant|F|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right),$$

令$n\to\infty$，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|F|(E_n)\leqslant|F|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right). \tag{9}$$

由(8)，(9)可知$|F|$是可列可加的. 证毕.

现在，考察一类特殊的向量值测度的变差.

定理 3　如果$f\in B(\Omega, X, \mu)$，$F(E)=\int_E f(t)d\mu(t)$，则F是具有有界变差的向量值测度，且

$$|F|(E)=\int_E\|f(t)\|d\mu(t), \forall E\in\mathscr{R}. \tag{10}$$

证　易知F是可列可加的，设π是$E\in\mathscr{R}$的一个分割

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\pi}\|F(A)\| &= \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f(t)d\mu(t)\right\| \leqslant \sum_{A\in\pi}\int_A\|f(t)\|d\mu(t) \\ &= \int_E\|f(t)\|d\mu(t),\end{aligned}$$

因此，$|F|(E)\leqslant\int_E\|f(t)\|d\mu(t)$.

反之，对任何 $\varepsilon>0$，取一列有限值函数 $\{f_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega\|f(t)-f_n(t)\|d\mu(t)=0$，设 n_0 满足

$$\int_\Omega\|f(t)-f_{n_0}(t)\|d\mu(t)<\varepsilon,$$

又设 π' 把 E 分割为若干个使 $f_{n_0}(t)$ 分别取常值的可测子集，π 是 π' 的细分，满足

$$|F|(E)-\sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f(t)d\mu(t)\right\|<\varepsilon.$$

注意到 $\int_E\|f_{n_0}(t)\|d\mu(t)=\sum\limits_{A\in\pi}\left\|\int_A f_{n_0}(t)d\mu(t)\right\|$，所以

$$\begin{aligned}&\left||F|(E)-\int_E\|f_{n_0}(t)\|d\mu(t)\right|\\&\leqslant\left||F|(E)-\sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f(t)d\mu(t)\right\|\right|\\&\quad+\sum_{A\in\pi}\left|\left\|\int_A f(t)d\mu(t)\right\|-\left\|\int_A f_{n_0}(t)d\mu(t)\right\|\right|\\&\leqslant\varepsilon+\int_E\|f(t)-f_{n_0}(t)\|d\mu(t)<2\varepsilon,\end{aligned}$$

综上，便得

$$\begin{aligned}|F|(E)&=\lim_{n\to\infty}\int_E\|f_n(t)\|d\mu(t)\\&=\int_E\|f(t)\|d\mu(t).\end{aligned}$$

证毕.

注　如果 μ 是广义实值测度，$\Omega=A\cup B$ 是 Ω 关于 μ 的 Hahn 分解，$\mu^+(E)=\mu(E\cap A)$，$\mu^-(E)=-\mu(E\cap B)$，规定向量值测度 F 为

$$F(E)=\int_E f d\mu=\int_E f d\mu^+-\int_E f d\mu^-,$$

则由定理 2,3 可知

$$\begin{aligned}|F|(E)&=|F|(E\cap A)+|F|(E\cap B)\\&=\int_{E\cap A}\|f\|d\mu^++\int_{E\cap B}\|f\|d\mu^-\\&=\int_E\|f\|d\mu^++\int_E\|f\|d\mu^-=\int_E\|f\|d|\mu|.\end{aligned}$$

这个结果以后将用到.

定义　设 $F:\mathscr{R}\to X$ 是向量值测度,$E\in\mathscr{R}$,规定

$$\|F\|(E)=\sup\{|f\circ F|(E)\mid f\in X^*,\|f\|\leqslant 1\},\ \forall E\in\mathscr{R},$$

称$\|F\|$是 F 的**半变差**. 如果$\|F\|(\Omega)<+\infty$,则称 F 是**半有界变差测度**.

定理 4　设 $F:\mathscr{R}\to X$ 是向量值测度,则

(i) 对 $E\in\mathscr{R}$,记 π 是把 E 分解为$\mathscr{R}$中互不相交的元的分割,那末

$$\|F\|(E)=\sup_{\pi}\left\{\left\|\sum_{A_n\in\pi}\alpha_n F(A_n)\right\|\,\Big|\,|\alpha_n|\leqslant 1\right\};\tag{11}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\sup\{\|F(H)\|\mid E\supset H\in\mathscr{R}\}&\leqslant\|F\|(E)\\&\leqslant 4\sup\{\|F(H)\|\mid E\supset H\in\mathscr{R}\};\end{aligned}\tag{12}$$

(iii) 如果$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{R}$,那末

$$\|F\|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|F\|(E_n).\tag{13}$$

证　(i) 设 $\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$,$|\alpha_i|\leqslant 1$,$i=1,\cdots,n$,则

$$\begin{aligned}\|\sum\alpha_i F(A_i)\|&\leqslant\sup\{|f(\sum\alpha_i F(A_i))|\,\big|\,f\in X^*,\|f\|\leqslant 1\}\\&\leqslant\sup\{\sum|f\circ F(A_i)|\mid f\in X^*,\|f\|\leqslant 1\}\\&\leqslant\|F\|(E).\end{aligned}$$

反之，对 $f\in X^*$, $\|f\|\leqslant 1$，令 $\theta_j=\arg f\circ F(A_j)$，

$$\sum_{j=1}^{n}|f\circ F(A_j)|=\left|f\left(\sum_{j=1}^{n}e^{-i\theta_j}F(A_j)\right)\right|$$

$$\leqslant\left\|\sum_{j=1}^{n}e^{-i\theta_j}F(A_j)\right\|$$

$$\leqslant\sup\left\{\left\|\sum\alpha_iF(A_i)\right\|\,\Big|\,|\alpha_i|\leqslant 1\right\},$$

这就证得了(11)。

(ii) 首先，

$$\sup\{\|F(H)\|\,|\,E\supset H\in\mathscr{R}\}$$

$$=\sup\{|f\circ F(H)|\,|\,E\supset H\in\mathscr{R}, f\in X^*, \|f\|\leqslant 1\}$$

$$\leqslant\sup\{|f\circ F|(E)\,|\,f\in X^*, \|f\|\leqslant 1\}=\|F\|(E).$$

另一方面，设 $\pi=\{E_1,\cdots,E_n\}$ 是把 E 分解为 $\mathscr{R}$ 中互不相交的元的分割，$f\in X^*$, $\|f\|\leqslant 1$. 当 X 是实 Banach 空间时，记

$$\pi^+=\{n\,|\,f\circ F(E_n)\geqslant 0\},\ \pi^-=\{n\,|\,f\circ F(E_n)<0\},$$

则有

$$\sum_{E_n\in\pi}|f\circ F(E_n)|=\sum_{n\in\pi^+}f\circ F(E_n)-\sum_{n\in\pi^-}f\circ F(E_n)$$

$$=f\left(\sum_{n\in\pi^+}F(E_n)\right)-f\left(\sum_{n\in\pi^-}F(E_n)\right)$$

$$\leqslant 2\sup\{\|F(H)\|\,|\,E\supset H\in\mathscr{R}\}.$$

如果 X 是复空间，只要把 $f\circ F$ 分解为实部与虚部，分别利用实空间的结果，便得

$$\sum_{E_n\in\pi}|f\circ F(E_n)|\leqslant 4\sup\{\|F(H)\|\,|\,E\supset H\in\mathscr{R}\},$$

这个估计式对一切$f\in X^*$, $\|f\|=1$成立，于是证得了

$$\|F\|(E)\leqslant 4\sup\{\|F(H)\|\mid E\supset H\in\mathscr{R}\}.$$

(iii) 不妨设$E_i(i=1,2,\cdots)$互不相交. 若$A_1,\cdots,A_k$是$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$的一个互不相交的分割，则对$|\alpha_i|\leqslant 1$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i F(A_i)\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_i F(E_n\cap A_i)\right\|$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|F\|(E_n),$$

由(i)的结果，即得

$$\|F\|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|F\|(E_n).\quad 证毕.$$

1.4.2 向量值测度的可列可加性

向量值测度的可列可加性是利用X中点列的强收敛来定义的. 自然要问：是否可以用弱收敛来定义另一种“弱可列可加性”？下面将要说明这两种可列可加的概念其实是一致的. 为此，先作一些准备.

定义 设$\{x_n\}\subset X$，如果$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$的所有子级数均是强(弱)收敛的，则称向量值无穷级数$\sum x_n$为**强(弱)无条件收敛**.

引理1 如果$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是弱无条件收敛的，则

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}}\sum_{n=N}^{\infty}|f(x_n)|=0 \tag{1}$$

证 由于$\sum x_n$弱无条件收敛，故对自然数列的任一子列$\pi=$

$(n_1, n_2, \cdots)$，存在 $x_\pi \in X$，使得

$$\sum_{n\in\pi} f(x_n) = f(x_\pi)$$

对一切 $f \in X^*$ 成立. 由此易见，对一切 $f \in X^*$，$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < +\infty$.

考察映射 $K: X^* \to l^1$,

$$K(f) = \{f(x_n)\},$$

显然，K是线性闭算子，故有界. 今证K是紧算子. 为此，记 $X_0 = \overline{\operatorname{span}\{x_n\}}$. 设 $\{f_n\} \subset X^*$, $\|f_n\| = 1$，记 $g_n = f_n|_{X_0}$. 由于 X_0 可分，故存在子列$\{g_{n_k}\}$和 $g_0 \in X_0^*$，使得 $w^* - \lim g_{n_k} = g_0$. 设 $f_0 \in X^*$, $f_0|_{X_0} = g_0$，今证 $w\text{-}\lim_{k\to\infty} Kf_{n_k} = Kf_0$. 实际上，对 $\pi = (n_1', n_2', \cdots)$，考察 $(l^1)^* = l^\infty$中的元 h_π, h_π 的第 $n_1', n_2', \cdots$坐标均为 1，其余为 0，于是

$$h_\pi(Kf_{n_k}) = \sum_{n\in\pi} f_{n_k}(x_n) = f_{n_k}(x_\pi) = g_{n_k}(x_\pi) \to g_0(x_\pi)$$

$$= f_0(x_\pi) = \sum_{n\in\pi} f_0(x_n) = h_\pi(Kf_0),$$

因为$\overline{\operatorname{span}_\pi\{h_\pi\}} = l^\infty$，故有 $w\text{-}\lim Kf_{n_k} = Kf_0$. 但 l^1 空间中点列的弱收敛与强收敛一致，从而 $s\text{-}\lim Kf_{n_k} = Kf_0$，所以$K$是紧算子，即 $K(\|f\| \leqslant 1)$是l^1中列紧集. 由 l^1 中列紧集特征即得(1). 证毕.

定理 1 设映射 $F: \mathscr{R} \to X$ 满足弱可列可加性，即对任何一列互不相交的$\{E_n\} \subset \mathscr{R}$，成立着

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n), \tag{2}$$

这里右边的和式表示$\{\sum_{n=1}^{m} F(E_n)\}$弱收敛的极限，则 F 必是可列可加的，即(2)式右端也就是$\{\sum_{n=1}^{m} F(E_n)\}$强收敛的极限.

证　设$\{E_n\}$是$\mathscr{R}$中一列互不相交的元，$\pi=(n_1,n_2\cdots)$是自然数列的任一子列．由假设，对$f\in X^*$，有

$$f\left[F\left(\bigcup_{n\in\pi}E_n\right)\right]=\sum_{n\in\pi}f[F(E_n)],$$

即$\sum_{n=1}^{\infty}F(E_n)$是弱无条件收敛的．由引理1，

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\|f\|=1}\sum_{n=N}^{\infty}|f[F(E_n)]|=0.$$

这样，

$$\left\|F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)-\sum_{n=1}^{N}F(E_n)\right\|=\left\|F\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty}E_n\right)\right\|$$

$$=\sup_{\|f\|=1}\left|f\left(F\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty}E_n\right)\right)\right|$$

$$\leqslant\sup_{\|f\|=1}\sum_{n=1}^{\infty}|f(F(E_n))|\to 0,$$

即F是可列可加的．证毕．

1.4.3　向量值测度的绝对连续性

定义　设$F:\mathscr{R}\to X$为向量值测度，如果对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)<\delta$时，$\|F(E)\|<\varepsilon$，则称F关于μ是**绝对连续的**．

容易看到，当$f\in B(\Omega,X,\mu)$时，由$F(E)=\int_E f(t)d\mu(t)$定义的向量值测度关于μ是绝对连续的．

定理1　向量值测度F关于全有限测度μ绝对连续的充要条件是对任何$E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)=0$时$F(E)=0$．

证　必要性是显然的．今证充分性．首先，对$f\in X^*$，$f\circ F$是

数值测度. 当 $\mu(E)=0$ 时, $F(E)=0$, 所以 $f\circ F(E)=0$, 即 $f\circ F$ 关于 μ 绝对连续.

现在, 假设结论不真, 则必存在 $\varepsilon>0$ 和 $\mathscr{R}$ 中一列元 $\{E_n\}$, 使得

$$\|F(E_n)\|>2\varepsilon,\ \mu(E_n)<\frac{1}{n^2}\quad n=1,2,\cdots \tag{1}$$

显然,

$$\lim_{k\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n\right)=0. \tag{2}$$

由(1), 取 $f_1\in X^*$, $\|f_1\|=1$, 使 $|f_1\circ F(E_1)|>2\varepsilon$. 因为 $f_1\circ F$ 关于 μ 绝对连续, 利用(2), 又可取到 n_1, 使 $\left|f_1\circ F\left(\bigcup_{n=n_1}^{\infty}E_n\right)\right|<\varepsilon$. 令

$$\tilde{E}_1=E_1\setminus\bigcup_{n=n_1}^{\infty}E_n,$$

则有 $\|F(\tilde{E}_1)\|\geqslant|f_1\circ F(\tilde{E}_1)|>\varepsilon$, 且当 $n\geqslant n_1$ 时, $\tilde{E}_1$ 与 E_n 不相交.

用 E_{n_1} 代替 E_1 进行上述讨论, 得 $n_2>n_1$, $\tilde{E}_2=E_{n_1}\setminus\bigcup_{n\geqslant n_2}E_n$, 但 $\|F(\tilde{E}_2)\|>\varepsilon$. 如此下去, 得到 $\mathscr{R}$ 中一列互不相交的 $\{\tilde{E}_n\}$, 满足 $\|F(\tilde{E}_n)\|>\varepsilon$, 此与 F 的可列可加性矛盾. 证毕.

系 设 F 是具有有界变差的向量值测度, 则 F 关于全有限测度 μ 绝对连续的充要条件是 $|F|$ 关于 μ 绝对连续.

在向量值测度的研究中, 常需要把它的半变差用某个数值测度反映出来, 下面设法建立这种联系.

定义 如果 $\{F_\tau\mid\tau\in T\}$ 是一族向量值测度, 满足

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\tau}\left\|F_\tau\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m\right)\right\|=0, \tag{3}$$

其中 $\{E_n\}$ 是 $\mathscr{R}$ 中任意一列互不相交的元, 则称 $\{F_\tau\mid\tau\in T\}$ 是**一致可**

列可加的.

引理 1　设$\{\nu_\tau \mid \tau\in T\}$是一族一致有界且一致可列可加的广义数值测度,则存在一个全有限实值非负测度ν,使得

$$\lim_{\nu(E)\to 0}\sup_\tau|\nu_\tau(E)|=0.$$

证　(I) 先证对任何$\varepsilon>0$,存在有限个元$\tau_1,\cdots,\tau_n\in T$,满足

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|\nu_{\tau_i}|(E)=0\text{ 时},\sup_\tau|\nu_\tau(E)|<\varepsilon. \tag{4}$$

若不然,对$\tau_1\in T$,可取到$E_1\in\mathscr{R}$,$\tau_2\in T$,使得

$$|\nu_{\tau_1}|(E_1)=0,\text{ 但}|\nu_{\tau_2}(E_1)|\geqslant\varepsilon,$$

再取$E_2\in\mathscr{R}$,$\tau_3\in T$,使得

$$|\nu_{\tau_1}|(E_2)=|\nu_{\tau_2}|(E_2)=0,\text{ 但}|\nu_{\tau_3}(E_2)|\geqslant\varepsilon,$$

如此下去,得到一列$\{E_n\}\subset\mathscr{R}$和$\{\tau_n\}\subset T$,使得对任何自然数$n$,

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|\nu_{\tau_i}|(E_n)=0,\text{ 但}|\nu_{\tau_{n+1}}(E_n)|\geqslant\varepsilon.$$

令$H_n=\bigcup_{j=n}^{\infty}E_j$. 对每个$k$,有$\lim_{n\to\infty}\nu_{\tau_k}(H_n)=0$. 又$\{\nu_\tau\}$一致可列可加,因此,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_k|\nu_{\tau_k}(H_n)|=0.$$

注意到$j\geqslant n+1$时,$|\nu_{\tau_{n+1}}|(E_j)=0$,所以$\nu_{\tau_{n+1}}(H_n)=\nu_{\tau_{n+1}}(E_n)$.
因而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_k|\nu_{\tau_{k+1}}(H_n)|\geqslant\varepsilon,$$

此为矛盾.

(II) 由(I),对每个m,取$\tau_1^m,\cdots,\tau_{n(m)}^m\in T$,使得

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant n(m)}|\nu_{\tau_j^m}|(E)=0\text{ 时},\sup_\tau|\nu_\tau(E)|<\frac{1}{m}.$$

作$\lambda_m:\mathscr{R}\to[0,\infty)$,

$$\lambda_m(E)=\frac{1}{n(m)}\sum_{j=1}^{n(m)}|\nu_{\tau_j^m}|(E),$$

λ_m 是非负测度，且

$$\lambda_m(E)=0\text{ 时}, \sup_\tau|\nu_\tau(E)|<\frac{1}{m}.$$

再作 $\nu:\mathscr{R}\to[0,\infty)$,

$$\nu(E)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m(E)}{2^m}, \tag{5}$$

因 $\{\nu_\tau|\tau\in T\}$ 一致有界，故 ν 是 $\mathscr{R}$ 上的全有限非负测度，且

$$\nu(E)=0\text{ 时}, |\nu_\tau(E)|=0.$$

(III) 作 $F:\mathscr{R}\to l^\infty(T)$,

$$(F(E))_\tau=\nu_\tau(E), \tau\in T,$$

由于 ν_τ 一致可列可加，所以 F 可列可加，即它是向量值测度．又 $\nu(E)=0$ 时，$F(E)=0$，从而 F 关于 ν 绝对连续，即

$$\lim_{\nu(E)\to 0}\|F(E)\|=0,$$

此即 $\lim\limits_{\nu(E)\to 0}\sup\limits_\tau|\nu_\tau(E)|=0$．证毕．

定理 2 设 $F:\mathscr{R}\to X$ 为半有界变差向量值测度，则存在全有限实值非负测度 ν，使得

$$0\leqslant\nu(E)\leqslant\|F\|(E), \forall E\in\mathscr{R} \tag{6}$$

$$\lim_{\nu(E)\to 0}\|F\|(E)=0. \tag{7}$$

证 对 $f\in X^*$, $\|f\|\leqslant 1$，考察数值测度 $\nu_f=f\circ F$，显然 $\{\nu_f\}$ 满足引理条件，用引理 1 方法，作 ν，由 ν 的定义(5)可见

$$0\leqslant\nu(E)\leqslant\sup_f|\nu_f|(E)=\sup_f|f\circ F|(E)=\|F\|(E),$$

又由引理 1 的结论，

$$0=\lim_{\nu(E)\to 0}\sup_{\|f\|\leqslant 1}|\nu_f(E)|=\lim_{\nu(E)\to 0}\sup_{\|f\|\leqslant 1}|f\circ F(E)|$$
$$=\lim_{\nu(E)\to 0}\|F(E)\|.$$

利用 1.4.1 定理 4(ii)，即得

$$\lim_{\nu(E)\to 0}|F|(E)=0.$$ 证毕

1.4.4 Radon-Nikodym 性质

在测度论中，熟知有基本的 Radon-Nikodym 定理：假设$(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$是全$\sigma$有限测度空间，$\nu$是$\mathscr{R}$上的$\sigma$有限广义测度，$\nu$关于$\mu$绝对连续，则存在$\Omega$上有限值可测函数$f$，使得对每个$E\in\mathscr{R}$，有

$$\nu(E)=\int_E f d\mu.$$

这个定理可以看作 Newton-Leibniz 公式的推广．现在要问：对向量值测度而言，相应的结果是否成立？即设$F:\mathscr{R}\to X$是具有有界变差的向量值测度，且关于μ绝对连续，是否存在$f\in B(\Omega, X, \mu)$，使得对每个$E\in\mathscr{R}$，有

$$F(E)=\int_E f d\mu.$$

下面的例子说明，这个结果并非普遍成立．

例 1　设$\Omega=[0,1]$，$\mathscr{R}$为$[0,1]$上勒贝格可测集全体，m为 Lebesgue 测度．规定映射$F:\mathscr{R}\to c_0$为

$$F(E)=\left\{\int_E \sin(2^n\pi t)dm(t)\right\},$$

易见$F(E)\in c_0$，且

$$\|F(E)\|=\sup_n\left|\int_E \sin(2^n\pi t)dm(t)\right|\leqslant m(E),$$

因此，F是具有有界变差的c_0值测度，且关于m绝对连续．如果存在 Bochner 可积函数$f:\Omega\to c_0$，使得$F(E)=\int_E f(t)dm(t)$，设$f(t)=\{f_n(t)\}$，则对$E\in\mathscr{R}$，$F(E)$的第n个坐标为

$$(F(E))_n=\int_E f_n(t)dm(t),$$

故对几乎所有的 t, $f_n(t)=\sin(2^n\pi t)$, 即 $f(t)\doteq\{\sin(2^n\pi t)\}$. 但如记$E_n=\left\{t \,\middle|\, |\sin(2^n\pi t)|>\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, 则对一切 n, $m(E_n)=\frac{1}{2}$, 从而

$$m(\overline{\lim} E_n)\geqslant \overline{\lim}\, m(E_n)=\frac{1}{2}.$$

所以 $m(\{t\,|\,f(t)\in c_0\})\leqslant\frac{1}{2}$, 即 f 并非几乎处处为 c_0 值的, 此为矛盾. 这就说明了 Radon-Nikodym 定理关于 F 并不成立.

由此可见, 对向量值测度而言, 需要讨论 Radon-Nikodym定理成立的条件.

定义 如果对每个有界变差且关于 μ 绝对连续的向量值测度 $F:\mathscr{R}\to X$, 均存在 $f\in B(\Omega, X, \mu)$, 使得 $F(E)=\int_E f d\mu$, 则称X关于$(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$具有 Radon-Nikodym 性质.

若X关于一切全有限测度空间均具有 Radon-Nikodym 性质, 则称X具有 **Radon-Nikodym 性质**.

定义 设X是 Banach 空间, $\{e_n\}\subset X$, 如果对任何 $x\in X$, 存在唯一的数列$\{a_i\}$, 使得 $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i$, 其中右边的级数表示按范数收敛的极限, 则称$\{e_n\}$为$X$的 **Schauder 基**.

通常称 x 的展式 $\sum a_ie_i$ 中 e_n 的系数 a_n 为 x 的第 n 个坐标. 显然, $f_n: x\longmapsto a_n$ 是X上的线性泛函.

引理 1 设$\{e_n\}$是 Banach 空间X的 Schauder 基, 对任何 $x\in X$, $x=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)e_n$, 则 $f_n\in X^*$ $(n=1, 2, \cdots)$.

证 对 $x=\sum f_n(x)e_n$, 规定

$$|||x|||=\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}f_i(x)e_i\right\|,$$

由直接验证得知，$(X, |||\cdot|||)$ 仍是 Banach 空间，且 $\|x\|\leqslant|||x|||$，故 $\|\cdot\|$ 与 $|||\cdot|||$ 等价．注意到

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{\|e_n\|}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}f_i(x)e_i\right\|+\left\|\sum_{n=1}^{n-1}f_i(x)e_i\right\|\right\}$$

$$\leqslant\frac{2}{\|e_n\|}|||x|||,$$

所以 $f_n\in X^*$．证毕．

定义　设 $\{e_n\}$ 是 X 的 Schauder 基，如果对任何一个数列 $\{\alpha_n\}$，当

$$\sup_n\left\|\sum_{n=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|<\infty$$

时，$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n}\alpha_i e_i$ 存在，则称 $\{e_n\}$ 是**有界完备的**．

定理 1 (Dunford)　设 X 具有有界完备的 Schauder 基 $\{e_k\}$，则 X 具有 Radon-Nikodym 性质．

证　设 $F:\mathscr{R}\to X$ 是具有有界变差的向量值测度，F 关于 μ 绝对连续．对每个 n，考察数值测度 $f_n\circ F$，f_n 即关于基 $\{e_n\}$ 的系数泛函．显然，$f_n\circ F$ 是 $\mathscr{R}$ 上关于 μ 绝对连续的有限测度．由数值测度的 Radon-Nikodym 定理，存在 Ω 上可测函数 g_n，使得

$$f_n\circ F(E)=\int_E g_n(t)\,d\mu(t)\quad\forall E\in\mathscr{R},$$

对 $x=\sum f_n(x)e_n$，作 $|||x|||=\sup\limits_n\left\|\sum\limits_{n=1}^{n}f_i(x)e_i\right\|$．前面已指出，$\|\cdot\|$ 与 $|||\cdot|||$ 等价．易知，对任何正整数 m, n 均有

$$\left|\left|\left|\sum_{n=1}^{n}g_i(t)e_i\right|\right|\right|\leqslant\left|\left|\left|\sum_{n=1}^{n+m}g_i(t)e_i\right|\right|\right|,\tag{1}$$

$$\left|\left|\left|\sum_{n=1}^{n}\int_E g_i(t)\,d\mu(t)e_i\right|\right|\right|\leqslant|||F(E)|||,\tag{2}$$

而且由(1)及1.4.1定理3可知，

$$\int_E \||| \sum_{n=1}^{n} g_i(t) e_i \||| d\mu(t) \leqslant |F|(E), \tag{3}$$

由(1),(3)及Levi引理，可知

$$\lim_{n\to\infty} \||| \sum_{n=1}^{n} g_i(t) e_i \|||$$

几乎处处存在．由于$\{e_i\}$是有界完备的，故在Ω上几乎处处存在$g(t)\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} g_i(t) e_i = g(t) \quad t\in\Omega.$$

显然，g是强可测的．又由(3)及Fatou引理可知

$$\int_\Omega \||| g(t) \||| d\mu(t) < +\infty.$$

所以由1.3.2定理2，$g\in B(\Omega, X, \mu)$．注意这里X上的范数是取$\||| \cdot \|||$，但因$\|\cdot\|$与$\||| \cdot \|||$等价，故由1.3.3定理5的系可知，X上取范数$\|\cdot\|$时，依然有$g\in B(\Omega, X, \mu)$.

由于$\||| \sum_{n=1}^{n} g_i(t) e_i \||| \leqslant \||| g(t) \|||$几乎处处成立，由控制收敛定理即得$F\in\mathscr{R}$时

$$F(E) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} f_i \circ F(E) e_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} \int_E g_i(t) d\mu(t) e_i$$

$$= \int_E g(t) d\mu(t). \qquad \text{证毕.}$$

由这个定理容易得到下面的推论.

系1 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$空间具有Radon-Nikodym性质.

系2 c_0空间不具有有界完备的Schauder基.

1.4.5　具有 Riesz 表示的算子

对数值函数的情况，为了证明$(L^1(\Omega,\mu))^*=L^\infty(\Omega,\mu)$，需要两个基本工具：一个是前面提到的 Radon-Nikodym 定理，另一个是 Riesz 表示定理．已经指出，前者对一般的向量值测度未必成立．至于后者是否可推广到取值于 Banach 空间的有界线性算子，则是本段讨论的问题．换句话说，我们将讨论：如果 X 为 Banach 空间，$T:L^1(\Omega,\mu)\to X$ 是有界线性算子，是否存在 $f\in L^\infty(\Omega,X,\mu)$，使得

$$Tg=\int_\Omega fgd\mu,\quad \forall g\in L^1(\Omega,\mu),$$

这里 $L^\infty(\Omega,X,\mu)$表示$\{f\,|\,f$ Bochner 可积，$\operatorname{ess\,sup}_{t\in\Omega}\|f(t)\|_X<+\infty\}$，对 $f\in L^\infty(\Omega,X,\mu)$，记$\|f\|=\operatorname{ess\,sup}_{t\in\Omega}\|f(t)\|_X$.

例 1　取$([0,1],\mathscr{R},m)$同 1.4.4 例 1，定义 $T:L^1[0,1]\to c_0$ 为

$$Tg=\left\{\int_0^1 g(t)\sin(2^n\pi t)dm(t)\right\},$$

易见 T 是线性的，且

$$\|Tg\|=\sup_n\left|\int_0^1 g(t)\sin(2^n\pi t)dm(t)\right|$$
$$\leqslant\int_0^1|g(t)|dm(t)=\|g\|_1,$$

即 T 有界．如果存在 $f\in L^\infty([0,1],c_0,m)$，使得

$$Tg=\int_0^1 f(t)g(t)dm(t)\quad \forall g\in L^1[0,1],$$

考察 1.4.4 例 1 中的向量值测度 $F(E)=\left\{\int_E\sin(2^n\pi t)dm(t)\right\}$，则有

$$F(E)=T(\chi_E)=\int_E f(t)dm(t),$$

由 1.4.4 可知，这是不可能的，所以 Riesz 表示定理对于 T 并不成立.

由此，我们引入如下定义.

定义 设 T 是 $L^1(\Omega,\mu)\to X$ 的有界线性算子，如果存在 $f\in L^\infty(\Omega,X,\mu)$，使得

$$Tg=\int_\Omega fgd\mu \quad \forall g\in L^1(\Omega,\mu),$$

则称 T 是具有 **Riesz 表示的**，简称为 T **是可表示的.**

我们要证明：Radon-Nikodym 性质与一族算子的可表示性是等价的.

引理 1 设 $T:L^1(\Omega,\mu)\to X$ 是有界线性算子，

$$F(E)=T(x_E),\ E\in\mathscr{R},$$

则 T 可表示的充要条件是存在 $f\in B(\Omega,X,\mu)$，使得

$$F(E)=\int_E fd\mu,\ E\in\mathscr{R},$$

此时，$f\in L^\infty(\Omega,X,\mu)$，且对一切 $g\in L^1(\Omega,\mu)$，有

$$Tg=\int_\Omega fgd\mu. \tag{1}$$

$$\|T\|=\|f\|_\infty.$$

证 必要性是显然的. 今证充分性. 设 $f\in B(\Omega,X,\mu)$，$F(E)=\int_E fd\mu$. 由 1.4.1 定理 3，$|F|(E)=\int_E\|f(t)\|d\mu(t)$. 另一方面，对任何 $E\in\mathscr{R}$，

$$\|F(E)\|=\|T(x_E)\|\leqslant\|T\|\|x_E\|=\|T\|\mu(E),$$

由此即得

$$|F|(E)\leqslant\|T\|\mu(E),$$

故而

$$\int_E\|f(t)\|d\mu(t)\leqslant\|T\|\mu(E)\quad \forall E\in\mathscr{R}.$$

因此，$\|f(t)\|\leq\|T\|$，即 $f\in L^{\infty}(\Omega,X,\mu)$，且

$$\|f\|_{\infty}\leq\|T\|. \tag{2}$$

由于对一切 $E\in\mathscr{R}$，$T(\chi_E)=\int_{\Omega}\chi_E f d\mu$，所以(1)式对一切阶梯函数成立. 再利用 $f\in L^{\infty}(\Omega,X,\mu)$ 及阶梯函数在 $L^1(\Omega,\mu)$ 中稠密，即知(1)对一切 $g\in L^1(\Omega,\mu)$ 成立.

最后，由于 $\|Tg\|=\|\int_{\Omega}fg d\mu\|\leq\|f\|_{\infty}\|g\|$，故 $\|T\|\leq\|f\|_{\infty}$. 再利用(2)，可得 $\|T\|=\|f\|_{\infty}$. 证毕.

定理 1　X 关于全有限测度空间 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 具有 Radon-Nikodym 性质的充要条件是任何 $T\in B(L^1(\Omega,\mu)\to X)$ 均是可表示的.

证　必要性　设 $T\in B(L^1(\Omega,\mu)\to X)$，定义 $F:\mathscr{R}\to X$ 为

$$F(E)=T(\chi_E),$$

由于 $\|F(E)\|\leq\|T\|\mu(E)$，所以 F 是具有有界变差的向量值测度，F 关于 μ 绝对连续. 由于 X 关于 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 具有 Radon-Nikodym 性质，故存在 $f\in B(\Omega,X,\mu)$，使得

$$F(E)=\int_E f d\mu,$$

由引理 1，即知 T 是可表示的.

充分性　设 $F:\mathscr{R}\to X$ 是具有有界变差的向量值测度，F 关于 μ 绝对连续. 由 1.4.1 定理 2，$|F|$ 是数值测度，$|F|$ 关于 μ 绝对连续. 由数值测度的 Radon-Nikodym 定理，存在实值非负函数 $h\in L^1(\Omega,\mu)$，使得 $|F|(E)=\int_E h d\mu$ 对一切 $E\in\mathscr{R}$ 成立. 记 $E_n=\{t\mid n-1\leq h(t)<n\}$，$n=1,2,\cdots$，则 E_n 互不相交，$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，且对 $E\subset E_n$，有

$$(n-1)\mu(E)\leq|F|(E)\leq n\mu(E).$$

设 g 是阶梯函数，$g=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\chi_{A_i}$，$A_i\in\mathscr{R}$，$A_i\cap A_j=\varnothing\,(i\neq j)$．定义

$$T_ng=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iF(E_n\cap A_i),\tag{3}$$

则有

$$\|T_ng\|\leqslant\sum_{i=1}^{p}|\alpha_i||F|(E_n\cap A_i)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{p}|\alpha_i|n\mu(E_n\cap A_i)\leqslant n\|g\|_1,$$

因此，T_n 可连续地延拓为 $L^1(\Omega,\mu)\to X$ 的有界线性算子，即可设 $T_n\in B(L^1(\Omega,\mu)\to X)$．根据假设，$T_n$ 具有 Riesz 表示，因而存在 $f_n\in L^\infty(\Omega,X,\mu)$，使得

$$T_ng=\int_\Omega f_ng\,d\mu,\ \forall g\in L^1(\Omega,\mu).$$

对 $E\in\mathscr{R}$，由(3)得

$$F(E\cap E_n)=T_n(\chi_E)=\int_Ef_nd\mu.$$

定义 $f:\Omega\to X$ 如下：

$$f(t)=f_n(t),\ t\in E_n,\ n=1,2,\cdots$$

则有

$$F(E)=\lim_{m\to\infty}F\Big(E\cap\Big(\bigcup_{n=1}^{m}E_n\Big)\Big)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_{E\cap\left(\bigcup\limits_{1}^{m}E_n\right)}f(t)\,d\mu(t).\tag{4}$$

由于 F 具有有界变差，对 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{m}E_n$，$F(E)=\int_Ef(t)d\mu(t)$，所以

$$\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{m}E_n}\|f(t)\|d\mu(t)=|F|\left(\bigcup_{n=1}^{m}E_n\right)\leqslant|F|(\Omega),$$

利用 Levi 引理，得 $\|f(t)\| \in L^1(\Omega, \mu)$. 再由控制收敛定理，由 (4) 式可得

$$F(E) = \int_E f(t) d\mu(t),$$

即 X 关于 $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ 具有 Radon-Nikodym 性质. 证毕.

1.4.6 关于 Radon-Nikodym 性质的附注

现在，我们对前两小节讨论的问题，再作一些补充说明.

本世纪三十年代初，Bochner 提出了而今以他命名的向量值函数的积分. 很自然地，他试图把实分析中的 Radon-Nikodym 定理推广到向量值测度的情况，他很快发现，对于 $L^\infty[0,1]$，这种推广是不可行的. 不久，Birkhoff 和 Gelfand 先后证明了 Radon-Nikodym 定理对 Hilbert 空间和自反 Banach 空间成立. 于是，这个问题引起了更多数学家的兴趣. 六十年代中期，Rieffel 引入了可凹集的概念，证明了具有 Radon-Nikodym 性质的 Banach 空间的特征是所有的有界子集均是可凹的. 这个结果从一个方面推动了 Banach 空间几何理论的研究. 七十年代，Diestel 等人又证明了：Banach 空间 X 具有 Radon-Nikodym 性质，当且仅当每个一致有界 X 值鞅是按 $B(\Omega, X, \mu)$ 的范数收敛的，从而把 Radon-Nikodym 性质与向量值鞅理论联系起来. 现在，关于 Radon-Nikodym 性质的研究已获得大量的结果，有兴趣的读者可以参看[8].

1.4.7 Vitali-Hahn-Saks 理定

为了建立数值函数关于向量值测度的积分，我们先介绍 Vitali-Hahn-Saks 定理.

设 $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ 为全有限测度空间，对 $A, B \in \mathscr{R}$，规定

$$\rho(A, B) = \mu(A \triangle B), \tag{1}$$

如果把 $\mathscr{R}$ 中任何两个仅相差零集的集合视为同一，则得到一个度量空间，记为 $\mathscr{R}(\mu)$.

如果 $\{E_n\}\subset\mathscr{R}$, $\rho(E_n,E_m)\to0\,(n,m\to\infty)$，则 $\mu(E_n\triangle E_m)\to0$，亦即 $\int_\Omega|\chi_{E_n}(t)-\chi_{E_m}(t)|d\mu(t)\to0$，所以存在可积的函数 χ，使 $\int_\Omega|\chi_{E_n}(t)-\chi(t)|d\mu(t)\to0$. 但 χ 必是 $\{\chi_{E_n}\}$ 某子列几乎处处收敛的极限，所以存在 $E\in\mathscr{R}$，使 $\chi\doteq\chi_E$，故而 $\rho(E_n,E)\to0$，$(n\to\infty)$，这就说明 $\mathscr{R}(\mu)$ 是完备的度量空间.

如果 F 是 $\mathscr{R}$ 上的向量值测度，F 关于 μ 绝对连续，注意到

$$\mu(A\triangle B)=\mu(A(A\backslash(A\cap B))+\mu(B\backslash(A\cap B)),\tag{2}$$

$$F(A)-F(B)=F(A\backslash(A\cap B))-F(B\backslash(A\cap B)),\tag{3}$$

所以 $\mu(A\triangle B)=0$ 时，$F(A)=F(B)$，即 F 可以看作 $\mathscr{R}(\mu)$ 上的函数. 又由(2)，(3)可知，$\rho(E_n,E)\to0$ 时，$F(E_n)\to F(E)$，即 F 是连续的.

定理 1(Vitali-Hahn-Saks) 设 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 为测度空间，F_n: $\mathscr{R}\to X$, $n=1,2,\cdots$ 为一列向量值测度，每个 F_n 关于 μ 绝对连续，且对 $E\in\mathscr{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(E)$ 均存在，则

$$\lim_{\mu(E)\to0}\sup_n\|F_n(E)\|=0.\tag{4}$$

证 设 $\varepsilon>0$，记

$$\mathscr{R}_{n,m}=\{E\,|\,E\in\mathscr{R},\ \|F_n(E)-F_m(E)\|\leqslant\varepsilon\},$$

$$\mathscr{R}_p=\bigcap_{n,m\geqslant p}\mathscr{R}_{n,m},\ p=1,2,\cdots$$

因为 F_n 在 $\mathscr{R}(\mu)$ 上连续，易见 $\mathscr{R}_{n,m}$, $\mathscr{R}_p$ 均是闭集. 因为对任何 $E\in\mathscr{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(E)$ 存在，所以 $\mathscr{R}(\mu)=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}\mathscr{R}_p$. 但 $\mathscr{R}(\mu)$ 是完备的，由 Baire 定理，它是第二纲的，所以存在自然数 q，$A\in\mathscr{R}$ 和 $r>0$，使得

$$\{E\,|\,\mu(E\triangle A)<r\}\subset\bigcap_{n,m\geqslant p}\{E\,|\,\|F_n(E)-F_m(E)\|\leqslant\varepsilon\}.$$

再由 F_n 绝对连续，故可以取到 δ，$0<\delta<r$，使得 $\mu(E)<\delta$ 时

$$\|F_n(E)\|<\varepsilon \qquad n=1,\cdots,q. \tag{5}$$

注意到 $\mu((A\cup E)\triangle A)\leqslant\mu(E)<\delta$，$\mu((A\setminus E)\triangle A)<\mu(E)<\delta$，由

$$F_n(E)-F_q(E)+\{F_n(A\cup E)-F_q(A\cup E)\}$$
$$-\{F_n(A\setminus E)-F_q(A\setminus E)\},$$

即得

$$\|F_n(E)\|<3\varepsilon, n=q+1, q+2, \cdots \tag{6}$$

这就证明了(4)．证毕．

系 1　在定理 1 的条件下，$F(E)=\lim F_n(E)$ 是向量值测度．

证　显然，F 有限可加，为证它可列可加，只要证明：如果 $\{E_n\}\subset\mathscr{R}$ 是单调下降的集列，$\bigcap E_n=\varnothing$，则 $F(E_n)\to 0$．这是因为 $\mu(\Omega)<\infty$，故 $\mu(E_n)\to 0$．由定理可知，对任何 $\varepsilon>0$，存在 m_ε，当 $m\geqslant m_\varepsilon$ 时

$$\sup_n\|F_n(E_m)\|<\varepsilon,$$

从而 $m\geqslant m_\varepsilon$ 时，$\|F(E_m)\|\leqslant\varepsilon$．证毕．

系 2　设 $\{F_n\}$ 是一列向量值测度，且对一切 $E\in\mathscr{R}$，$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(E)$ 存在，$F(E)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(E)$，则 F 是向量值测度，且 $\{F_n\}$ 是一致可列可加的．

证　对每个 n，按 1.4.3 定理 2，取对应于 F_n 的全有限测度 ν_n，使

$$0\leqslant\nu_n(E)\leqslant\|F_n\|(E)\ (\forall E\in\mathscr{R}),\quad \lim_{\nu_n(E)\to 0}\|F_n\|(E)=0.$$

定义

$$\nu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\nu_n(E)}{1+\nu_n(\Omega)},$$

于是，F_n 关于 ν 绝对连续．由系 1 可知，F 可列可加．如 $\{E_n\}\subset$

$\mathscr{R}$ 单调下降，$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$，则 $\lim_{n\to\infty}\nu(E_n)=0$. 由定理可知

$$\lim_{m\to\infty}\sup_n\|F_n(E_m)\|=0,$$

这就说明 F_n 是一致可列可加的. 证毕.

1.4.8 数值函数关于向量值测度的积分

设 F 为向量值测度，$E\in\mathscr{R}$，$\|F\|(E)=0$，则称 E 为 F-零集. 如果一个命题在某 F-零集外成立，则称此命题关于 F 几乎处处成立. "关于 F 几乎处处"常记为"F-$a.e.$".

现在，对半有界变差测度 F，我们引入积分的定义：

定义 (i) 设 f 为简单函数，即 $f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$，$E_1,\cdots,E_n\in\mathscr{R}$，规定

$$\int_E f(t)dF(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F(E\cap E_i);\tag{1}$$

(ii) 设 f 定义于 Ω，如果存在简单函数序列 $\{f_n\}$，使

$$f_n(t)\to f(t),\ (F\text{-}a.e.)$$

且对任何 $E\in\mathscr{R}$，$\left\{\int_E f_n(t)dF(t)\right\}$ 按范数收敛，则称 f 为可积函数，且规定

$$\int_E f(t)dF(t)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(t)dF(t).\tag{2}$$

对这个定义，须作两点补充说明.

首先，当 $f=\sum\alpha_i\chi_{E_i}$ 时，设 $|f(t)|\leqslant M\ (t\in\Omega)$，不妨又设 E_i 互不相交. 于是，由 1.4.1 定理 4(i)，得

$$\left\|\int_E f(t)dF(t)\right\|=\left\|\sum\alpha_i F(E\cap E_i)\right\|$$

$$= M\left\|\sum\left(\frac{\alpha_i}{M}\right)F(E\cap E_i)\right\| \leqslant M\|F\|(E),$$

故而$\left\|\int_E f(t)dF(t)\right\| \leqslant \sup|f(t)|\cdot\|F\|(E)$.

其次，设简单函数列$f_n(t)\to f(t)$，$g_n(t)\to f(t)$，$(F\text{-}a.e.)$.
$\left\{\int_E f_n(t)dF(t)\right\}\left\{\int_E g_n(t)dF(t)\right\}$对一切$E\in\mathscr{R}$收敛，必须证明$\lim\int_E f_n dF=\lim\int_E g_n dF$，这是定义合理性的保证.

实际上，作$h_n=f_n-g_n$，则$h_n(t)\to 0(F\text{-}a.e.)$，$\left\{\int_E h_n dF\right\}$收敛.
考察$F_n(E)=\int_E h_n(t)dF(t)\quad(\forall E\in\mathscr{R})$，显然，$\{E_n\}$是一列向量值测度，对一切$E\in\mathscr{R}$，$\lim F_n(E)$存在．作相应于1.4.7定理1系2的$\nu$，有

$$\lim_{\nu(E)\to 0}\|F_n(E)\|=0.$$

由Vitali-Hahn-Saks定理，

$$\lim_{\nu(E)\to 0}\sup_n\|F_n(E)\|=0,$$

即对任何$e>0$，存在$\delta>0$，$\nu(A)<\delta$时$\|F_n(A)\|<e(n=1,2,\cdots)$，即

$$\left\|\int_A h_n(t)dF(t)\right\|<e,\ n=1,2,\cdots$$

现在，利用Egoroff定理，取$A\in\mathscr{R}$，使$\nu(A)<\delta$，且h_n在$\Omega\setminus A$上一致收敛于0.这样，可以取到N，使$n\geqslant N$时，$|h_n(t)|<e(\forall t\in\Omega\setminus A)$．于是

$$\left\|\int_E h_n(t)dF(t)\right\| \leqslant \left\|\int_{E\setminus A} h_n(t)dF(t)\right\| + \left\|\int_{E\cap A} h_n(t)dF(t)\right\|$$
$$\leqslant e\|F\|(\Omega)+e,$$

这就是说，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E h_n dF=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n dF=\lim\limits_{n\to\infty}\int_E g_n dF$.

下面，我们列出这类积分的一些性质.

定理1 设 f,g 是 Ω 上关于 F 可积的函数，

(i) 对任意一对数 $\alpha,\beta,\alpha f+\beta g$ 关于 F 可积，且

$$\int_E(\alpha f+\beta g)\,dF=\alpha\int_E f dF+\beta\int_E g dF,\quad \forall E\in\mathscr{R};$$

(ii) 对 $E\in\mathscr{R}$，如果 f 在 E 上本性有界，则

$$\left\|\int_E f dF\right\|\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{t\in E}|f(t)|\,\|F\|(E);$$

(iii) 设$G(E)=\int_E f dF$，则 G 可列可加；

(iv) $\lim\limits_{\|F\|(E)\to 0}\int_E f dF=0$;

(v) 设 Y 是 Banach 空间，$T\in B(X\to Y)$，则 f 关于 Y 值测度 TF 可积，而且

$$T\left(\int_E f dF\right)=\int_E f dTF.$$

由可积函数定义中的(i)，可知定理中(i)-(v)对一切简单函数成立. 再由定义中的(ii)，可证本定理(i)-(v)对一切可积函数成立. 读者不妨自行补充说明.

最后，给出两个积分极限定理.

定理 2 设$\{f_n\}$是一列 F 可积函数，$f_n(t)\to f(t)$ (F-a.e.),

$$\lim_{\|F\|(E)\to 0}\sup_n\left\|\int_E f_n dF\right\|=0,$$

则 f 为 F 可积，而且

$$\int_E f dF=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dF,\quad E\in\mathscr{R}. \tag{3}$$

证 (I) 先证对$E\in\mathscr{R}$，$\left\{\int_E f_n dF\right\}$收敛.

由假设，可取 δ_k，$0<\delta_k<\frac{1}{2^k}$，使$\|F\|(E)<\delta_k$ 时

$$\sup_n \left\| \int_E f_n dF \right\| < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

对 F，由 1.4.3 定理 2，取 ν，使 1.4.3(6)，(7)成立，于是$\{f_n\}$按 ν 几乎处处收敛于 f. 取 $\eta_k>0$，使 $A\in\mathscr{R}, \nu(A)<\eta_k$ 时，$\|F\|(A)<\delta_k$. 由 Egoroff 定理，可以取到 $A_0\in\mathscr{R}, \nu(A_0)<\eta_k$，$\{f_n\}$在 $\Omega\setminus A_0$ 上一致收敛，故而存在 N_k，$n, m\geqslant N_k$ 时，$|f_n(t)-f_m(t)|<\frac{1}{2^k}(t\in\Omega\setminus A_0)$，此时

$$\left\|\int_E\left[f_n(t)-f_m(t)\right]dF(t)\right\|\leqslant\left\|\int_{E\setminus A_0}\left[f_n(t)-f_m(t)\right]dF(t)\right\|+\left\|\int_{E\cap A_0}f_n(t)dF(t)\right\|+\left\|\int_{E\cap A_0}f_m(t)dF(t)\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^k}(\|F\|(\Omega)+2),$$

因此$\left\{\int_E f_n(t)dF(t)\right\}$收敛.

(II) 现在，取一列适当的阶梯函数 g_n，$g_n(t)\to f(t)$，(F-a.e.).

由 Egoroff 定理，对每个 k，取 $A_k\in\mathscr{R}$ 和阶梯函数$\bar{g}_k$，使得 $\nu(A_k)<\eta_k$，且

$$|f_k(t)-\bar{g}_k(t)|<\frac{1}{2^k}, \quad t\in\Omega\setminus A_k,$$

作

$$g_k(t)=\begin{cases}\bar{g}_k(t),\ t\in\Omega\setminus A_k \text{ 且 } |\bar{g}_k(t)|>\dfrac{1}{2^{k-1}},\\ 0,\ \text{其它},\end{cases}$$

于是，当 $t\in\Omega\setminus A_k$ 时

$$|f_k(t)-g_k(t)|\leqslant|f_k(t)-\bar{g}_k(t)|+|\bar{g}_k(t)-g_k(t)|$$

$$<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{3}{2^{k-1}},$$

又由于 $t\in\Omega\setminus A_k$ 且 $|\bar{g}_k(t)|\geq\frac{1}{2^{k-1}}$ 时，$g_k(t)=\bar{g}_k(t)$，所以

$$|f_k(t)|\geq|\bar{g}_k(t)|-|g_k(t)-f_k(t)|\geq|g_k(t)|-\frac{1}{2^k}$$

$$>\frac{1}{2}|\bar{g}_k(t)|=\frac{1}{2}|g_k(t)|,$$

故而 $|g_k(t)|\leqslant 2|f_k(t)|\quad(t\in\Omega\setminus A_k, k=1,2,\cdots)$.

记 $B_k=\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}A_i$，$B=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}B_k$，则

$$\|F\|(B_k)\leq\sum_{i=k}^{\infty}\|F\|(A_i)<\frac{1}{2^{k-1}}.$$

因此，$\|F\|(B)=0$. 当 $t\in\Omega\setminus B=\varliminf\limits_{n\to\infty}(\Omega\setminus A_n)$ 时

$$|f(t)-g_k(t)|\leqslant|f(t)-f_k(t)|+|f_k(t)-g_k(t)|\to 0,$$

即 $g_k(t)\to f(t)$，(F-a.e.).

(III) 最后，证明 $\left\{\int_E g_n(t)dF(t)\right\}$ 收敛：实际上

$$\left\|\int_E\left[f_k(t)-g_k(t)\right]dF(t)\right\|\leqslant\left\|\int_{E\setminus A_k}\left[f_k(t)-g_k(t)\right]dF(t)\right\|$$

$$+\left\|\int_{E\cap A_k}f_k(t)dF(t)\right\|+\left\|\int_{E\cap A_k}g_k(t)dF(t)\right\|,\tag{4}$$

上面估计式右边第一项不超过 $\frac{1}{2^k}\|F\|(\Omega)$，第二项不超过 $\frac{1}{2^k}$，今估计第三项. 对 $h\in X^*$，$\|h\|\leqslant 1$，当 $\|F\|(E)<\delta_k$，$H\subset E$ 时

$$\left|\int_H f_n(t)dh\circ F(t)\right|<\frac{1}{2^k},\ n=1,2,\cdots$$

由此，用 1.4.1 定理 4(ii)，得 $\|F\|(E)<\delta_k$ 时，

$$\int_E|f_n(t)|d|h\circ F|(t)<\frac{4}{2^k},\qquad n=1,2,\cdots$$

所以

$$\left\|\int_{E\cap A_k} g_k(t)dF(t)\right\| = \sup_{\|h\|=1}\left|\int_{E\cap A_k} g_k(t)dh\circ F(t)\right|$$

$$\leqslant \sup_{\|h\|=1}\int_{E\cap A_k}|g_k(t)|d|h\circ F|(t)\leqslant 2\sup_{\|h\|=1}$$

$$\int_{E\cap A_k}|f_k(t)|d|h\circ F|(t)\leqslant\frac{8}{2^k},$$

由(4)，得

$$\left\|\int_E\left[f_k(t)-g_k(t)\right]dF(t)\right\|\leqslant\frac{1}{2^k}(\|F\|(\Omega)+9).$$

利用(I)的结果，可知$\left\{\int_E g_n(t)dF(t)\right\}$收敛，而且$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E g_n(t)dF(t)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(t)dF(t)$.

综合(II)，(III)的结果，得f关于F可积，而且

$$\int_E f(t)dF(t)=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(t)dF(t)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(t)dF(t).$$ 证毕.

定理 3　设$\{f_n\}$为一列F可积函数，$f_n(t)\to f(t)$，(F a.e.)，g也是F可积函数，$|f_n(t)|\leqslant g(t)$，(F-a.e.)，则f必为F可积，且

$$\int_E f(t)dF(t)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(t)dF(t).$$

证　由上一定理可知，只要证明$\lim\limits_{\|F\|(E)\to 0}\sup\limits_n\left\|\int_E f_n dF\right\|=0$. 由于$g$为$F$可积，故对任何$\varepsilon>0$，可取$\delta>0$，使$\|F\|(E)<\delta$时，$\left\|\int_E g dF\right\|<\varepsilon$. 于是，对$H\subset E$，$h\in X^*$，$\|h\|\leqslant 1$，有

$$\left|\int_H g(t)dh\circ F(t)\right|<\varepsilon.$$

由 1.4.1 定理 4(ii)，得到

$$\int_E g(t)d|h\circ F|(t)<4\varepsilon.$$

这样，$\|F\|(E)<\delta$ 时，

$$\left\|\int_E f_n(t)\,dF(t)\right\| \leqslant \sup_{\|h\|\leqslant 1}\int_E |f_n(t)|\,d|h\circ F|(t)$$

$$\leqslant \sup_{\|h\|\leqslant 1}\int_E g(t)\,d|h\circ F|(t) < 4\varepsilon.$$ 证毕.

定理 3 也称为控制收敛定理。

第二章 算子半群

Banach 空间上有界线性算子半群的理论，就是研究无穷维空间中算子值函数方程

$$T(s+t)=T(s)T(t),\quad t,s\geqslant 0$$

的解的理论.

由数学分析知道，通常的函数方程

$$f(s+t)=f(s)f(t)$$

的连续解是指数函数，利用实变函数论的知识，还可以进一步把连续的条件减弱为可测. 与此相应地，算子半群的理论也就是在某种可测性或连续性条件的限制下，研究无穷维空间上算子值指数函数的理论.

本章将介绍算子半群的基本理论. 我们的主要篇幅将限于强连续的单参数算子半群，其原因固然是由于这个对象的讨论比较简洁，而且也由于从方法上来讲，这里的处理是有代表意义的.

本章共五节. 在 § 2.1 中我们引入算子半群的概念，列举了一些常见的例子，并讨论了算子半群的可测性与连续性的关系；§ 2.2 研究 C_0 类算子半群的结构，给出了这类算子半群的表示，特别地，还讨论了有着广泛应用的 C_0 类压缩半群；§ 2.3 和 § 2.4 是半群理论的应用，主要是抽象 Cauchy 问题及遍历理论，这里的介绍自然只是初步的. § 2.6 研究了特殊的半群：算子群. 在这一节中还介绍了极为重要的 Hilbert 空间上单参数酉算子群的 Stone 定理，并给出了这个定理的一些应用.

§2.1 算子半群的概念

在这一节里，首先我们将扼要地说明算子半群概念的由来，并通过几个简单的例子来说明这一概念. 由于在算子半群理论中，比较深刻而有意义的结果都与半群的某种连续性有联系，而半群的连续性又与其可测性密切相关，本节的第二部分旨在讨论这种关系.

2.1.1 算子半群概念的由来

单参数算子群和算子半群的概念起源于微分方程的 Cauchy 问题，以及物理学中的因果律.

例如，考察常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=u_i(x_1,\cdots,x_n),\ i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

记 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，如果对 n 维空间的某区域 Ω 中任何的点 x_0，方程组(1)存在唯一的定义于$(-\infty,+\infty)$的解 $x(t,x_0)$，适合初始条件 $x(0,x_0)=x_0$，而且$\{x(t,x_0)\mid-\infty<t<+\infty\}\subset\Omega$，那么就可以在 Ω 中引入算子 T_t:

$$T_tx_0=x(t,x_0),$$

由解的唯一性，可以得到

$$\begin{aligned}T_{t_1+t_2}x_0&=x(t_1+t_2,x_0)=x(t_1,x(t_2,x_0))\\&=T_{t_1}(T_{t_2}x_0),\end{aligned}$$

即 $T_{t_1+t_2}=T_{t_1}\circ T_{t_2}$.

上面定义的 T_t 可以看作变量 t 的算子值函数，$\{T_t\mid-\infty<t<+\infty\}$是一个单参数集合. 如果在该集合中引入乘法:

$$T_{t_1}T_{t_2}=T_{t_1+t_2},$$

容易知道，关于这个乘法，结合律成立，即

$$T_{t_1}(T_{t_2}T_{t_3})=(T_{t_1}T_{t_2})T_{t_3}=T_{t_1+t_2+t_3};$$

而且，关于这个乘法，$I=T_0$ 是单位元，T_{-t} 是 T_t 的逆元，也就是说，$\{T_t|-\infty<t<+\infty\}$ 关于这个乘法成为算子群. 此外，这一算子群还具有如下的交换性质：

$$T_{t_1}T_{t_2}=T_{t_1+t_2}=T_{t_2}T_{t_1},$$

即它是个 Abel 群.

其次，再考察 k 阶线性齐次偏微分方程

$$L(u)=0, \tag{2}$$

这里，$u=u(t,x)$ 表示某物理系统的状态，L 表示一个 k 阶线性齐次微分算子，x 表示 n 维空间的点，t 表示时间.

设 Y 是 k 维向量值函数空间. 如果对 Y 中任何的元 f: $f(x)=(f_0(x),f_1(x),\cdots,f_{k-1}(x))$，存在方程(2)的适合初始条件

$$u(0,x)=f_0(x),u'(0,x)=f_1(x),\cdots,u^{(k-1)}(0,x)=f_{k-1}(x)$$

的唯一解 $u(t,x)$，记

$$f_t(x)=(u(t,x),\cdots,u^{(k-1)}(t,x)),$$

则 $f_t\in Y$. 现在，定义 $Y\to Y$ 的算子 T_t:

$$T_tf=f_t, \qquad t>0,$$

和前面一样，可以得到

$$T_{t_1+t_2}f=T_{t_1}(T_{t_2}f), \qquad t_1,t_2>0,$$

由此，如果引入乘法

$$T_{t_1}T_{t_2}=T_{t_1+t_2}, \qquad t_1,t_2>0,$$

那末，结合律成立. 注意，这里的 $\{T_t|t>0\}$ 只是个半群.

一般说来，设在时间间隔 (t_0,t_1) 中，考察与 $t\in(t_0,t_1)$ 有关的状态 T_t. 所谓 $\{T_t|t\in(t_0,t_1)\}$ 服从宏观现象的决定论，就是指：对任何 $t'\in(t_0,t_1)$，由 t' 的状态 $T_{t'}$ 能唯一地确定所有 $t>t'$ 时的状态 T_t. 这也就是物理上因果律的数学表现，即如果用状态 $T_{t'}$

表示原因，则由 $T_{t'}$ 唯一确定了任何 $t>t'$ 时的结果态 T_t. 如果这个物理过程可逆，那末 $\{T_t\}$ 组成一个算子群. 但对物理中一般的不可逆现象，我们不能由某时刻的状态决定前一时刻的状态，所以 $\{T_t\}$ 只是半群，即可以在 $\{T_t\}$ 中规定一个满足结合律的乘法，但 $\{T_t\}$ 未必含有单位元，也未必含有其中每个元的逆元.

定义 设 $\{T_t\}$ 是 Banach 空间 X 上一族有界线性算子，如果对一切 $0\leqslant t,s<+\infty$（或 $0<t,s<+\infty$），均有

$$T_{t+s}=T_tT_s, \tag{3}$$

则称 $\{T_t\mid t\geqslant 0\}$（或 $\{T_t\mid t>0\}$）为一**单参数算子半群**；如果(3)式对一切 $-\infty<t,s<+\infty$ 成立，则称 $\{T_t\mid -\infty<t<+\infty\}$ 为一**单参数算子群**.

2.1.2 算子半群的一些例子

下面列举几个比较重要的算子半群.

例 1 $C[0,+\infty)$ 上的平移半群 设 $C[0,+\infty)$ 是 $[0,+\infty)$ 上有界且一致连续的函数 $x(t)$ 全体，对 $x\in C[0,+\infty)$，规定

$$\|x\|=\sup\{|x(t)|\mid t\in[0,+\infty)\},$$

显然，$C[0,+\infty)$ 是 Banach 空间，这个空间中点列的强收敛就是相应函数列的一致收敛. 现在，用 T_t 表示坐标平移的变换，即

$$(T_tx)(s)=x(t+s),\qquad t\geqslant 0, \tag{4}$$

容易看出：$\{T_t\mid t\geqslant 0\}$ 构成一个算子半群.

因为对任何 $x\in C[0,+\infty)$，

$$\|T_tx\|=\sup_s|x(s+t)|\leqslant\sup_s|x(s)|=\|x\|,$$

所以 $\|T_t\|\leqslant 1$；又取 $x\equiv 1$，则 $\|T_tx\|=1=\|x\|$，这就说明 $\|T_t\|=1$.

因为 $x\in C[0,+\infty)$ 时，$x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，故

$$\lim_{u\to 0}\sup|x(t+s+u)-x(t+s)|=0,$$

即$\lim\limits_{u\to 0}\|T_{t+u}x-T_tx\|=0$，这就是说：取值于$C[0,+\infty)$的向量值函数$T_tx$是强连续的。

另一方面，对任何固定的t,u有

$$\|T_{t+u}-T_t\|=2. \tag{5}$$

这是因为，首先，

$$\|T_{t+u}-T_t\|\leqslant\|T_{t+u}\|+\|T_t\|=2,$$

其次，作函数$x(s)\in C[0,+\infty)$，使$x(t)=1$，$x(t+u)=-1$，且$\|x\|=1$，这样

$$\|T_{t+u}x-T_tx\|\geqslant|x(t+u)-x(t)|=2,$$

这就证得(5)．(5)式说明平移算子半群并不按算子范数连续．

例 2　设X是一个函数空间，对固定的实值非负函数$g\in X$，定义X上算子T_t为

$$T_tx(s)=[g(s)]^tx(s),\qquad x\in X,\ t>0,$$

显然，对$x\in X$，

$$\begin{aligned}T_{t_1+t_2}x(s)&=[g(s)]^{t_1+t_2}x(s)\\&=[g(s)]^{t_1}[g(s)]^{t_2}x(s)=T_{t_1}T_{t_2}x(s),\end{aligned}$$

即$\{T_t\,|\,t>0\}$是一个算子半群．至于这个半群的连续性，则与X上范数的定义有关．

例 3　三角半群　这类半群出现于Fourier级数的求和理论，其定义为

$$T_tx(s)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda_nt}x_ne^{ins}\qquad t\geqslant 0,$$

其中$x(s)\sim\sum\limits_{-\infty}^{\infty}x_ne^{ins}$．实际上，它代表一种三角级数求和法．这里比较重要的情况如$\lambda_n=-|n|$，此时，T_t所代表的就是Abel-Poisson求和法，即：若记$e^{-t}=r$，则有

$$
\begin{aligned}
T_t x(s) &\sim \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} x_n e^{ins} \\
&= x_0 + \sum_{1}^{+\infty} r^n [(x_n + x_{-n})\cos ns + i(x_n - x_{-n})\sin ns] \\
&= x_0 + \sum_{1}^{+\infty} r^n (a_n \cos ns + b_n \sin ns).
\end{aligned}
$$

例 4 在 $L(-\infty, +\infty)$ 中考察算子

$$
(T_t x)(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{t}} x(\sigma) d\sigma, \quad t > 0,
$$

则 $u(s, t) = (T_t x)(s)$ 是热传导方程

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 4 \frac{\partial u}{\partial s}
$$

适合初始条件 $u(s, 0) = x(s)$ 的解.

由直接计算可知，当 $t > 0, \tau > 0$ 时

$$
\begin{aligned}
T_t T_\tau x(s) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{t}} \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sigma-\lambda)^2}{\tau}} x(\lambda) d\lambda d\sigma \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{t\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{t} - \frac{(\sigma-\lambda)^2}{\tau}} d\sigma \right) x(\lambda) d\lambda,
\end{aligned}
$$

但因为

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{t} - \frac{(\sigma-\lambda)^2}{\tau}} d\sigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-\lambda-\sigma_1)^2}{t} - \frac{\sigma_1^2}{\tau}} d\sigma_1 \\
&= \sqrt{\frac{\pi t \tau}{t + \tau}} e^{-\frac{(s-\lambda)^2}{t+\tau}},
\end{aligned}
$$

故而

$$
T_t T_\tau x(s) = T_{t+\tau} x(s),
$$

即 $\{T_t \mid t > 0\}$ 是算子半群.

其次，对 $t > 0$，当 $x \in L(-\infty, +\infty)$ 时，

$$
\|T_t x(s)\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{t}} |x(\sigma)| d\sigma ds
$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(\sigma)|d\sigma=\|x\|,$$

即$\|T_t\|\leqslant 1(t>0)$，也就是说，$\{T_t\mid t>0\}$是压缩算子半群。

再次，我们来证明：对任何$x\in L(-\infty,+\infty)$，有

$$\lim_{t\to 0}\|T_tx-x\|=0.$$

事实上，

$$T_tx(s)-x(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}[x(s-\sigma\sqrt{t})-x(s)]d\sigma,$$

由 Fubini 定理立即可得

$$\|T_tx-x\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}|x(s-\sigma\sqrt{t})-x(s)|ds.$$

由于

$$e^{-\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|x(s-\sigma\sqrt{t})-x(s)|ds\leqslant 2\|x\|e^{-\sigma^2},$$

而且，当σ固定时

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|x(s-\sigma\sqrt{t})-x(s)|ds=0,$$

所以由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{t\to 0}\|T_tx-x\|=0.$$

如果定义$T_0=I$，则T_t在 0 点为强连续的；并且，因为

$$\|T_tx-T_{t_0}x\|=\begin{cases}\|T_{t_0}(T_{t-t_0}x-x)\|, & t\geqslant t_0\\ \|T_t(x-T_{t_0-t}x)\|, & t<t_0\end{cases}$$
$$\leqslant\|T_{|t-t_0|}x-x\|,$$

所以T_t是强连续的算子值函数。

例 5 在$L^p(-\infty,+\infty)(p\geqslant 1)$上考察平移算子群$\{T_t\mid-\infty<t<+\infty\}$，其中

$$T_tx(s)=x(s+t),\quad x\in L^p(-\infty,+\infty).$$

对任何$t\in(-\infty,+\infty)$，

$$\|T_t x\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(s+t)|^p ds\right)^{1/p} = \|x\|, \quad x \in L^p(-\infty, +\infty),$$

因此，$\|T_t\| = 1$. 又对固定的 $x \in L^p(-\infty, +\infty)$,

$$\|T_t x - x\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(s+t) - x(s)|^p ds\right)^{1/p} \to 0 \ (t \to 0)$$

所以 T_t 在零点强连续. 和例 4 一样，可以证明 T_t 在 $(-\infty, +\infty)$ 上强连续.

特别地，当 $p=2$ 时，T_t 是 $L^2(-\infty, +\infty)$ 上的酉算子，也就是说，$\{T_t | -\infty < t < +\infty\}$ 是平移酉算子群.

2.1.3 算子半群的可测性和连续性

下面设 X 是 Banach 空间，$\{T_t | t>0\}$ 是 X 上一族有界线性算子组成的算子半群，再设 $((0, +\infty), L, m)$ 是 Lebesgue 测度空间. 本节中的可测性均是指 Lebesgue 可测.

显然，我们可以将单参数半群看成定义在 $(0, +\infty)$ 上的向量值函数，这里的向量是 $X \to X$ 的有界线性算子. 根据第一章的讨论，自然导致下述定义：

定义 (i) 若向量值函数 $T_t (t>0)$ 按算子范数是强可测的，则称算子半群 $\{T_t | t>0\}$ 为**一致可测**;

(ii) 若对任何 $x \in X$，向量值函数 $T_t x (t>0)$ 是强可测的，则称算子半群 $\{T_t | t>0\}$ 为**强可测**;

(iii) 若对任何 $x \in X$，向量值函数 $T_t x (t>0)$ 是弱可测的，则称算子半群 $\{T_t | t>0\}$ 为**弱可测**.

同样地，还有以下的定义：

定义 当算子值函数 $T_t (t>0)$ 是一致(强、弱)连续时，称算子半群 $\{T_t | t>0\}$ 为**一致(强、弱)连续的**.

利用第一章的结果，立即可知：一致可测(一致连续)的算子半

群必是强可测(强连续)的；强可测(强连续)的算子半群必是弱可测(弱连续)的；一致(强、弱)连续的算子半群必是一致(强、弱)可测的.

本章主要讨论具有强连续性的算子半群，这也是最基本而常见的一类算子半群. 上面已经指出，由算子半群的强连续性可以导出强可测性. 实际上，有如下更强的结果.

定理 1　设$\{T_t|t>0\}$是 Banach 空间X上的算子半群，则$\{T_t|t>0\}$强连续的充要条件是它为强可测的.

为了证明这个定理，先要建立两个引理.

引理 1　设$\{T_t|t>0\}$是 Banach 空间X上的强可测算子半群，则对任何$x_0\in X$，必有零集Ω_0及X中可分的闭线性子空间X_0，使$x_0\in X_0$，而且当$t\overline{\in}\Omega_0$时，X_0为T_t的不变子空间，即当$t\overline{\in}\Omega_0$时，对一切$x\in X_0$，有$T_t x\in X_0$.

证　由于$T_t x_0$强可测，故必存在零集F_0，使

$$M_0=\{T_t x_0 | t\overline{\in}F_0\}$$

可分. 设X_0是由M_0和x_0张成的闭线性子空间. 显然，X_0是可分的. 设$T_{t_n}x_0(n=1,2,\cdots)$是M_0中的稠密集，其中$t_n\overline{\in}F_0$，于是，X_0便是$\{T_{t_n}x_0|n=1,2,\cdots\}$和$x_0$张成的线性闭包.

记$F_n=\{t|t+t_n\in F_0\}$，则F_n也是零集. 作

$$\Omega_0=\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n,$$

Ω_0是零集，而且当$t\overline{\in}\Omega_0$时，对任何n，$t+t_n\overline{\in}F_0$，故而

$$T_t\{a_0x_0+\sum_{n=1}^{k}a_nT_{t_n}x_0\}=a_0T_tx_0+\sum_{n=1}^{k}a_nT_{t_n+t}x_0,$$

在X_0之中，这里$a_0,a_1,\cdots,a_k$为任何一组常数. 但是，当$f\in X_0$时，必有常数族$a_0^m,\cdots,a_{m_k}^m$，使得

$$\left\|a_0^m x_0 + \sum_{n=1}^{m_k} a_n^m T_{t_n} x_0 - f\right\| \to 0 \quad (m \to \infty),$$

而$T_t\left(a_0^m x_0 + \sum_{n=1}^{m_k} a_n^m T_{t_n} x_0\right) \in X_0$, X_0又是闭集,从而 $T_t f \in X_0$. 引理证毕.

引理 2 设$\{T_t \mid t>0\}$是 Banach 空间X上的强可测算子半群,$0<a<b<+\infty$,则必存在常数$M>0$,使得

$$\|T_t\| \leqslant M, \quad t \in (a, b].$$

证 用反证法. 假设$\|T_t\|$在$[a, b]$无界,则必能取到一列 $t_n \in [a, b]$, $n=1, 2, \cdots$,使得

$$\|T_{t_n}\| > e^{2n}, \quad n=1, 2, \cdots$$

因此,必有 $x_n \in X$, $\|x_n\|=1$,满足

$$\|T_{t_n} x_n\| > n, \quad n=1, 2, \cdots$$

由引理 1,对每个 x_n,必有X中可分的闭子空间 X_n 及零集 Ω_n,当 $t \overline{\in} \Omega_n$ 时,X_n 为 T_t 的不变子空间. 用 X_∞ 记 $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ 张成的线性闭包,X_∞仍然是可分的,又记 $\Omega_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, Ω_∞也是零集. 当 $t \overline{\in} \Omega_\infty$ 时,$X_n (n=1, 2, \cdots)$均是 T_t 的不变子空间,所以 X_∞是 T_t 的不变子空间. 现在规定

$$|T_t| = \sup_{x \in X_\infty} \frac{\|T_t x\|}{\|x\|} < +\infty, \tag{1}$$

由于 $x_n \in X_n \subset X_\infty$,故

$$|T_{t_n}| > e^{2n}. \tag{2}$$

由 X_∞的可分性,设$\{z_k \mid k=1, 2, \cdots\}$是 X_∞ 中单位球面上的稠密集,容易知道

$$|T_t| = \sup_k \|T_t z_k\|, \tag{3}$$

因为每个$\|T_t z_k\|$是可测函数，所以$|T_t|$也是可测的.

对任何$\tau\overline{\in}\Omega_\infty$和任何$x\in X_\infty$，有$T_\tau x\in X_\infty$，故

$$|T_{t+\tau}|=\sup_{x\in X_\infty}\frac{\|T_{t+\tau}x\|}{\|x\|}=\sup_{x\in X_\infty}\frac{\|T_tT_\tau x\|}{\|x\|}$$

$$\leqslant\sup_{x\in X_\infty}\frac{\|T_t(T_\tau x)\|}{\|T_\tau x\|}\sup_{x\in X_\infty}\frac{\|T_\tau x\|}{\|x\|}\leqslant|T_t||T_\tau|,$$

这样，若取$f(t)=\log|T_t|$，则当$\tau\overline{\in}\Omega_\infty$时，有

$$f(t+\tau)\leqslant f(t)+f(\tau),$$

显然，$f(t_n)>2n(n=1,2,\cdots)$. 记

$$B_n=\{t\,|\,f(t)\geqslant n,\ 0<t\leqslant a\},$$

$$C_n=\{t_n-t\,|\,t\in B_n\},$$

则有

$$B_n\cup C_n\supset(0,t_n)\setminus\Omega_\infty. \tag{4}$$

实际上，对任何$t\in(0,t_n)\setminus\Omega_\infty$，当$t\overline{\in}B_n$时，由于

$$2n<f(t_n)\leqslant f(t)+f(t_n-t)<n+f(t_n-t),$$

即得$f(t_n-t)>n$，即有$t_n-t\in B_n$，从而$t\in C_n$，这就证得了(4).

由(4)式可知$m(B_n)+m(C_n)\geqslant t_n$，但$m(B_n)=m(C_n)$，因而$m(B_n)\geqslant\frac{t_n}{2}\geqslant\frac{a}{2}$. 由于$B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n\supset\cdots$，而且$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\varnothing$，所以$\lim_{n\to\infty}B_n=\phi$. 又由于$m(B_1)<\infty$，因此

$$0=m(\lim_{n\to\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}m(B_n)\geqslant\frac{a}{2},$$

这是矛盾. 证毕.

现在可以证明这一小节的主要结果.

定理1的证明　只要证明充分性. 设$\xi\in(0,+\infty)$，今证T_t在ξ处强连续，即对任何$x\in X$，证明$\lim_{t\to\xi}\|T_tx-T_\xi x\|=0$. 取$a,b$，使$0<a<b<\xi$. 由引理2，$\|T_t\|$在$[a,b]$上有界，记其上界为$M$.

由于

$$T_\xi x = T_\eta T_{\xi-\eta} x \quad (\xi > \eta > 0),$$

上式两边对 η 积分，得

$$(b-a) T_\xi x = \int_a^b T_\eta T_{\xi-\eta} x d\eta. \tag{5}$$

类似地，有

$$(b-a) T_t x = \int_a^b T_\eta T_{t-\eta} x d\eta \quad (t > b). \tag{6}$$

由(5),(6)，并利用 Bochner 积分的性质，即得

$$\begin{aligned} &(b-a)\|T_t x - T_\xi x\| \\ &\leqslant \int_a^b M\|T_{t-\eta}x - T_{\xi-\eta}x\| d\eta \\ &= M\int_{\xi-a}^{\xi-b} \|T_{\tau+(t-\xi)}x - T_\tau x\| d\tau. \end{aligned} \tag{7}$$

由I.3.3 定理 8，从(7)式可得

$$\lim_{t\to\xi}\|T_t x - T_\xi x\| = 0. \qquad \text{证毕}$$

注 由(7)式还可以看到：在$(0, +\infty)$的任何一个致密集上，$\{T_t | t>0\}$是均匀强连续的.

因为在可分空间中，强可测与弱可测等价，由此可得到定理 1 的如下重要推论.

系 设X是可分的 Banach 空间，则X上弱可测的算子半群必是强连续的.

然而，是否可以进一步把定理 1 中的强可测改为弱可测呢？一般地说，这是难以实现的. 为此，只要给出一个弱可测而非强可测的算子半群的例子.

例 1 设X是$(0, +\infty)$上满足如下条件的复值函数$x(t)$全体：$x(t)$至多在可列个 t 处非零，而且

$$\sum_t |x(t)|^2 < +\infty,$$

在 X 中定义范数

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x(t)|^2},$$

则 X 是不可分的 Hilbert 空间. 现在取 $(0, +\infty)$ 上不可测的实值函数 $F(t)$，要求 F 适合

$$F(t_1+t_2)=F(t_1)F(t_2), \qquad t_1, t_2>0,$$

且在任何一个区间 (a,b) $(0<a<b<+\infty)$ 中，F 无界. 定义 X 上单参数算子半群 T_ξ 如下：

$$(T_\xi x)(t) = F(\xi)x(t+\xi).$$

显然，$\|T_\xi\|=|F(\xi)|$ 在任何长度非零的闭子区间上无界，由引理 2 可知，它不是强可测的. 但对 $y\in X^*$，因 X 是 Hilbert 空间，故 $X=X^*$，所以

$$y(T_\xi x(t))=\sum_t \overline{y(t)}x(t+\xi)F(\xi),$$

把 $y(T_\xi x(t))$ 视为 ξ 的函数时，仅在一个至多为可列的集上非零，所以是可测的，即 T_ξ 是弱可测的.

§2.2　C_0 类算子半群

这一节主要介绍强连续单参数算子半群的"分析理论"，(或直说"分析理论"). 本节的主要思想是：为了讨论 $T_{t+s}=T_tT_s$ 的连续解，不妨设想解是指数函数的形式，从而引入无穷小母元的概念，再利用积分变换导出母元预解式的解析表示，这样就便于使用一些分析手段来研究半群的结构.

2.2.1 C_0类算子半群的基本概念

在本节中，设X是 Banach 空间，$\{T_t|t\geqslant 0\}$是X上的算子半群. 先引入C_0类算子半群的定义.

定义 设$\{T_t|t\geqslant 0\}$是一个算子半群，

$$T_tT_s=T_{t+s}\quad (0\leqslant t,s<+\infty),$$

$$T_0=I,$$

如果对每个$t_0\geqslant 0$和$x\in X$，均有

$$\lim_{t\to t_0}\|T_tx-T_{t_0}x\|=0,$$

则称$\{T_t|t\geqslant 0\}$为**强连续算子半群**，简称为 **C_0类算子半群**.

其实，对算子半群而言，在某一点t_0处的强连续性，即能导出在一切点上的强连续性.

引理1 设$\{T_t|t\geqslant 0\}$是 Banach 空间X上的算子半群，且对任何$x\in X$，

$$\lim_{t\to 0}\|T_tx-x\|=0, \tag{1}$$

则$\{T_t|t\geqslant 0\}$必为C_0类算子半群.

证 对任何$t>0$，当$h>0$时，由于

$$T_{t+h}x-T_tx=T_t(T_hx-x),$$

由假设即知，当$h\searrow 0$时

$$\lim_{h\to 0}\|T_{t+h}x-T_tx\|\leqslant\|T_t\|\lim_{h\to 0}\|T_hx-x\|=0,$$

即T_tx在任何一点t处是右连续的. 下面证明它也是左连续的. 为此，先证明对任何$L>0$，

$$\sup\{\|T_t\|\mid t\in[0,L]\}<+\infty. \tag{2}$$

对$x\in X$，由假设可知，能取到$h>0$，$c>0$，使得$\sup\{\|T_tx\|\mid t\in[0,h]\}<c$. 当$t\in[0,L]$时，设$t=kh+r$，其中$k\leqslant\frac{L}{h}$，$0<r<h$，于是

$$\|T_t x\| = \|T_h^i T_r x\| \leqslant \|T_h^i\| c,$$

利用共鸣定理，即得(2)式. 设$M>0$,

$$\sup\{\|T_t\| \mid t\in[0,L]\}\leqslant M. \tag{3}$$

现在，对 $t\in(0,L]$，当正数 h 充分小时，由(1),(3)得到

$$\begin{aligned}\|T_t x-T_{t-h}x\| &= \|T_{t-h}(T_h x-x)\| \\ &\leqslant M\|T_h x-x\|\to 0,\end{aligned}$$

这就得到了左方强连续性. 证毕.

定义 设$\{T_t\mid t\geqslant 0\}$是 Banach 空间X上的算子半群，记$\mathscr{D}$为满足如下条件的元素 $x\in X$ 全体：对 x，存在 $y\in X$，使得

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{1}{t}(T_t-I)x-y\right\|=0. \tag{4}$$

规定 $A:\mathscr{D}\to X$ 为 $Ax=y$，这里 y 由(4)式确定，称A为算子半群$\{T_t\mid t\geqslant 0\}$的**无穷小母元**，简称为**母元**.

显然，$\mathscr{D}(A)=\mathscr{D}$是$X$中的线性子空间，$A$ 是 $\mathscr{D}(A)$上的线性算子. 由定义立即可知：对 $x\in\mathscr{D}(A)$，向量值函数 $t\mapsto T_t x$ 是强可微的，且 $T_t x\in\mathscr{D}(A)$，

$$\frac{d}{dt}T_t x=T_t Ax=AT_t x. \tag{5}$$

引理 2 设$\{T_t\mid t\geqslant 0\}$是 Banach 空间X上的C_0类算子半群，A是其无穷小母元，则$\overline{\mathscr{D}(A)}=X$.

证 先证明对任何 $\tau>0$，$\int_0^\tau T_t x\,dt\in\mathscr{D}(A)$. 记$y=\int_0^\tau T_t x\,dt$，有

$$\begin{aligned}T_h y-y &= \int_0^\tau (T_{t+h}x-T_t x)\,dt=\int_h^{\tau+h} T_t x\,dt-\int_0^\tau T_t x\,dt \\ &= \int_\tau^{\tau+h} T_t x\,dt-\int_0^h T_t x\,dt=\int_0^h T_t(T_\tau x)\,dt-\int_0^h T_t x\,dt,\end{aligned} \tag{6}$$

但对任何 $x\in X$，

$$\left\|\frac{1}{h}\int_0^h T_t x dt - x\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_0^h [T_t x - x] dt\right\|$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant h}\|T_t x - x\| \to 0, \tag{7}$$

由(6),(7)即得

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(T_h y - y) - (T_r x - x)\right\| = 0,$$

由定义便知 $y\in\mathscr{D}(A)$. 由此，再利用(7)式，即得 $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$. 证毕.

2.2.2 无穷小母元的预解式

设$\{T_t | t\geqslant 0\}$是 C_0类算子半群，为了利用积分变换的形式来研究母元的预解式，首先得讨论一下$\|T_t\|$的指数增长特征.

定义 设$\{T_t | t\geqslant 0\}$是 C_0 类算子半群，称

$$\omega_0 = \inf_{t>0}\frac{\log\|T_t\|}{t}$$

为$\{T_t | t\geqslant 0\}$的**指标**.

令 $f(t) = \log\|T_t\|$，由半群的特征即得：

$$f(t_1 - t_2) \leqslant f(t_1) + f(t_2),\quad 0\leqslant t_1, t_2 < +\infty, \tag{1}$$

由此即可证明

引理 1
$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = \inf_{t>0}\frac{f(t)}{t}. \tag{2}$$

证 记 $\omega_0 = \inf\limits_{t>0}\frac{f(t)}{t}$，$\omega_0$ 或是有限，或是 $-\infty$，我们仅就 ω_0 有限的情况证明(对 $\omega_0 = -\infty$，可以类似处理). 对任何 $\varepsilon>0$，取 $b>0$，使得$\frac{f(b)}{b}<\omega_0+\varepsilon$. 考察 $t\in[(n+2)b, (n+3)b]$，则有

$$\omega_0 \leqslant \frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{nf(b)}{t} + \frac{f(t-nb)}{t}$$

$$<\frac{nb}{t}(\omega_0+\varepsilon)+\frac{f(t-nb)}{t}. \tag{3}$$

由于 $t-nb\in[2b,3b]$，由 2.1.3 引理 2 可知 $f(t-nb)$ 有界，所以当 $t\to\infty$ 时，(3)式右端趋于 $\omega_0+\varepsilon$，但 ε 是任意的，这就证得了(2)式. 证毕.

现在，设 ω_0 是 C_0 类算子半群 $\{T_t|t\geqslant 0\}$ 的指标，$x\in X$，对 $\mathrm{Re}\lambda>\omega_0$，考察 T_tx 的"Laplace 变换"

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T_txdt. \tag{4}$$

我们先来说明这个积分的意义. 由引理 1 可知：当 $\omega_0>-\infty$ 时，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $M_\varepsilon>0$，使得

$$\|T_t\|\leqslant M_\varepsilon e^{t(\omega_0+\varepsilon)}; \tag{5}$$

当 $\omega_0=-\infty$ 时，对任何 $N>0$，存在 $M_N>0$，使得

$$\|T_t\|\leqslant M_N e^{-Nt}, \tag{6}$$

由此可知，当 $\mathrm{Re}\lambda>\omega_0$ 时，对任何 ξ，向量值函数 $e^{-\lambda t}T_tx$ 在 $[0,\xi]$ 上是 Riemann 可积的，而且 $s\text{-}\lim\limits_{\xi\to\infty}\int_0^\xi e^{-\lambda t}T_txdt$ 存在，规定

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T_txdt=s\text{-}\lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi e^{-\lambda t}T_txdt.$$

记
$$R(\lambda)x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_txdt.$$

由(5)，(6)易知 $R(\lambda)$ 是 X 到 X 的有界线性算子，而且，对应于(5)，(6)两个情况，分别有

$$\|R(\lambda)\|\leqslant\frac{M_\varepsilon}{\mathrm{Re}\lambda-\omega_0-\varepsilon}\quad(\mathrm{Re}\lambda>\omega_0+\varepsilon), \tag{7}$$

$$\|R(\lambda)\|\leqslant\frac{M_N}{\mathrm{Re}\lambda+N}\quad(\mathrm{Re}\lambda>-N), \tag{8}$$

由此可知

$$\lim_{\mathrm{Re}\lambda\to+\infty}\|R(\lambda)\|=0. \tag{9}$$

$\{U_t \mid t\geqslant 0\}$显然是强连续的. 再由于 $h\to 0$ 时,

$$\left\|\frac{U_h x-x}{h}\right\|=\left\|\frac{e^{-hA}T_h x-x}{h}\right\|\leqslant\|e^{-hA}\|\left\|\frac{T_h x-e^{hA}x}{h}\right\|$$

$$\leqslant\|e^{-hA}\|\left\{\left\|\frac{T_h x-x}{h}-Ax\right\|+\left\|\frac{e^{hA}x-x}{h}-Ax\right\|\right\}\to 0$$

这里利用了$\|e^{-hA}\|\leqslant e^{h\|A\|}$, $\left\|\frac{e^{hA}-I}{h}-A\right\|\to 0$, 故$\{U_t \mid t\geqslant 0\}$的母元为 O. 由此可知, $y(t)=U_t x$ 的强导数为 0, 因而 $y(t)=x$, 即

$T_t=e^{tA}$. 证毕.

为了得到更一般的表示定理, 先建立两个引理.

引理 1　假设$\{T_t \mid t\geqslant 0\}$是 C_0 类算子半群, λ 取实数, 则对一切 $x\in X$,

$$s\text{-}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda)x=x. \tag{1}$$

证　对任何 $x\in X$, $\|x\|=1$, 以及 $\varepsilon>0$, 必存在 $h>0$, 当 $0\leqslant t\leqslant h$ 时,

$$\|T_t x-x\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

再取 $\lambda_1>\omega_0$, ω_0 是$\{T_t \mid t\geqslant 0\}$的指标, 取 $c_1>0$, 使$\|T_t x\|\leqslant c_1 e^{\lambda_1 t}$对一切 t 成立, 于是

$$\|\lambda R(\lambda)x-x\|=\left\|\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}(T_t x-x)dt\right\|$$

$$\leqslant\lambda\int_0^h e^{-\lambda t}\|T_t x-x\|dt+\lambda\int_h^{\infty}e^{-\lambda t}(\|T_t x\|+\|x\|)dt$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+c_1\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_1}e^{-(\lambda-\lambda_1)h}+e^{-\lambda h},$$

故当 $\lambda\to+\infty$ 时, $\|\lambda R(\lambda)x-x\|\to 0$. 证毕.

引理 2　设$\{T_t \mid t\geqslant 0\}$为 C_0 类算子半群, 指标为 ω_0, 当 $\mathrm{Re}\lambda>\omega_0$ 时, 必有

这就是说

$$AR(\lambda)x = R(\lambda)Ax.$$

再由(10)的第一式即得

$$\lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax = x, \quad x \in \mathscr{D}(A),$$

由此可知 $x \in \mathscr{R}(R(\lambda))$，而且(10)的第二式成立。

前面已指出 $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$，现在我们来证明 A 是闭算子。实际上，如果 $x_n \in \mathscr{D}(A)$，$Ax_n = y_n$，$\|x_n - x\| \to 0$，$\|y_n - y\| \to 0$，则由(10)的第二式，得 $x_n = R(\lambda)(\lambda x_n - Ax_n)$。令 $n \to \infty$，即得

$$x = R(\lambda)(\lambda x - y). \tag{11}$$

所以 $x \in \mathscr{R}(R(\lambda)) = \mathscr{D}(A)$。比较(10)的第二式及(11)，即得 $R(\lambda)(y - Ax) = 0$，再由(10)的第一式，得到

$$y - Ax = (\lambda I - A)R(\lambda)(y - Ax) = 0,$$

即 $y = Ax$，这就是说 A 是闭算子。证毕。

2.2.3 C_0 类算子半群的表示

设 B 是 Banach 空间 $X \to X$ 的有界线性算子，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n$$

按算子范数收敛，故它定义了一个有界线性算子，记为 e^B。容易证明：当 B, C 为两个有界线性算子，且 B 与 C 可交换时，

$$e^{B+C} = e^B e^C = e^C e^B.$$

定理 1 设 $\{T_t \mid t \geqslant 0\}$ 是 C_0 类算子半群，A 为其无穷小母元，$\mathscr{D}(A) = X$，则

$$T_t = e^{tA}, \quad t \geqslant 0.$$

证 因为 $\mathscr{D}(A) = X$，由 2.2.2 定理 1 可知 A 是闭算子，所以 A 有界。由于 $T_t A = AT_t$，故对任何 s，$T_t e^{sA} = e^{sA} T_t$。作半群

$$U_t = e^{-tA} T_t, \qquad t \geqslant 0,$$

$\{U_t \mid t\geqslant 0\}$显然是强连续的．再由于$h\to 0$时，

$$\left\|\frac{U_h x-x}{h}\right\|=\left\|\frac{e^{-hA}T_h x-x}{h}\right\|\leqslant\|e^{-hA}\|\left\|\frac{T_h x-e^{hA}x}{h}\right\|$$

$$\leqslant\|e^{-hA}\|\left\{\left\|\frac{T_h x-x}{h}-Ax\right\|+\left\|\frac{e^{hA}x-x}{h}-Ax\right\|\right\}\to 0$$

这里利用了$\|e^{-hA}\|\leqslant e^{h\|A\|}$，$\left\|\frac{e^{hA}-I}{h}-A\right\|\to 0$，故$\{U_t \mid t\geqslant 0\}$的母元为$O$．由此可知，$y(t)=U_t x$的强导数为0，因而$y(t)=x$，即

$T_t=e^{tA}$．证毕．

为了得到更一般的表示定理，先建立两个引理．

引理 1　假设$\{T_t \mid t\geqslant 0\}$是$C_0$类算子半群，$\lambda$取实数，则对一切$x\in X$，

$$s\text{-}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda)x=x. \tag{1}$$

证　对任何$x\in X$，$\|x\|=1$，以及$\varepsilon>0$，必存在$h>0$，当$0\leqslant t\leqslant h$时，

$$\|T_t x-x\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

再取$\lambda_1>\omega_0$，ω_0是$\{T_t \mid t\geqslant 0\}$的指标，取$c_1>0$，使$\|T_t x\|\leqslant c_1 e^{\lambda_1 t}$对一切$t$成立，于是

$$\|\lambda R(\lambda)x-x\|=\left\|\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}(T_t x-x)dt\right\|$$

$$\leqslant\lambda\int_0^h e^{-\lambda t}\|T_t x-x\|dt+\lambda\int_h^{\infty}e^{-\lambda t}(\|T_t x\|+\|x\|)dt$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+c_1\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_1}e^{-(\lambda-\lambda_1)h}+e^{-\lambda h},$$

故当$\lambda\to+\infty$时，$\|\lambda R(\lambda)x-x\|\to 0$．证毕．

引理 2　设$\{T_t \mid t\geqslant 0\}$为$C_0$类算子半群，指标为$\omega_0$，当$\mathrm{Re}\lambda>\omega_0$时，必有

$$[R(\lambda)]^n x=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}t^{n-1}T_t x dt, \tag{2}$$

而且，存在常数 β 和 M_β，使得 $\mathrm{Re}\lambda>\beta$ 时，

$$\|[R(\lambda)]^n\|\leqslant M_\beta\frac{1}{(\mathrm{Re}\lambda-\beta)^n}. \tag{3}$$

注 从下面的证明可以看到，当 $\omega_0>-\infty$ 时，β 可取为 $\omega_0+\varepsilon$，其中 ε 为任意正数，当 $\omega_0=-\infty$ 时，β 可取为任意负数.

证 利用数学归纳法，设对 n，(2)式已证，则

$$\begin{aligned}[R(\lambda)]^{n+1}x&=R(\lambda)\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}t^{n-1}T_t x dt\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}t^{n-1}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda r}T_{t+r}x dr dt\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda(t+r)}t^{n-1}T_{t+r}x dt dr\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda\tau}T_\tau x\int_0^{\tau}r^{n-1}dr d\tau\\&=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}t^n T_t x dt.\end{aligned}$$

上面的过程中，作了变换 $t+r=\tau$，并把二次积分与二重积分互化，这些步骤的合理性均易严格验证. 实际上，只要对任何 $f\in X^*$，把 f 作用于(2)式两边，应用数值函数的 Fubini定理即可. 这就证得了(2).

其次，由 2.2.2 的(5)，(6)可知，能取 β 及 M_β，使得 $\|T_t\|\leqslant M_\beta e^{\beta t}$，由(2)式可得

$$\begin{aligned}\|[R(\lambda)]^n\|&\leqslant\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}e^{-(\mathrm{Re}\lambda)t}t^{n-1}\|T_t x\|dt\\&\leqslant\frac{M_\beta}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}e^{-(\mathrm{Re}\lambda-\beta)t}t^{n-1}dt\|x\|\\&=M_\beta\frac{1}{(\mathrm{Re}\lambda-\beta)^n}\|x\|,\end{aligned}$$

这就是(3). 证毕.

定理 2 设$\{T_t | t\geqslant 0\}$是C_0类算子半群, 以A为母元,则在任何有限区间$[0,\alpha]$上,均匀地有

$$T_t = s\text{-}\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA\lambda R(\lambda)} \tag{4}$$

即当$x\in X$时,对任何$\varepsilon>0$,必有$N=N(x,\varepsilon)$,使得$\lambda>N$, $t\in[0,\alpha]$时,

$$\|T_t x - e^{t\lambda AR(\lambda)}x\| < \varepsilon.$$

注 由于$AR(\lambda)$是有界线性算子,所以定理2又可理解为$\{T_t\}$可以看作半群$\{T_t^\lambda\}$当$\lambda\to+\infty$时的极限,其中每个$\{T_t^\lambda\}$的母元是$\lambda AR(\lambda)$.

证 首先,由(3),取$M_\beta>1$,利用$AR(\lambda)=\lambda R(\lambda)-I$,得$\lambda>0$时,有

$$\|e^{tA\lambda R(\lambda)}\| = e^{-\lambda t}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}\| \leqslant e^{-\lambda t}\sum_0^\infty \frac{(t\lambda^2)^n}{n!}\|[R(\lambda)]^n\|$$

$$\leqslant M_\beta e^{-\lambda t} e^{\frac{t\lambda^2}{\lambda-\beta}} = M_\beta e^{t\frac{\beta\lambda}{\lambda-\beta}}.$$

由于$R(\lambda)$与T_t可交换,故$e^{-sA\lambda R(\lambda)}=e^{-s[\lambda^2 R(\lambda)-\lambda I]}$与$T_t$可交换,由是,若记$B_t=e^{tA\lambda R(\lambda)}$,则当$x\in\mathscr{D}(A)$时

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{B_{t-(s+h)}T_{s+h}-B_{t-s}T_s}{h}x\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{B_{t-(s+h)}-B_{t-s}}{h}T_{s+h}x+\lim_{h\to 0}B_{t-s}\frac{T_{s+h}-T_s}{h}x\\
&=\lim_{h\to 0}e^{(t-s)A\lambda R(\lambda)}\frac{e^{-hA\lambda R(\lambda)}-I}{h}T_{s+h}x\\
&\quad+\lim_{h\to 0}B_{t-s}\frac{T_{s+h}-T_s}{h}x\\
&=e^{(t-s)A\lambda R(\lambda)}[-A\lambda R(\lambda)T_s x+T_s Ax],
\end{aligned}$$

由$AR(\lambda)T_s=T_s R(\lambda)A$,立即得到

$$\frac{d}{ds}(e^{(t-s)A\lambda R(\lambda)}T_s x)=e^{(t-s)A\lambda R(\lambda)}T_s(A-A\lambda R(\lambda))x$$

由此，当 $t\in[0,\alpha]$时，必有 N_α，使得

$$\begin{aligned}&\|T_t x-e^{tA\lambda R(\lambda)}x\|\\&=\|e^{(t-s)A\lambda R(\lambda)}T_s x|_{s=t}-e^{(t-s)A\lambda R(\lambda)}T_s x|_{s=0}\|\\&=\left\|\int_0^t\frac{d}{ds}(e^{(t-s)A\lambda R(\lambda)}T_s x)ds\right\|\\&=\left\|\int_0^t e^{(t-s)A\lambda R(\lambda)}T_s(A-A\lambda R(\lambda))xds\right\|\\&\leqslant M_\beta^2\int_0^t\exp\left\{(t-s)\frac{\beta\lambda}{\lambda-\beta}+\beta s\right\}ds\|Ax-A\lambda R(\lambda)x\|\\&\leqslant N_\alpha\|Ax-A\lambda R(\lambda)x\|.\end{aligned}$$

由于 $x\in\mathscr{D}(A)$时，$AR(\lambda)x=R(\lambda)Ax$，利用引理 1 即知

$$\|T_t x-e^{tA\lambda R(\lambda)}x\|\to 0.$$

一般地，对 $x\in X$，$\varepsilon>0$，取 $y\in\mathscr{D}(A)$，使$\|y-x\|<q\varepsilon$. 而对 y，则有 λ_0，当$\lambda>\lambda_0$时，

$$\|T_t y-e^{tA\lambda R(\lambda)}y\|<\frac{\varepsilon}{2},\quad t\in[0,\alpha],$$

故只要 q 充分小，便有

$$\begin{aligned}\|T_t x-e^{tA\lambda R(\lambda)}x\|\leqslant&\|T_t y-e^{tA\lambda R(\lambda)}y\|\\&+(\|T_t\|+\|e^{tA\lambda R(\lambda)}\|)\|y-x\|<\varepsilon.\end{aligned}$$

定理证毕.

2.2.4 无穷小母元的特征

人们很自然地要问：什么样的算子 A 可以作为一个 C_0 类算子半群的无穷小母元？（A 是有界线性算子时，这个问题是平凡的.）下面是一个基本结果.

定理 1 (Hille-Yosida) 设 A 是 Banach 空间 X 上的稠定

线性算子，则 A 为某 C_0 类算子半群无穷小母元的充要条件是：存在常数 M 和 β，对于任何实数列 $\lambda_n\to+\infty$，满足

(i) 当 $\lambda_n>\beta$ 时，$R(\lambda_n)=(\lambda_n I-A)^{-1}$ 是有界线性算子；

(ii) 对任何 m，当 $\lambda_n>\beta$ 时

$$\|[R(\lambda_n)]^m\|\leqslant M\frac{1}{(\lambda_n-\beta)^m}.$$

证 必要性部分由 2.2.2 定理 1 和 2.2.3 引理 2 即得．今证充分性：设(i)，(ii)满足．由于

$$(\lambda_n I-A)R(\lambda_n)x=x,\quad x\in X,$$
$$R(\lambda_n)(\lambda_n I-A)x=x,\quad x\in\mathscr{D}(A),$$

可知当 $x\in\mathscr{D}(A)$ 时，

$$\|\lambda_n R(\lambda_n)x-x\|=\|R(\lambda_n)Ax\|\leqslant M\frac{\|Ax\|}{\lambda_n-\beta}\to 0\ (n\to+\infty),$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n R(\lambda_n)x=x,\quad x\in\mathscr{D}(A),$$

但 n 充分大时，$\|\lambda_n R(\lambda_n)\|\leqslant 2M$，且 $\overline{\mathscr{D}(A)}=X$，故

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n R(\lambda_n)x=x,\ x\in X,$$

由上式，对 $x\in\mathscr{D}(A)$，有

$$\lim_{n\to\infty}A\lambda_n R(\lambda_n)x=\lim_{n\to\infty}\lambda_n(\lambda_n R(\lambda_n)x-x)=\lim_{n\to\infty}\lambda_n R(\lambda_n)Ax=Ax.$$

作单参数算子半群 $T_t^{(n)}=e^{tA\lambda_n R(\lambda_n)}$，下面将证 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T_t^{(n)}$ 存在，它就是所求的 T_t．

先证 $R(\lambda_n)$ 与 $R(\lambda_m)$ 可交换．当 $x\in X$ 时，记 $\xi=R(\lambda_n)R(\lambda_m)x$，则 $x\in\mathscr{D}(A)$，而且

$$(\lambda_n I-A)\xi=(\lambda_n I-A)R(\lambda_n)R(\lambda_m)x=R(\lambda_m)x,$$

故 $\xi\in\mathscr{D}(A^2)$，而且

$$(\lambda_m I-A)(\lambda_n I-A)\xi=x,$$

即$(\lambda_n I-A)(\lambda_m I-A)\xi=x$，所以$\xi=R(\lambda_m)R(\lambda_n)x$，即$R(\lambda_n)R(\lambda_m)=R(\lambda_m)R(\lambda_n)$.

注意到$A\lambda_n R(\lambda_n)=\lambda_n^2 R(\lambda_n)-\lambda_n I$，$A\lambda_m R(\lambda_m)=\lambda_m^2 R(\lambda_m)-\lambda_m I$，故$T_t^{(n)}$与$T_t^{(m)}$可交换. 类似于2.2.3定理2，易知

$$\frac{d}{ds}(T_{t-s}^{(n)}T_s^{(m)}x)=T_{t-s}^{(n)}T_s^{(m)}(A\lambda_m R(\lambda_m)-A\lambda_n R(\lambda_n)),$$

而且

$$\|T_t^{(n)}x-T_t^{(m)}x\|=\left\|\int_0^t\frac{d}{ds}(T_{t-s}^{(n)}T_s^{(m)}x)ds\right\|$$

$$\leqslant\int_0^t\|T_{t-s}^{(n)}T_s^{(m)}\|ds\,\|A\lambda_m R(\lambda_m)x-A\lambda_n R(\lambda_n)x\|,$$

但是

$$\|T_t^{(n)}\|=\|e^{t(\lambda_n^2 R(\lambda_n)-\lambda_n I)}\|=e^{-\lambda_n t}\|e^{t\lambda_n^2 R(\lambda_n)}\|$$

$$\leqslant e^{-\lambda_n t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\lambda_n^2)^k}{k!}\|[R(\lambda_n)]^k\|\leqslant Me^{t\frac{\beta\lambda_n}{\lambda_n-\beta}},$$

因此

$$\|T_t^{(n)}x-T_t^{(m)}x\|$$

$$\leqslant M^2\int_0^t e^{s\frac{\beta-\lambda_m}{\lambda_m-\beta}+(t-s)\frac{\beta\lambda_n}{\lambda_n-\beta}}ds\,\|A\lambda_m R(\lambda_m)x-A\lambda_n R(\lambda_n)x\|.$$

由(1)可知，当$\alpha\in[0,\infty)$时，对任何$\varepsilon>0$，必有λ_0，当$\lambda_n>\lambda_0$时

$$\|T_t^{(n)}x-T_t^{(m)}x\|<\varepsilon,\quad t\in[0,\alpha],$$

故必有有界线性算子T_t，使得在任一有限区间$[0,\alpha]$上，均匀地成立着

$$\lim_{n\to\infty}\|T_t^{(n)}x-T_t x\|=0.$$

现在证明$\{T_t|t\geqslant 0\}$是一个算子半群：设$t,s>0$，则由

$$\lim_{n\to\infty}\|T_{t+s}^{(n)}x-T_{t+s}x\|=0,$$

又

$$\|T_{t+s}^{(n)}x-T_tT_sx\|\leqslant\|T_t^{(n)}(T_s^{(n)}-T_s)x\|+\|(T_t^{(n)}-T_t)T_sx\|$$

$$\leqslant Me^{t\frac{\beta\lambda_n}{\lambda_n-\beta}}\|(T_s^{(n)}-T_s)x\|+\|(T_t^{(n)}-T_t)T_sx\|\to 0,$$

因而 $T_{t+s}x=T_tT_sx(x\in X)$，即 $T_{t+s}=T_tT_s$.

再证$\{T_t\}$强连续：设 t_0 是给定的非负实数. 对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\alpha>t_0$ 及正整数 n_0，当 $n>n_0$ 时，

$$\|T_t^{(n)}x-T_tx\|<\frac{\varepsilon}{3},\quad t\in[0,\alpha].$$

设当 $|t-t_0|<\delta$ 时

$$\|T_tx-T_{t_0}x\|\leqslant\|T_tx-T_t^{(n)}x\|+\|T_t^{(n)}x-T_{t_0}^{(n)}x\|$$
$$+\|T_{t_0}^{(n)}x-T_{t_0}x\|,$$

由此可得

$$\|T_tx-T_{t_0}x\|\to 0\quad(\delta\to 0).$$

最后证明$\{T_t\}$的母元为A：因为

$$\frac{d}{dt}T_t^{(n)}x=T_t^{(n)}A\lambda_nR(\lambda_n)x,$$

故

$$T_t^{(n)}x-Ix=\int_0^t T_s^{(n)}A\lambda_nR(\lambda_n)\,xds,$$

令 $n\to+\infty$，对任何 $x\in X$，因为被积函数在任何有限区间上关于 s 均匀收敛于 T_sAx，所以当 $x\in\mathscr{D}(A)$时，有

$$T_tx-Ix=\int_0^t T_sAxds.$$

由此可知，$x\in\mathscr{D}(A)$时

$$\lim_{h\to 0}\frac{T_hx-Ix}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h T_sAxds=Ax,$$

所以$\{T_t\}$的母元 $A'\supset A$. 设$\{T_t\mid t\geqslant 0\}$的指标为 ω_0，取 λ_n，使 $\lambda_n>\max(\beta,\omega_0)$，由于

$$\mathscr{D}((\lambda_nI-A')^{-1})=X=\mathscr{D}((\lambda_nI-A)^{-1}),$$

所以必有 $A'=A$. 证毕.

对一些特殊的 C_0 类算子半群，其特征可写得更简洁些。

定义　设$\{T_t\mid t\geqslant 0\}$是算子半群，若存在 $\beta\geqslant 0$，使得

$$\|T_t\|\leqslant e^{\beta t}\quad (t\geqslant 0),$$

则称它为标准型算子半群.

定理 2　设 A 是 Banach 空间 X 上的稠定线性算子，则 A 为某标准型 C_0 类算子半群无穷小母元的充要条件是：存在正数 β，对任何实数列 $\lambda_n\to+\infty$，满足：

(i) 当 $\lambda_n>\beta$ 时，$R(\lambda_n)=(\lambda_n I-A)^{-1}$ 是有界线性算子；

(ii) 当 $\lambda_n>\beta$ 时，

$$\|R(\lambda_n)\|\leqslant\frac{1}{\lambda_n-\beta}.$$

证　设 A 是标准型 C_0 类算子半群的无穷小母元，由定理 1 知 (i) 成立；又设 $\|T_t\|\leqslant e^{\beta t}(t\geqslant 0)$，则对 $x\in X$，

$$\|R(\lambda_n)x\|=\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda_n t}T_t x\,dt\right\|\leqslant\int_0^\infty e^{(\beta-\lambda_n)t}dt\,\|x\|$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda_n-\beta}\|x\|,$$

故得 (ii). 反之，若 (i)，(ii) 满足，由定理 1 知 A 是某 C_0 类半群 $\{T_t\mid t\geqslant 0\}$ 的母元，为说明此半群是标准型的，考察 $T_t^{(n)}=e^{tA\lambda_n R(\lambda_n)}=e^{-t\lambda_n}e^{t\lambda_n^2 R(\lambda_n)}$，由 (ii) 易知

$$\|T_t^{(n)}\|\leqslant e^{-t\lambda_n}e^{t\lambda_n^2\frac{1}{\lambda_n-\beta}}=e^{\frac{\beta t\lambda_n}{\lambda_n-\beta}}.$$

由定理 1 的证明，可知 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T_t^{(n)}=T_t$，故

$$\|T_t\|\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\|T_t^{(n)}\|\leqslant\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\beta t\lambda_n}{\lambda_n-\beta}}=e^{\beta t}.$$ 证毕.

2.2.5　C_0 类压缩半群

C_0 类算子半群中，压缩算子半群是一类重要的对象。

定义 若半群$\{T_t|t\geqslant 0\}$中每个算子均是压缩算子，即$\|T_t\|\leqslant 1(t\geqslant 0)$，则称它为**压缩算子半群**，简称为**压缩半群**.

显然，压缩半群必是标准型的；反之，如$\{T_t|t\geqslant 0\}$是标准型的，即有$\beta\geqslant 0$，使$\|T_t\|\leqslant e^{\beta t}(t\geqslant 0)$，则$\{e^{-\beta t}T_t|t\geqslant 0\}$便是压缩半群.

由 2.2.4 定理 2 及其证明立即可得到

定理 1 设A是 Banach 空间X上稠定闭算子，则A是某C_0类压缩算子半群无穷小母元的充要条件是：对任何$\lambda>0$，均有$\lambda\in\rho(A)$，且$\lambda>0$时

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\lambda}.$$

特别地，下面将在 Hilbert 空间上考察压缩半群.

定义 设H是 Hilbert 空间，A是H上的稠定闭算子，如果对任何$x\in\mathscr{D}(A)$，

$$(Ax,x)+(x,Ax)\leqslant 0,$$

则称A为**耗散算子**.

定理 2 设A是 Hilbert 空间H上的稠定闭算子，则A是某C_0类压缩半群无穷小母元的充要条件是A为耗散算子，且$\mathscr{R}(I-A)=H$.

证 **必要性** 如果A为C_0类压缩半群$\{T_t|t\geqslant 0\}$的无穷小母元，由定理 1，$1\in\rho(A)$，故$\mathscr{R}(I-A)=H$. 设$x\in\mathscr{D}(A)$. 考察$f(t)=(T_tx,T_tx)$，由A的定义可知

$$f'(t)=(T_tAx,T_tx)+(T_tx,T_tAx).$$

由T_t的压缩性得$f(t)\leqslant f(0)$，故$f'(0)\leqslant 0$，这就是

$$(Ax,x)+(x,Ax)\leqslant 0,$$

即A是耗散算子.

充分性 设A耗散，$\mathscr{R}(I-A)=H$. 首先，若$\lambda>0$，$\lambda\in\rho(A)$，注意到$x\in\mathscr{D}(A)$时

$$(\lambda x - Ax, \lambda x - Ax)$$
$$= \lambda^2(x, x) - \lambda(Ax, x) - \lambda(x, Ax) + (Ax, Ax) \geqslant \lambda^2(x, x),$$

即得

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{1}$$

其次，如果 $x \in \mathscr{D}(A)$，$Ax = x$，则由耗散条件得 $(x, x) = 0$，故 $x = 0$，因此 $(I - A)^{-1}$ 存在，且是定义在 H 上的闭算子，这就是说 $1 \in \rho(A)$.

最后，如 $\lambda \in \rho(A)$，$\lambda > 0$，$0 \leqslant |\mu - \lambda| < \lambda$，则由(1)可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mu - \lambda)^n (\lambda I - A)^{-(n+1)}$$

按范数收敛，易知此即 $(\mu I - A)^{-1}$，故 $\mu \in \rho(A)$，由此及 $1 \in \rho(A)$ 可得 $\rho(A) \supset (0, \infty)$. 注意到(1)式，利用定理 1 即得 A 是某 C_0 类压缩半群的无穷小母元. 证毕。

§2.3 算子半群的应用

算子半群的理论，有着非常广泛的应用，不可能在本章中一一列举. 这一节只是提供几个简单的应用算子半群的例子. 下一节要介绍的遍历理论，也是算子半群在应用方面使人很感兴趣的领域.

2.3.1 Taylor 公式的推广

关于半群的表示，我们已得到 2.2.3 定理 2，在某些情况下，另一些形式也是便于应用的.

定理 1 设 $\{T_t \mid t \geqslant 0\}$ 是 Banach 空间 X 上的强连续压缩算子半群，则

$$T_t x = s\text{-}\lim_{h\to 0} e^{t\frac{T_h - I}{h}} x, \quad x \in X. \tag{1}$$

证　记 $A_h = \dfrac{T_h - I}{h}$，那末

$$\|e^{tA_h}\| = \|e^{-\frac{t}{h}I} e^{\frac{t}{h}T_h}\| \leqslant e^{-\frac{t}{h}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(\frac{t}{h}\right)^i \|T_h^i\| \leqslant 1.$$

当 $t \in [0, a]$ 时，对 $x \in \mathscr{D}(A)$，有

$$\|T_t x - e^{tA_h} x\| = \|e^{(t-s)A_h} T_s|_{s=t} x - e^{(t-s)A_h} T_s|_{s=0} x\|$$

$$= \left\| \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{(t-s)A_h} T_s x) ds \right\| = \left\| \int_0^t e^{(t-s)A_h} T_s (A - A_h) x dx \right\|$$

$$\leqslant \int_0^t \|(A - A_h)x\| ds \leqslant a \|(A - A_h)x\|,$$

其中 A 为 $\{T_t\}$ 的母元，因此，$h\to 0$ 时，上式右端趋于 0．但 $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$，$\|e^{tA_h}\| \leqslant 1$，所以，对一切 $x \in X$，

$$\lim_{h\to 0} \|T_t x - e^{tA_h} x\| = 0. \qquad \text{证毕.}$$

现在，考察 2.1.1 例 1 中讨论过的算子

$$(T_t x)(s) = x(t+s), \quad x \in C[0, +\infty).$$

显然，$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$ 是 $C[0, +\infty)$ 中的强连续压缩算子半群．由于

$$A_h x = \frac{1}{h}(T_h - I)x = \frac{1}{h}[x(s+h) - x(s)],$$

从而用差分符号

$$\Delta_h^{(1)} x = x(s+h) - x(s),$$

$$\Delta_h^{(n)} x = (\Delta_h^{(1)})^n x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k x(s+kh),$$

则(1)式化为

$$x(s+t) = \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{h}\right)^n \Delta_h^{(n)} x(s), \tag{2}$$

这里的极限对于 s 是一致的．由定理 1 的证明可见，对于任何有

限区间的 t 也是一致的.

(2) 式可以看作 Taylor 公式的推广. 由此，可以导出著名的 Weierstrass 定理.

实际上，设 $x(t)$ 是 $C[0,1]$ 中的元，令

$$x(t)=x(1),\ t\geqslant 1,$$

则把 $x(t)$ 延拓为 $C[0,+\infty)$ 中的元. 对任意的 $\varepsilon>0$，取 h 足够小，使

$$\left|x(t+s)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{t}{h}\right)^n\Delta_h^{(n)}x(s)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad (0\leqslant s<+\infty,\ 0\leqslant t\leqslant 1),$$

上式左端的无穷级数一致收敛 $(0\leqslant s<+\infty, 0\leqslant t\leqslant 1)$. 令 $s=0$，取 m 充分大，使

$$\left|\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{t}{h}\right)^n\Delta_h^{(n)}x(0)-\sum_{0}^{m}\frac{1}{n!}\left(\frac{t}{h}\right)^n\Delta_h^{(n)}x(0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

这就得到了 $x(t)$ 在 $[0,1]$ 上用多项式的一致逼近.

2.3.2 抽象 Cauchy 问题

设 X 为 Banach 空间，A 为线性算子，定义域为 $\mathscr{D}(A)$，值域为 $\mathscr{R}(A)$，$y_0\in X$，设有取值于 X 上的向量值函数 $y(t)$，满足

(i) $y(t)\in\mathscr{D}(A)\ (t>0)$，在任何 $[\alpha,\ \beta]\subset(0,\ +\infty)$ 上全连续①;

(ii) $y(t)$ 强可导;

(iii) $$\frac{d}{dt}y(t)=Ay(t); \tag{1}$$

① 这里的全连续（向量值函数的全连续）和普通实变函数中全连续概念定义相仿.

(iv) $\lim\limits_{t\to 0}\|y(t)-y_0\|=0$.

则称 $y(t)$ 是方程 $\frac{d}{dt}y(t)=Ay(t)$ 适合 Cauchy 条件 $y(0)=y_0$ 的解.

若解 $y(t)$ 还满足

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|y(t)\|=\omega<\infty, \tag{2}$$

则称 $y(t)$ 是正规 ω 型的解.

和普通方程的 Cauchy 问题可用 Laplace 变换讨论相仿，我们用单参数半群和积分变换的方法来研究抽象 Cauchy 问题.

定理 1　设 A 是闭的线性算子，其点谱 $\sigma_p(A)$ 在任何右半平面中不稠，则对每一个 $y_0\in X$，抽象 Cauchy 问题(1)至多只有一个正规型解.

证　设有两个解 $y(t)$, $z(t)$，则 $x(t)=y(t)-z(t)$ 是 $\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$ 适合 $x(0)=0$ 的解，而且是正规型的. 设它为 ω 型. 当 Re $\lambda>\omega$ 时，考察

$$s-\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-\lambda t}x(t)dt \tag{3}$$

其中的积分为向量值函数的 Riemann 积分. 极限(3)是存在的. 实际上，对任何 $\varepsilon>0$，必有 t_0, $t\geqslant t_0$ 时

$$\frac{1}{t}\log\|x(t)\|<\omega+\varepsilon,$$

即 $\|x(t)\|\leqslant e^{t(\omega+\varepsilon)}$，故当 Re$\lambda>\omega+\varepsilon$ 时

$$\|e^{-\lambda t}x(t)\|\leqslant e^{-(\mathrm{Re}\lambda-\omega-\varepsilon)t}\quad(t\geqslant t_0),$$

可见(3)中的极限存在，记此极限为

$$L(\lambda,x)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}x(t)dt. \tag{4}$$

对任何 $0<\alpha<\beta<\infty$，由于 A 是闭算子，所以（见1.3.3定理5）

$$\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}x'(t)dt=\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}Ax(t)dt=A\left\{\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}x(t)dt\right\},$$

但$\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}x'(t)dt=e^{-\lambda\beta}x(\beta)-e^{-\lambda\alpha}x(\alpha)+\lambda\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}x(t)dt$，令 $\alpha\to 0$，$\beta\to\infty$，即得

$$\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}x(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}x'(t)dt=A\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}x(t)dt.$$

这就是说，

$$AL(\lambda,x)=\lambda L(\lambda,x),\ \mathrm{Re}\lambda>\omega,$$

故 $L(\lambda,x)\neq 0$ 时，它必是 A 的特征向量，$\lambda\in\sigma_p(A)$.

取 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 中的开集 O，使 $\sigma_p(A)\cap O=\varnothing$，因此，$\lambda\in O$ 时

$$L(\lambda,x)=0.$$

任取 $f\in X^*$，有

$$f(L(\lambda,x))=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x(t))dt,$$

它是 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 上的解析函数，并且在 O 中为 0，故 $f(L(\lambda,x))\equiv 0$. 由普通数值函数 Laplace 变换的性质，有

$$f(x(t))=0,\quad f\in X^*,$$

故 $x(t)\equiv 0$. 证毕.

定理2 设 A 是 C_0 类算子半群$\{T_t\,|\,t\geqslant 0\}$ 的无穷小母元，则方程

$$\frac{d}{dt}y(t)=Ay(t)$$

的抽象 Cauchy 问题对每个 $y_0\in\mathscr{D}(A)$ 有唯一的解 T_ty_0.

证 由 §2.2 的讨论可知 T_ty_0 确为 Cauchy 问题的解，所需证明的仅是唯一性.

若有另一个解 $z(t)$，作 $x(t)=T_ty_0-z(t)$，它是满足 $x(0)=$

0 的解. 因为 $x(t)$强可导,故

$$\frac{d}{ds}T_{t-s}x(s) = \left(\frac{d}{ds}T_{t-s}\right)x(s) + T_{t-s}x'(s)$$
$$= -T_{t-s}Ax(s) + T_{t-s}x'(s) = 0,$$

由此可知 $T_{t-s}x(s)$取常值,所以

$$T_t x(0) = T_0 x(t),$$

即 $x(t) = T_t x(0) = 0$. 证毕.

定理 3 设 A 为稠定闭算子,对每个 $y_0 \in \mathscr{D}(A)$,抽象 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

有唯一的解 $y(t, y_0)$,满足$\|y(t, y_0)\| \leqslant C\|y_0\|e^{\omega t}$, $\sigma_p(A)$不充满任何右半平面,那末必有C_0 类算子半群$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$,使得 $T_t y_0 = y(t, y_0)$,而且$\{T_t\}$的母元为A,其指标不超过ω.

证 对任何 $y_0 \in \mathscr{D}(A)$,定义

$$T_t y_0 = y(t, y_0),$$

于是得到$\mathscr{D}(A)$上的一个有界线性算子,满足

$$\|T_t\| \leqslant Ce^{\omega t}\|y_0\|. \tag{6}$$

因此,又由$\overline{\mathscr{D}(A)} = X$,可把 T_t 看作X上的有界线性算子,其范数仍满足(6). 由于 $y(t, y_0)$是强连续的,故

$$\lim_{t \to t_0} \|T_t y_0 - T_{t_0} y_0\| = 0, \quad y_0 \in \mathscr{D}(A), \tag{7}$$

由此,利用$\overline{\mathscr{D}(A)} = X$ 及(7)、(6),可得

$$s\text{-}\lim_{t \to t_0} T_t = T_{t_0},$$

即$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$是强连续的.

由定理 1,易知当 $y_0 \in \mathscr{D}(A)$时, $\dfrac{dy(t)}{dt} = Ay(t)$的两个解

$$y(t+t_1, y_0), y(t, y(t_1, y_0))$$

满足同一个条件 $y(0)=y_0$，因而

$$y(t+t_1, y_0)=y(t, y(t_1, y_0)),$$

即

$$T_{t+t_1}y_0 = T_t(T_{t_1}, y_0). \tag{8}$$

由$\mathscr{D}(A)$的稠密性及 T_t 在$[0,\alpha]$中的均匀有界性，可知(8)对一切 $y_0\in X$ 成立，即 $\{T_t|t\geqslant 0\}$ 是一个半群. 由(6)知它的指标不超过 ω. 设这个半群的无穷小母元为 A'，余下的就是要证明 $A=A'$.

对 $x\in X$，记 $R(\lambda)x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_t x\,dt$. 对$y_0\in\mathscr{D}(A)$，因为 $y(t, y_0)$ 在任何$[\alpha,\beta]\subset(0,\infty)$上全连续，利用 A 是闭算子，有

$$A\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}y(t, y_0)\,dt=\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}Ay(t, y_0)\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}y'(t, y_0)dt=e^{-\lambda t}y(t, y_0)\Big|_\alpha^\beta+\lambda\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}y(t, y_0)\,dt.$$

对于 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$，令 $\alpha\to 0$, $\beta\to\infty$，由 A 的闭性和上式即得

$$A\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}y(t, y_0)\,dt=\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}y(t, y_0)\,dt-y_0,$$

即

$$(A-\lambda I)R(\lambda)y_0=-y_0. \tag{9}$$

今证(9)式对一切 $y_0\in X$ 成立. 事实上，存在 $y_n\in\mathscr{D}(A)$，$y_n\to y_0$，因为 $R(\lambda)$ 是有界的，所以 $R(\lambda)y_n\to R(\lambda)y_0$，又由

$$AR(\lambda)y_n=\lambda R(\lambda)y_n-y_n\to\lambda R(\lambda)y_0-y_0,$$

以及 A 的闭性，立即有

$$R(\lambda)y_0\in\mathscr{D}(A)，且\quad AR(\lambda)y_0=\lambda R(\lambda)y_0-y_0, \tag{10}$$

特别地，取 $\lambda\overline{\in}\sigma_p(A)$，由(10)可知$(\lambda I-A)^{-1}=R(\lambda)$.

由于 A' 是$\{T_t|t\geqslant 0\}$的母元，显然当 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 时，$(\lambda I-A')^{-1}=R(\lambda)$，从而 $A'=A$. 证毕.

§2.4 遍历理论

遍历理论(Ergodic Theory)也被译称**各态历经理论**，这是一个与其它数学分支，例如动力系统理论、概率论、泛函分析、数论、微分几何等有着密切联系的数学分支.

本节主要介绍算子半群的遍历定理. 但是，为了更好地理解这方面的结果，我们不得不先对古典的情况作一些讨论. 在§2.5中，我们还将应用Stone定理的结果，进一步给出von Neumann的平均遍历定理.

2.4.1 概述

遍历理论起源于动力学系统的研究. 按照经典力学，一个力学系统可用广义坐标 $q=(q_1,\cdots,q_n)$ 和共轭动量 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ 来描述. 用 H 表示该系统的 Hamilton 函数，即能量，那末，Hamilton 正则方程

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\cdots,n) \tag{1}$$

便是系统所遵守的微分方程. 特别，如果系统是保守的，$H=H(q,p)$，它不依赖于 t. 这个系统的态由点 $(q,p)=\omega$ 表示，所有可能的态组成 $2n$ 维空间中的集 Ω，称 Ω 为这个系统的**相空间**. 在 H，Ω 适合某些数学条件时，对 Ω 中的一点 ω_0，方程(1)有解 $\omega=\omega(t)$ $(t\geqslant t_0)$，满足初始条件 $\omega(t_0)=\omega_0$，称此解为一个轨道，它描述了系统的运动. 今由 $\omega=\omega(t)$ 在相空间中定义变换 $A_{t,t_0}\omega$ 如下:

$$A_{t,t_0}\omega=\omega(t).$$

容易看出 A_{t,t_0} 仅依赖于 $t-t_0$，记为 A_{t-t_0}，这样，得到 ω 中一个单参数半群.

任何一个在这个系统下可考察的物理量，就是Ω上的函数$f(\omega)$，称为**相函数**. 要研究物理量$f(\omega)$在这个系统下随时间变化的规律时，首先得有初始资料ω_0，其次解系统的方程，求出适合$\omega(t_0)=\omega_0$的解，这样才能完全掌握$f(\omega(t))$.

然而，对一些比较复杂的过程，例如统计物理中分子间的碰撞，热力学中物理的热量扩散等，往往很难实现上述两个步骤. 这是因为:

(1) 初始资料的确定几乎是不可能的. 因为在实际操作中不可能在$t=t_0$的时刻测得系统所有各处的值，而任何一个被测出的数据也只能是物理量对时间的平均，即量(设$t_0=0$)

$$f_T(\omega)=\frac{1}{T}\int_0^T f(A_t\omega)\,dt.$$

(2) 即使第一步有可能实现，当自由度n很大时，系统所满足的方程在求解时也会遇到很大的困难，所以更无从确定$A_t\omega$，当然也就无法知道物理量$f(A_t\omega)$了.

为了用其他方法来确定$f_T(\omega)$，物理学家根据实验进行总结，得到对某些运动体系来说，当T充分大时，量$f_T(\omega)$接近于一个确定的值，这个值等于该物理量在初态ω_0精确度允许范围内态ω处的值的平均. 换句话说，在ω空间上存在一个测度μ，使A_{t-t_0}关于这个测度保持不变，即设$t_0=0$时，对任何可测集M，$\mu(A_tM)=\mu(M)$，而且

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(A_t\omega)\,dt=\frac{1}{\mu(M)}\int_M f(\omega)\,d\omega. \tag{E}$$

Louville 曾证明在适当的条件下，例如保守系统的情况，能量E为守恒的，所有具有能量E的变动轨道必然落在$H(p,q)=E$上. 此时，不变测度可以取为

$$\mu(M)=\int_M\frac{d\sigma}{\overline{\operatorname{grad} H}},$$

其中，M是曲面 $H(p,q)=E$ 上的集，$d\sigma$ 表示面积元素.

$$\operatorname{grad} H=\left\{\Sigma\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial q_\nu}\right)^2\right]\right\}^{1/2}.$$

如果研究的是固定体积内分子的碰撞，显然可以取 μ 为体积，因为这时在任何时刻下体积不变，即

$$V(M)=V(A_tM).$$

数学中的遍历理论就是研究什么条件下等式 (E) 成立. 方程式(E) 就是遍历理论的数学形式. 适合条件 (E) 的态就叫**具有遍历性的态**.

我们再考察流体力学中的一个例子. 考虑在三维 Euclid 空间中有界域Ω内流动的不可压缩稳定流. 设通过该流，Ω的点ω在 n 单位时间后被移至Ω的点 ω_n:

$$\omega\to\omega_n \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots;\omega_0=\omega). \tag{2}$$

所谓**稳定**的假设意味着流的情况与时间的原点取法无关，所以具有群的性质:

$$(\omega_n)_m=\omega_{n+m}. \tag{3}$$

所谓**不可压缩**的意思是：假定集合 $A\subset\Omega$ 在 n 个单位时间后被移至 A_n，即 $A_n=\{\omega_n|\omega\in A\}$，当且仅当$A$(Lebesgue)可测时，$A_n$可测，且其 Lebesgue 测度满足

$$m(A_n)=m(A). \tag{4}$$

按流体力学的术语，那就是当给定的力学系统的可能状态用相空间Ω中的点ω来表示时，稳定不可压缩的条件即是指：随着时间变更所引起的迁移过程(2)满足条件(3)，(4).

用 Lebesgue 测度论的工具，研究 $n\to\infty$ 的情况，这里的所谓遍历性问题，就是研究在什么情况下，对任何的$x(\omega)\in L(\Omega)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}x(\omega_n)=\int_\Omega x(\omega)d\omega.$$

2.4.2 遍历定理

这一小节中，我们要介绍 G. D. Birkhoff 的**个别遍历定理**(定理 1)及 J. von Neumann 的**平均遍历定理**(定理 2).

考察迁移过程 2.4.1(2)，假设条件 2.4.1(3)，(4)满足.

定理 1 (Birkhooff) 设$x(\omega)\in L(\Omega)$，$m(\Omega)<\infty$，则对Ω中几乎所有的ω，存在有限函数 $x^*(\omega)$，使

$$x^*(\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}x(\omega_m), \tag{1}$$

而且

$$\int_\Omega x^*(\omega)d\omega=\int_\Omega x(\omega)d\omega. \tag{2}$$

此外，对几乎所有的ω，

$$x^*(\omega_k)=x^*(\omega)\quad(k=0,\pm1,\cdots). \tag{3}$$

证 只要对$x(\omega)\in L(\Omega)$是实函数的情况证明即可. 又(3)是(1)的显然推论，现在来证明(1)，(2).

首先，为了指出$x^*(\omega)$的存在，只需指出当$\alpha<\beta$时，如果用N表示能使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}x(\omega_m)>\beta,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}x(\omega_m)<\alpha$$

同时成立的ω的集合，则 $m(N)=0$. 为了证明$m(N)=0$，只要证明

$$\int_N x(\omega)d\omega\geqslant m(N)\beta. \tag{4}$$

因为只要用$-x(\omega)$代替 $x(\omega)$，同样可得$\int_N x(\omega)d\omega\leqslant m(N)\alpha$，再由$\alpha<\beta$ 即可得 $m(N)=0$.

现在，对整数 $a,b,a<b$，令

$$y_{a,b}(\omega)=\frac{1}{b-a}\sum_{a}^{b-1}x(\omega_m).$$

对于某个ω,如果存在满足

$$y_{a,b}(\omega)>\beta,\text{ 且当 } a\leqslant b'<b \text{ 时 } y_{a,b'}(\omega)\leqslant\beta$$

的整数a,b,则以a,b为端点的区间(a,b)称为对应于ω的特异区间. 因为当$a<a'<b$时有

$$y_{a,b}(\omega)=\frac{1}{b-a}\{(a'-a)y_{a,a'}(\omega)+(b-a')y_{a',b}(\omega)\},$$

所以,对应于同一个ω的两个特异区间(a,b),(a',b'),除了可能有一方包含另一方的情形以外,只能互不相交。当给定ω与正整数l时,如果(a,b)的长度$b-a\leqslant l$,而且是对应于ω的特异区间,但不被包含于其他的、长度不超过l的特异区间(对应于同一个ω的)之内的,我们便称(a,b)为对应于ω的l-特异区间. 由上所述,对应于给定的ω的l-特异区间,假如多于一个的话,必定是互不相交的.

由集N的定义,对于N中任意的点ω,只要l充分大,必定唯一地存在形如(a,b),其中$a\leqslant 0<b$的l-特异区间. 对于固定的l,以N_l表示N的点中有含0的l-特异区间和它对应的那些点的全体,那末

$$N_1\subset N_2\subset N_3\subset\cdots,\ \bigcup_{l=1}^{\infty}N_l=N.$$

把N_l表示为互不相交的$N_{p,q}$之并,

$$N_l=\bigcup_{q=1}^{l}\ \bigcup_{p=0}^{q-1}N_{p,q},$$

在此$N_{p,q}$,为N_l的点中有l-特异区间$(-p,-p+q)$和它对应的那些点的全体所成的集合.

但是,

$$y_{-p,-p+q}(\omega)=\frac{1}{q}\sum_{m=-p}^{-p+q-1}x(\omega_m)=y_{0,q}(\omega_{-p}),$$

故 $\omega\in N_{p,q}$ 与 $\omega_{-p}\in N_{0,q}$ 是等价的，从而由

$$m(N_{p,q})=m(N_{0,q}),$$

$$\int_{N_{p,q}}x(\omega)\,d\omega=\int_{\Omega}x(\omega)\chi_{N_{0,q}}(\omega_{-p})\,d\omega=\int_{N_{0,q}}x(\omega_p)\,d\omega,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{N_l}x(\omega)\,d\omega&=\sum_{q=1}^{l}\sum_{p=0}^{q-1}\int_{N_{p,q}}x(\omega)\,d\omega\\&=\sum_{q=1}^{l}\sum_{p=0}^{q-1}\int_{N_{0,q}}x(\omega_p)\,d\omega\\&=\sum_{q=1}^{l}q\int_{N_{0,q}}y_{0,q}(\omega)\,d\omega.\end{aligned}$$

如果 $\omega\in N_{0,q}$，那末，由于 $y_{0,q}(\omega)>\beta$，

$$\begin{aligned}\int_{N_l}x(\omega)\,d\omega&\geqslant\beta\sum_{q=1}^{l}q\,m(N_{p,q})\\&=\beta\sum_{q=1}^{l}\sum_{p=0}^{q-1}m(N_{p,q})=\beta m(N_l),\end{aligned}$$

因此，令 $l\to\infty$，即得

$$\int_N x(\omega)\,d\omega\geqslant\beta m(N).$$

其次，证明(2)式成立，对于非负函数列

$$\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{1}^{n}x(\omega_m)\right|\right\}_{n=1,2,\cdots}$$

应用 Fatou 引理，得

$$\int_{\Omega}\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}x(\omega_m)\right|d\omega\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}x(\omega_m)\right|d\omega$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\int_{\Omega}|x(\omega_m)|d\omega. \tag{5}$$

由(5)式，利用前一部分的结果及2.4.1(4)即得

$$\int_{\Omega}|x^*(\omega)|d\omega \leqslant \int_{\Omega}|x(\omega)|d\omega. \tag{6}$$

另一方面，记 $x_1(\omega)=\frac{1}{2}\left\{|x(\omega)|+x(\omega)\right\}$，$x_2(\omega)=\frac{1}{2}\left\{|x(\omega)|-x(\omega)\right\}$，则

$$x(\omega)=x_1(\omega)-x_2(\omega).$$

$x_1(\omega)$与$x_2(\omega)$均为非负且可积的，此外，

$$x^*(\omega)=x_1^*(\omega)-x_2^*(\omega),$$

因此，只需对 $x_1(\omega)$或$x_2(\omega)$证明(2)式即可，从而不妨假设有$x(\omega)\geqslant 0$. 这时，由(6)可得

$$\int_{\Omega}x^*(\omega)d\omega \leqslant \int_{\Omega}x(\omega)d\omega.$$

为证明相反的不等式，只要注意和(4)的证明相仿，可以得到：当$\alpha<\beta$时，对满足$\alpha<x^*(\omega)\leqslant\beta$的$\omega$全体所成的集合$N(\alpha,\beta)$，有

$$\alpha m(N(\alpha,\beta))\leqslant\int_{N(\alpha,\beta)}x(\omega)d\omega\leqslant\beta m(N(\alpha,\beta)),$$

由此，利用$x^*(\omega)$可积，得

$$\int_{\Omega}x^*(\omega)d\omega=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}N\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)$$

$$\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{N\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)}x(\omega)d\omega$$

$$=\int_{\Omega}x(\omega)d\omega. \qquad \text{证毕.}$$

定理2(von Neumann) 设 $x(\omega)\in L^2(\Omega)$，$m(\Omega)<+\infty$，则必存在 $x^*(\omega)\in L^2(\Omega)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}x(\omega_m)-x^*(\omega)\right|^2 d\omega=0, \tag{7}$$

而且(2),(3)成立。

证 关键是证明$\left\{\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}x(\omega_m)\right\}$是 $L^2(\Omega)$ 中的基本序列，这时，极限 $x^*\in L^2(\Omega)$，而且由逐项积分即得

$$\int_\Omega x^*(\omega)d\omega=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}\int_\Omega x(\omega_m)\,d\omega$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}\int_\Omega x(\omega)\,d\omega=\int_\Omega x(\omega)d\omega,$$

即(2)成立. 为此，作算子 $Ux(\omega)=x(\omega_1)$。显然，$\|Ux\|=\|x\|$，从而易知它是酉算子. 考察按算子范数有界的算子序列$\left\{\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}U^k\right\}$

简记 $x_n=\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}U^k x$，今证 $\{x_n\}$ 为 $L^2(\Omega)$ 中的基本序列.

由于 $L^2(\Omega)$ 是可分空间，$\left\{\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}U^k\right\}$一致有界，故对任何 $x\in L^2(\Omega)$，必有 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n'}\}$ 弱收敛于 x^*. 先证 $Ux^*=x^*$. 由于

$$\|Ux_{n'}-x_{n'}\|=\frac{1}{n'}\|U^{n'}x-x\|\leqslant\frac{2}{n'}\|x\|,$$

即知 $Ux_{n'}\xrightarrow{w}x^*$. 另一方面，由 $x_{n'}\xrightarrow{w}x^*$，所以 $Ux_{n'}\xrightarrow{w}Ux^*$，故 $Ux^*=x^*$，即(3)成立.

再证 $x^*=s-\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 因为 $x=x^*+(x^*-x)$，而 $Ux^*=x^*$，所以

$$x_n=x^*+\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}U^m(x-x^*),$$

因此只需证 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}U^m(x-x^*)=0$. 先设 $x\in\mathscr{R}(I-U)$. 显然,

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}U^m x=0. \tag{8}$$

由于 $\left\{\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}U^m\right\}$ 一致有界, 故(8)式对 $x\in\overline{\mathscr{R}(I-U)}$ 也是成立的.

现在, 只要证 $x-x^*\in\overline{\mathscr{R}(I-U)}$ 即可. 若不然, 存在 $f\in(L^2(\Omega))^*$, $f(x^*-x)=1$, $f|_{\overline{\mathscr{R}(I-U)}}=0$. 但是

$$U^m x-U^{m+1}x\in\mathscr{R}(I-U),$$

所以 $f(U^m x)=f(U^{m+1}x)$, 从而 $f\left(\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}U^m x\right)=f(x)$. 由 $x_{n'}\xrightarrow{w}x^*$,

得 $f(x^*)=f(x)$, 此为矛盾。证毕.

实际上, 用类似于上一定理的证明方法, 读者可以自行证明下述定理.

定理3 设 T 是 Banach 空间 X 到自身的有界线性算子,

$$\sup_n\frac{1}{n}\left\|\sum_{0}^{n-1}T^m\right\|<+\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|T^n\|=0,$$

如果对某个 $x\in X$, 点列 $\{x_n\}$ 含有弱收敛于 $x^*\in X$ 的子列, 这里 $x_n=\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}T^m x$, 那末必有

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x^*,$$

$$Tx^*=x^*.$$

关于定理 1, 2 中的(1)和 (7), 还可以进一步地写为下面的形式.

定理 4 在定理 1,2 的条件下,分别有

$$x^*(\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}x(\omega_m)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{0}^{-n+1}x(\omega_m)\quad (a.\,e.)$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left|\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}x(\omega_m)-x^*(\omega)\right|^2 d\omega$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left|\frac{1}{n}\sum_{0}^{-n+1}x(\omega_m)-x^*(\omega)\right|^2 d\omega=0.$$

换言之,即将来的时间平均等于过去的时间平均.

这个定理的证明从略.

2.4.3 推广的形式

这里我们对上段定理 1,2 的推广形式稍加介绍.

近代遍历理论的主要对象是研究可测变换的性质,特别是具有不变测度的可测变换的性质. 设$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 是一个全 σ- 有限的测度空间,φ 是 $\Omega\to\Omega$ 的变换,如果对每个 $B\in\mathscr{R}$, $\varphi^{-1}B$ 仍是$\mathscr{R}$中元时,称 φ 是**可测变换**. 如果 φ 是 Ω 上的双射,并且 φ 和它的逆变换 φ^{-1} 都是可测的,那末称 φ 是**双可测变换**. 对可测变换 φ,如果 $\mu(\varphi^{-1}B)=\mu(B)$ 对每个 $B\in\mathscr{R}$ 成立,那末称 φ 是**保测变换**,这时也称 μ 在 φ 下不变. 设 φ 是一个双可测变换,如果由 $\mu((\varphi^{-1}B\setminus B)\cup(B\setminus\varphi^{-1}B))=0$ 必能推出 $\mu(B)=0$ 或 $\mu(\Omega\setminus B)=0$,就称 φ 是**遍历变换**,这时也称 μ 是在 φ 下的**遍历测度**.

设 φ 是可测变换,对每个可测函数$f(\omega)$,作一列映射T^k: $T^k f(\omega)=f(\varphi^k\omega)$, $k=1,2,\cdots$, 以及平均序列 $A_m=\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}T^k$, 即 $A_n f(\omega)=\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}f(\varphi^k\omega)$, $n=1,2,\cdots$. 在这些记号下,点态遍历定理显

然可推广为：若φ为保测变换，$\mu(\Omega)<\infty$，则对任何 $f\in L(\Omega,\mathscr{R},\mu)$，函数列 $\{A_nf\}$ 必几乎处处收敛于一个函数 f^*；平均遍历定理可推广为：如果φ是保测变换，那末对任何 $f\in L^2(\Omega,\mathscr{R},\mu)$，$\{A_nf\}$ 必按范数收敛于一个函数 f^*；在上述两种情况下，几乎处处成立着 $f^*(\varphi\omega)=f^*(\omega)$，并且当 $\mu(\Omega)<\infty$时，都还能得到 $\int_\Omega f^*d\mu=\int_\Omega fd\mu$. 特别，当$\mu(\Omega)=1$，即$\mu$是概率测度，且$\varphi$是遍历变换的时候，就得到时间平均（极限）$f^*$ 几乎处处等于常数 $\int_\Omega fd\mu$(相平均). 这就给出了统计力学中基本假设的数学论证.

2.4.4 算子半群的遍历定理

点态和平均遍历定理还可不太困难地推广到有界线性算子的单参数半群$\{T_t|t\geqslant 0\}$的情况。这时，代替上述$\{A_n\}$的是考察适当条件下的极限：$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T_sds$. 此外，还要讨论$\frac{1}{t}\int_0^t T_sds$在$t\to 0$时极限的局部遍历定理，以及 $\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_sxds$ 当 $\lambda\to 0$ 或$\lambda\to\infty$时极限的 Abel 遍历定理等.

我们在本段将介绍两个 Abel 遍历定理. 为此，先复述一下 Abel 平均的概念.

设 $g(t)$是$(0,+\infty)$上定义的函数，$\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=g(+\infty)$存在，而且在任何有限区间$[0,T]$上，$g(t)$可积，则

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt=g(+\infty).$$

读者只要用微积分中简单的技巧即可证明这个结论. 我们知道，$\frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt$是$g(t)$在$[0,T]$上的算术平均，自然可以考虑其他形式的平均：设$f(t,T)$ $(0\leqslant t\leqslant T\leqslant+\infty)$为非负可测函数，$f(t,T)$在$[0,T]$

上有界，且对$(0,+\infty)$上任一局部可积函数$\tilde{g}(t)$，当$\lim\limits_{t\to+\infty}\tilde{g}(t)=g(+\infty)$存在时，

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{\int_0^T f(t,T)dt}\int_0^T f(t,T)\tilde{g}(t)dt=\tilde{g}(+\infty),$$

则称$f(t,T)$为一个权，而对$(0,\infty)$上任一局部可积函数g，称

$$\frac{1}{\int_0^T f(t,T)dt}\int_0^T f(t,T)g(t)dt \tag{1}$$

为$g(t)$在$[0,T]$上加权$f(t,T)$的平均.

例1　若$\lambda>0$，$f(t,T)=e^{-\lambda t}$，$g(t)$为有界可测函数，则(1)式即为

$$\lambda(1-e^{-\lambda T})^{-1}\int_0^T e^{-\lambda t}g(t)dt,$$

当$T\to+\infty$时，其极限为

$$\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}g(t)dt, \tag{2}$$

称(2)为$g(t)$在$(0,+\infty)$上的 Abel 平均，记

$$(\mathrm{A})\text{-}\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}g(t)dt,$$

这里，假定右边的极限存在.

现在把上述概念引入半群的理论.

定义　设$\{T_t|t\geq0\}$为 Banach 空间X上的强可测算子半群，如果存在$\eta>0$，对任何$x\in X$，

$$\int_\eta^{+\infty}e^{-\lambda t}\|T_tx\|dt<\infty,$$

而且存在$y\in X$，使

$$\lim_{\lambda\to0}\left\|\lambda\int_\eta^{+\infty}e^{-\lambda t}T_txdt-y\right\|=0,$$

则称$\{T_t|t\geq0\}$**在无限远处是强 Abel 遍历的**，且记

$$y = s\text{-}(\mathrm{A})\lim_{t\to\infty} T_t x.$$

定理 1 设$\{T_t \mid t\geqslant 0\}$为 Banach 空间$X$上强可测的算子半群，而且对每一$\lambda>0$，

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\|T_t\| dt < \infty.$$

又设当$x\in X$时，$s\text{-}\lim\limits_{\eta\to 0}\dfrac{1}{\eta}\displaystyle\int_0^{\eta} T_t x dt = x$. 若$\{T_t \mid t\geqslant 0\}$在无限远处是强 Abel 遍历的，记$px = s\text{-}(A)\lim\limits_{t\to+\infty} T_t x$，则

(i) p为有界线性算子，而且是平行投影，即$p^2=p$；

(ii) 对任何$t>0$，$pT_t = T_t p = p$；

(iii) $\mathscr{N}(p) = \overline{\mathscr{R}(A)}$，其中$A$为$\{T_t\}$的母元；

(iv) $\mathscr{R}(p) = \mathscr{N}(A)$，这个集合即$\{T_t\}$的不动点全体；

(v) $X = \mathscr{R}(p) + \mathscr{N}(p)$.

注 上述算子p就称作算子半群$\{T_t \mid t\geqslant 0\}$的**遍历投影**.

证 (i) 由假设，对任何$x\in X$，当$\mathrm{Re}\lambda>0$时

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t x dt$$

存在. 和§2.2 相仿，可以证明上述积分即$(\lambda I - A)^{-1}x$. 又由假设，对每个$x\in X$，$s\text{-}\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t x dt = px$，即$s\text{-}\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda(\lambda I - A)^{-1}x = px$，由共鸣定理，易知必有两常数$M,\delta$，使得

$$\lambda\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant M,\ 0<\lambda<\delta,$$

因此，p是有界算子，p的线性是显然的. 再由

$$\lambda\mu(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}x$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\mu(\mu I - A)^{-1}x - \frac{\mu}{\lambda-\mu}\lambda(\lambda I - A)^{-1}x,$$

令$\mu\to 0$，即得

$$\lambda(\lambda I - A)^{-1}px = px,$$

再令 $\lambda\to 0$, 便得 $p^2=p$. 证得(i).

(ii) 当 $x\in X$ 时, 对 $\xi>0$,

$$T_\xi px=s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda T_\xi\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_t x dt=s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_{t+\xi}x dt$$

$$=s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda e^{\lambda\xi}\int_\xi^{+\infty}e^{-\lambda\eta}T_\eta x d\eta$$

$$=px-\left(s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda e^{\lambda\xi}\int_0^{\xi}e^{-\lambda\eta}T_\eta x d\eta\right)=px,$$

故 $T_\xi p=p$, 类似地, 可以证明 $pT_t=p$. (ii)得证.

(iii) 今证明 $x\in\mathscr{D}(A)$时, $p(Ax)=0$. 由于

$$(\lambda I-A)^{-1}(\lambda I-A)x=x,$$

立即可得

$$\lambda(\lambda I-A)^{-1}Ax=\lambda^2(\lambda I-A)^{-1}x-\lambda x,$$

令 $\lambda\to 0$, 即得 $p(Ax)=0$, 故$\mathscr{N}(p)\supset\overline{\mathscr{R}(A)}$; 反之, 若 $py=0$, 则由

$$(\lambda I-A)(\lambda I-A)^{-1}y=y,$$

即得

$$\lambda(\lambda I-A)^{-1}y=A(\lambda I-A)^{-1}y+y.$$

故由 $py=0$, 得知

$$y=s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}(-A(\lambda I-A)^{-1}y),$$

所以 $y\in\overline{\mathscr{R}(A)}$, 即$\mathscr{N}(p)\subset\overline{\mathscr{R}(A)}$. (iii)得证.

(iv) 由(ii),

$$(T_t-I)px=0,\quad \forall x\in X,$$

立即可知 $px\in\mathscr{D}(A)$, 而且

$$Apx=\lim_{t\to 0}\frac{T_t-I}{t}px=0.$$

因此, $\mathscr{R}(p)\subset\mathscr{N}(A)$. 反之, 若 $y\in\mathscr{N}(A)$, 即$Ay=0$, 则由 §2.2可知

$$\frac{dT_t y}{dt}=T_t Ay=0,$$

因而 $T_t y$ 与 t 无关，于是存在 $y'\in X$，使 $T_t y=y'(t\geqslant 0)$. 但

$$y=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\eta}\int_0^\eta T_t y d\eta=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\eta}\int_0^\eta y' d\eta=y',$$

故 $T_t y=y$，所以 $\mathscr{N}(A)$ 中每一点为 T_t 的不动点. 另一方面，若 y 为 T_t 的不动点，则

$$\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_t y dt=y\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}dt=y,$$

故而 $py=y$，于是 $y\in\mathscr{R}(p)\subset\mathscr{N}(A)$，这就是说 $\mathscr{N}(A)$ 是 T_t 的不动点集合. 上面顺便还证明了 $y\in\mathscr{N}(A)$ 时 $py=y$，故 $\mathscr{N}(A)\subset\mathscr{R}(p)$，所以 $\mathscr{N}(A)=\mathscr{R}(p)$. (iv) 得证.

(v) 对 $x\in X$，写 $x=px+(x-px)$. 因为 $p(x-px)=px-p^2x=0$，故 $x-px\in\mathscr{N}(p)$. 又 $px\in\mathscr{R}(p)$，此即 X 中任何元素必为 $\mathscr{R}(p)$ 与 $\mathscr{N}(p)$ 中元素的线性组合. 又若 X 中某元素 x 有两种分解

$$x=x_1+x_2=x_1'+x_2',$$

其中 $x_1,x_1'\in\mathscr{R}(p)$，$x_2,x_2'\in\mathscr{N}(p)$，则由 $x_1-x_1'=x_2-x_2'$ 可知

$$x_1-x_1'\in\mathscr{R}(p)\cap\mathscr{N}(p),$$

但由 $x_1-x_1'\in\mathscr{R}(p)$ 得 $x_1-x_1'=py$，y 是 X 中某元素，再由于 $p(x_1-x_1')=0$ 得 $p^2y=0$，故 $py=0$，从而 $x_1=x_1'$，即 X 中每个元素的分解是唯一的. 证毕.

注 在定理 1 中若去掉假设 $\lim\limits_{\eta\to 0}\frac{1}{\eta}\int_0^\eta T_t x dt=x$ 在 X 上处处成立，则除去需把结论 (iii) 改为 $\mathscr{N}(p)\subset\overline{\mathscr{R}(A)}$ 而外，(i)，(ii) (iv)，(V) 均成立.

下面的定理进一步讨论了无穷远处强 Abel 遍历的条件.

定理 2 设 $\{T_t\mid t\geqslant 0\}$ 为 Banach 空间上有界线性算子的强可测半群，对任何 $\lambda>0$，

$$\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\|T_t\|dt<+\infty,$$

而且对任何 $x\in X$,

$$s\text{-}\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\eta}\int_0^\eta T_t x dt = x.$$

则下列三个条件等价

(i) $\{T_t\}$ 在无穷远处为强 Abel 遍历的;

(ii) 当 $0<\lambda<1$ 时, $\lambda\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant M$, 而且

$$X=\overline{\mathscr{R}(A)}+\mathscr{N}(A);$$

(iii) 对每个$x\in X$, 集合$\{\lambda(\lambda I-A)^{-1}x\,|\,0<\lambda<1\}$是弱列紧集.

证 在定理的假设下, 设 $\mathrm{Re}\lambda>0$, 对 $x\in X$, 作

$$R(\lambda)x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_t x dt.$$

与 §2.2 相仿, 可以证明 $R(\lambda)$ 为有界算子, 而且

$$(\lambda I-A)R(\lambda)x=x\,(x\in X);\quad R(\lambda)(\lambda I-A)x=x\ (x\in\mathscr{D}(A)),$$

换言之, $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$.

先证(ii)⇒(i) 设(ii)成立, 当 $x\in\mathscr{D}(A)$时,

$$\lambda R(\lambda)x=R(\lambda)Ax+x,$$

故当 $x\in\mathscr{N}(A)$时,

$$\lambda R(\lambda)x=x,$$

因而

$$s\text{-}(A)\lim_{t\to+\infty}T_t x=s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda R(\lambda)x=x.$$

若 $x\in\mathscr{R}(A)$, 则必有 $y\in X$, 使 $x=Ay$. 由

$$\lambda^2 R(\lambda)y=\lambda R(\lambda)Ay+\lambda y,$$

令 $\lambda\to 0$, 注意到$\|\lambda R(\lambda)\|\leqslant M$, 即得

$$s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda R(\lambda)x=0.$$

若 $x\in\overline{\mathscr{R}(A)}$, 由上式易知$\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda R(\lambda)x=0$. 由于(ii), 对 $x\in X$, 必有$x_1\in\overline{\mathscr{R}(A)}$, $x_2\in\mathscr{N}(A)$, 使 $x=x_1+x_2$, 于是

$$s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda R(\lambda)x = s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda R(\lambda)x_1 + s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda R(\lambda)x_2 = x_2.$$

这就证得了(i).

(i)⇒(ii) 由定理1，当(i)成立时，必有$\delta>0$及$M_1>0$，使得

$$\lambda\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant M_1,\ 0<\lambda<\delta.$$

但是，当$1>\lambda\geqslant\delta$时，

$$\lambda\|R(\lambda)\|\leqslant\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\|T_t\|dt\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-\delta t}\|T_t\|dt.$$

取$M=\max\left(M_1,\int_0^{+\infty}e^{-\delta t}\|T_t\|dt\right)$，即得(ii).

(i)⇒(iii) 显然.

(iii)⇒(i) 对每个固定的x，记$W(x)=\{\lambda R(\lambda)x\,|\,0<\lambda<1\}$. 由于$W(x)$是弱列紧的，由共鸣定理，即得$W(x)$是有界集，再次应用共鸣定理，即得$M<\infty$，使得

$$\sup_{0<\lambda<1}\|\lambda R(\lambda)\|\leqslant M.$$

利用$W(x)$的弱列紧性，必存在一列$\{\lambda_n\}$，$0<\lambda_n<1$，及$y\in X$，使得对任何$f\in X^*$，成立着

$$\lim_{n\to\infty}f(\lambda_n R(\lambda_n)x)=f(y). \tag{3}$$

现在，先证明

$$\lambda R(\lambda)y=y\quad(\lambda>0). \tag{4}$$

实际上，对任何$\lambda>0$，取充分大的n，使$0<\lambda_n<\lambda$，由

$$[\lambda(\lambda I-A)^{-1}-I]\lambda_n(\lambda_n I-A)^{-1}x$$

$$=\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda}[\lambda R(\lambda)-\lambda_n R(\lambda_n)]x, \tag{5}$$

注意到$n\to\infty$时，(5)的右边强收敛于0，再注意到(3)，即可由(5)得$\lambda(\lambda I-A)^{-1}y-y=0$，亦即$[\lambda R(\lambda)-I]y=0$，这就是(4). 由(4)得到

$$\lambda R(\lambda)x = y + \lambda R(\lambda)(x-y). \tag{6}$$

为证明(i)，只要证明当 $\lambda\to 0$ 时，(6)右边第二项强收敛于 0 即可.

记 $X_1=[I-R(1)]X$. 当 $v\in X_1$ 时，必有 u，使得 $v=[I-R(1)]u$. 类似于(5)，有

$$\lambda R(\lambda)v=\frac{\lambda}{\lambda-1}[\lambda R(\lambda)u-R(1)u],$$

因此，当 $\lambda\to 0$ 时，$s\text{-}\lim\lambda R(\lambda)v=0$. 又由于 $\|\lambda R(\lambda)\|\leqslant M$，故对 $v\in\overline{X}_1$，有

$$s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda R(\lambda)v=0. \tag{7}$$

由(7)式可知，只要证得 $x-y\in\overline{X}_1$ 即可. 若不然，由 Hahn-Banach 定理，必有 $f\in X^*$，使

$$f(x-y)=1,\ f|_{\overline{X}_1}=0.$$

因为 $x-R(1)x\in X_1$，故 $f(x)=f(R(1)x)$. 但 $R(1)\lambda R(\lambda)=\frac{\lambda}{1-\lambda}[R(\lambda)-R(1)]$，

因而

$$f(\lambda R(\lambda)x)=f(R(1)\lambda R(\lambda)x)$$
$$=\frac{1}{1-\lambda}[f(\lambda R(\lambda)x)-\lambda f(R(1)x)],$$

由是，$f(\lambda R(\lambda)x)=f(R(1)x)=f(x)$. 在上式中令 $\lambda\to 0$，即得 $f(y)=f(x)$，此为矛盾. 这样，$s\text{-}\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda R(\lambda)(x-y)=0$，由(6)即得

$$s\text{-}\lim_{\lambda\to 0}\lambda R(\lambda)x=y. \qquad \text{证毕.}$$

§2.5　单参数算子群，Stone定理

算子群当然是一类特殊的算子半群。本节在一定的限制下，研究了半群成为群的条件；其次，本节介绍了在理论上和应用中有

着重要意义的 Stone 定理，给出了这个定理的两个证明；最后，我们还将给出 Stone 定理在平稳随机过程和平均遍历定理中的应用.

2.5.1 半群成为群的条件

本段利用半群方法来讨论强连续的单参数算子群．我们所关心的是满足下列条件的有界线性算子族 $\{T_t \mid -\infty<t<+\infty\}$：

(i) $T_0=I,\ T_{t+s}=T_tT_s\quad(-\infty<t,s<+\infty)$；

(ii) $\quad s\text{-}\lim\limits_{t\to t_0} T_t=T_{t_0}\quad(-\infty<t_0<+\infty)$；

(iii) 存在 $\beta>0$，使得 $\|T_t\|\leqslant e^{\beta|t|}(-\infty<t<+\infty)$.

对于单参数算子群，我们也用

$$Ax=s\text{-}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T_h-I)x \tag{1}$$

作为无穷小母元 A 的定义．当然，A 的定义域是使(1)式右端极限存在的 x 的全体.

类似于 2.2.4 定理 2，我们有如下结果：

定理 1 设 A 是 Banach 空间 X 上稠定线性算子，则 A 是满足(i)，(ii)，(iii)的某算子群的母元的充要条件是存在正数 β，对任何实数列 $\lambda_n\to\infty$，满足

(i) 当 n 充分大时，$R(\lambda_n)=(\lambda_nI-A)^{-1}$ 为有界线性算子；

(ii) 当 $|\lambda_n|>\beta$ 时，$\|R(\lambda_n)\|\leqslant\dfrac{1}{|\lambda_n|-\beta}$.

注 必要性 对 $\lambda_n\to+\infty$，由 2.2.4定理 2，考察半群 $\{T_t \mid t\geqslant 0\}$ 即得(i)，(ii)，因此，不妨设 $\lambda_n\to-\infty$．为此，只要考察半群 $\{\hat{T}_t \mid$ $t\geqslant 0\}$，其中 $\hat{T}_t=T_{-t}$，今证其母元为 $\hat{A}=-A$

$=Ax+(-Ax)=0$，

即 $\{T_t\hat{T}_t\}$ 的母元在一稠密子集上为 0，又 $T_t\hat{T}_t$ 是有界算子，故必有 $T_t\hat{T}_t=e^{t\cdot 0}=I$．证毕.

$$\|T_h x_h - \hat{A}x\| = \|T_h x_h - T_h\hat{A}x + T_h\hat{A}x - \hat{A}x\|$$
$$\leqslant \|T_h\|\|x_h - \hat{A}x\| + \|(T_h - I)\hat{A}x\|.$$

当 $h\searrow 0$时，上式右端趋于 0. 从而当 $x\in\mathscr{D}(\hat{A})$时

$$\hat{A}x = s\text{-}\lim_{h\searrow 0} T_h\left\{\frac{1}{h}(T_{-h} - I)\right\}x$$
$$= s\text{-}\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}(I - T_h)x = -Ax.$$

同样可知，$x\in\mathscr{D}(A)$时，$Ax = -\hat{A}x$，从而 $\hat{A} = -A$.

对$\{\hat{T}_t | t\geqslant 0\}$，利用 2.2.4 定理 2，即知 $\lambda_n\to -\infty$时，(i)，(ii)成立.

充分性 只要在(i)，(ii)条件下，证明以 A 为母元的算子半群$\{T_t | t\geqslant 0\}$及以$\hat{A} = -A$ 为母元的算子半群$\{\hat{T}_t | t\geqslant 0\}$ 满足 $T_t\hat{T}_t = \hat{T}_t T_t = I\ (t>0)$即可. 任意取一列实数 $\lambda_n\to +\infty$，然后，我们类似于 2.2.4 定理 1，作 $T_t^{(n)} = e^{tA\lambda_n R(\lambda_n)}$，$\hat{T}_t^{(n)} = e^{-tA\lambda_n R(\lambda_n)}$，则有

$$T_t x = s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_t^{(n)}x,$$
$$\hat{T}_t x = s\text{-}\lim_{n\to\infty}\hat{T}_t^{(n)}x,$$

而且

$$\|T_t\hat{T}_s x - T_t^{(n)}\hat{T}_s^{(n)}x\|$$
$$\leqslant \|T_t\hat{T}_s x - T_t^{(n)}\hat{T}_s x\| + \|T_t^{(n)}\hat{T}_s x - T_t^{(n)}\hat{T}_s^{(n)}x\|$$
$$\leqslant \|(T_t - T_t^{(n)})\hat{T}_s x\| + \|T_t^{(n)}\|\|(\hat{T}_s - \hat{T}_s^{(n)})x\|\to 0\ (n\to\infty).$$

同样，$\|\hat{T}_s T_t x - \hat{T}_s^{(n)} T_t^{(n)}x\|\to 0\ (n\to\infty)$. 但因

$$(\lambda_n I - A)^{-1},\quad (\lambda_n I + A)^{-1}$$

可交换，故 $T_t^{(n)}$与 $\hat{T}_s^{(n)}$可交换，从而由上证，T_t 与 $\hat{T}_s$ 可交换. 于是$\{T_t\hat{T}_t | t\geqslant 0\}$成为半群. 当 $x\in\mathscr{D}(A)$时

$$s\text{-}\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}(T_h\hat{T}_h - I)x$$

$$= s\text{-}\lim_{h\searrow 0}\hat{T}_h\frac{1}{h}(T_h - I)x + s\text{-}\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}(\hat{T}_h - I)x$$

$$=Ax+(-Ax)=0,$$

即$\{T_t\hat{T}_t\}$的母元在一稠密子集上为0,又$T_t\hat{T}_t$是有界算子,故必有$T_t\hat{T}_t=e^{t\cdot 0}=I$. 证毕.

2.5.2 单参数酉算子群的 Stone 定理

本段讨论一类特殊而重要的算子群:单参数酉算子群.

设H是 Hilbert 空间, H 上的单参数酉算子族 $\{U_t|-\infty<t<+\infty\}$满足

$$U_tU_s=U_{t+s}(-\infty<t,s<+\infty),U_0=I,$$

则称$\{U_t\}$为**单参数酉算子群**.

对单参数酉算子群$\{U_t\}$,显然有

$$U_t=U_{-t}^{-1}=U_{-t}^*.$$

定理 1(Stone) 设 $\{U_t|-\infty<t<+\infty\}$是Hilbert空间$H$上的强连续单参数酉算子群,则必存在谱系$\{E_\lambda|-\infty<\lambda<+\infty\}$,使

$$U_t=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\lambda}dE_\lambda, \tag{1}$$

且无穷小母元 $A=iB$,其中

$$B=B^*=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE_\lambda. \tag{2}$$

证一 因为$\{U_t|t\geqslant 0\}$是(C_0)类算子半群,故无穷小母元A是稠定闭算子,当 $x\in\mathscr{D}(A)$时,

$$\frac{dU_tx}{dt}=AU_tx=U_tAx. \tag{3}$$

(3)式对 $t\leqslant 0$ 也是成立的. 实际上,设$t<0$,取 $t_0<t$,记$\tau=t-t_0$,对$y\in\mathscr{D}(A)$,由$\frac{U_{t+h}-U_t}{h}y=U_{t_0}\left(\frac{U_{\tau+h}-U_\tau}{h}\right)y$可知$s\text{-}\lim\limits_{h\to 0}\frac{U_{t+h}-U_t}{h}y$存在, 令 $x=U_{t_0}y$,于是

$$s\text{-}\lim_{h\to 0}\frac{U_{t+h}-U_t}{h}y=s\text{-}\lim_{h\to 0}\frac{U_{\tau+h}-U_\tau}{h}x=AU_\tau x=AU_ty.$$

又因 $t<0$ 时，$AU_{-t}(U_t y)=U_{-t}AU_t y$，故

$$U_t Ay=AU_t y,$$

这就证得(3)对 $-\infty<t<+\infty$，$x\in\mathscr{D}(A)$ 成立.

由于 $x\in\mathscr{D}(A)$ 时，在(3)中取 $t=0$，得

$$Ax=\frac{d}{dt}U_t x\Big|_{t=0},$$

因而易得 $A=-A^*$，故 $B^*=-iA=B$，即 B 是自共轭算子. 由谱分解定理，存在谱系 $\{E_\lambda\}$，使得

$$B=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE_\lambda,$$

作 $V_t=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\lambda}dE_\lambda$，易知这是一个强连续单参数酉算子群，今证其无穷小母元为 A. 事实上，若 $x\in\mathscr{D}(A)$，则

$$\|x\|^2+\|Ax\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\lambda^2)d\|E_\lambda x\|^2<\infty,$$

利用 Lebesgue 控制收敛定理，即得 $x\in\mathscr{D}(A)$ 时

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{V_h-I}{h}x-Ax\right\|^2=\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{e^{ih\lambda}-1}{h}-i\lambda\right|^2 d\|E_\lambda x\|^2$$
$$=0.$$

故若 A' 为 $\{V_t|0\leqslant t<+\infty\}$ 的无穷小母元，则 $\mathscr{D}(A')\supset\mathscr{D}(A)$，且当 $x\in\mathscr{D}(A)$ 时，由上式得 $Ax=A'x$，即 A' 是 A 的扩张. 如前证明，记 $B'=iA'$，则 B' 是对称算子，且是 B 的扩张，因此只有 $B'=B$，即 $A=A'$. 既然 U_t 与 V_t 有相同的母元，利用母元与单参数半群的对应性质，立即得到 $t\geqslant 0$ 时，$U_t x=V_t x$. 再由 $U_{-t}=U_t^*$，$V_{-t}=V_t^*$，得 $U_t=V_t(-\infty<t<+\infty)$. 证毕.

鉴于这个定理的重要性，我们再给出一个不利用算子半群，而用 Bochner 定理的证明方法.

证二 对任何 $x,y\in H$，作

$$F_{x,y}(t)=(U_t x,y)\quad(-\infty<t<+\infty). \tag{4}$$

取 $x\in H$, $\|x\|=1$, 对任何 $t_1,\cdots,t_n$ 和任何一组复数 $\xi_1,\cdots,\xi_n$, 有

$$\sum_{i,j}F_{xx}(t_i-t_j)\ \xi_i\bar{\xi}_j=\sum_{i,j}(U_{t_i-t_j}x,x)\xi_i\bar{\xi}_j$$

$$=\sum_{i,j}(U_{t_i}x,U_{t_j}x)\xi_i\bar{\xi}_j$$

$$=\|\sum_i\xi_iU_{t_i}x\|^2\geqslant 0,$$

即 $F_{xx}(t)$ 是正定泛函. 由 U_t 的强连续性又可知 $F_{xx}(t)$ 是 t 的连续函数, 并且 $F_{xx}(0)=\|x\|=1$. 由Bochner定理知道必定有 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加右连续函数 μ_x: $\mu_x(-\infty)=0$, $\mu_x(+\infty)=1$, 且

$$F_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}d\mu_x(\lambda).$$

一般地, 对任何 x,y, 由等式

$$F_{xy}(t)=(U_tx,y)=\frac{1}{4}\Big\{(U_t(x+y),x+y)$$

$$-(U_t(x-y),x-y)+\frac{1}{i}[(U_t(x+iy),x+iy)$$

$$-(U_t(x-iy),x-iy)]\Big\},$$

立即知道

$$F_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}d\mu_{xy}(t),$$

其中, $\mu_{xy}(t)=\frac{1}{4}\Big[\mu_{x+y}(t)-\mu_{x-y}(t)+\frac{1}{i}(\mu_{x+iy}(t)-\mu_{x-iy}(t))\Big]$, $\mu_{xy}(t)$ 是有界变差函数.

对固定的 t, $F_{x,y}(t)$ 是 x,y 的双线性有界泛函, 因而由表示的唯一性易知, 对固定的 t, $\mu_{xy}(t)$ 也是 x,y 的双线性有界泛函, 因而存在有界线性算子 E_t; 使

$$\mu_{x,y}(t)=(E_tx,y)\quad(-\infty<t<+\infty),$$

由直接验证可知 $\{E_t\ -\infty<t<+\infty\}$ 是一个谱系. 于是, 由

$$(U_t x, y) = F_{x,y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d(E_\lambda x, y),$$

得到(1)式. 证毕.

在 Stone 定理中，要求$\{U_t\}$强连续，实际上，如果单参数酉算子群$\{U_t | -\infty < t < +\infty\}$弱连续时，必是强连续的. 这是因为对$x \in H$，当 $h \to 0$ 时

$$\|U_h x - x\|^2 = \|U_h x\|^2 - (U_h x, x) - (x, U_h x) + \|x\|^2.$$
$$\to 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0.$$

von Neumann 证明了在可分 Hilbert 空间中，单参数酉算子群的强连续性可以由弱可测性导出，这个结果还能推广到可分的 Banach 空间

定理 2 设X是可分的 Banach 空间，$\{U_t | t>0\}$是X上弱可测的压缩算子半群，则它必是强连续的.

证 对任何 $x \in X$，$U_t x$ 弱可测. 因为X可分，由 1.2.2 的定理 2，$U_t x$ 是强可测的. 设 $0 < a < \eta < b < \xi$，且 $b < \xi - \varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$，由于 $U_\xi x = U_\eta (U_{\xi-\eta} x)$，按 η 取 Bochner 积分，得到

$$(b-a)(U_{\xi\pm\varepsilon} - U_\xi)x = \int_a^b U_\eta (U_{\xi\pm\varepsilon-\eta} - U_{\xi-\eta}) x d\eta, \text{令 } \xi - \eta = \tau$$

得到

$$(b-a)\|(U_{\xi\pm\varepsilon} - U_\xi)x\| \leqslant \int_{\xi-b}^{\xi-a} \|(U_{\tau\pm\varepsilon} - U_\tau)x\| d\tau.$$

对任何 $\delta > 0$，可取有限值函数 v_t，使

$$\int_{\xi-b-\varepsilon}^{\xi-a+\varepsilon} \|U_\tau x - v_\tau\| d\tau < \delta,$$
$$\|v_t\| \leqslant 2\|U_t x\|,$$

注意到对于有限值函数 v_t，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\xi-b}^{\xi-a} \|v_{\tau\pm\varepsilon} - v_\tau\| d\tau = 0,$$

由此可得

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|(U_{\xi\pm\varepsilon}-U_{\xi})x\|=0$. 证毕.

2.5.3 Stone 定理的应用：平稳随机过程

设 $x(t)(-\infty<t<+\infty)$ 为一族随机变量，作这些随机变量的线性组合

$$\bar{x}=\sum_{1}^{n}a_{\nu}x(t_{\nu}),$$

其全体按通常的加法及数乘成为线性空间. 在此线性空间上定义双线性泛函

$$(\bar{x},\bar{y})=E(\bar{x}\bar{y}), \tag{1}$$

这里 E 表示数学期望. 显然, $(\bar{x},\bar{x})=0$, 当且仅当 $E(|\bar{x}|^2)=0$, 即 $P(\bar{x}\neq 0)=0$, 其中 P 表示概率, 此时, 视 $\bar{x}=0$. 由此, 按(1)得到一个内积空间 H_0, 将它完备化, 成为一个 Hilbert 空间, 记为 H. 称

$$(x(t_1),x(t_2))=B(t_1,t_2)$$

为随机过程的相关系数. 若 $B(t_1,t_2)$ 只与 t_1-t_2 有关, 则称 $x(t)$ 为(弱)平稳. 如果

$$\lim_{t\to 0}E(|x(t)-x(0)|^2)=0,$$

则称此平稳过程为连续的.

下面, 我们仅讨论连续的平稳过程: 在 H_0 中定义 U_a 如下:

$$U_a\left(\sum_{1}^{n}c_{\nu}x(t_{\nu})\right)=\sum_{1}^{n}C_{\nu}x(t_{\nu}+a). \tag{2}$$

称 U_a 为时间的平移算子, 它们显然组成一个单参数群. 当 $\bar{x}=\sum\limits_{1}^{n}c_{\nu}x(t_{\nu})\in H_0$ 时,

$$(U_a\bar{x},U_a\bar{x})=\left(U_a\sum_{1}^{n}c_{\nu}x(t_{\nu}),\ U_a\sum_{1}^{n}c_{\nu}x(t_{\nu})\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j (x(t_i - a), x(t_j + a))$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j (x(t_i), x(t_j)) = (\bar{x}, \bar{x}),$$

即 U_a 为 H_0 上的等距算子，易知 U_a 可以延拓为 H 上的酉算子. 容易看出 $U_a^{-1} = U_{-a}$，$\{U_a | -\infty < a < +\infty\}$ 为 H 上的单参数酉算子群.

由于我们讨论的过程是连续的，故对任何 $\bar{x} = \sum_{1}^{n} c_\nu x(t_\nu)$，

$$\lim_{a \to 0} \| U_a \bar{x} - U_0 \bar{x} \| = \lim_{a \to 0} \left\| \sum_{1}^{n} c_\nu (U_a x(t_\nu) - U_0 x(t_\nu)) \right\|$$

$$\leqslant \sum_{1}^{n} |c_\nu| \lim_{a \to 0} \| U_a x(t_\nu) - U_0 x(t_\nu) \|$$

$$= \sum_{1}^{n} |c_\nu| \lim_{a \to 0} \| U_{a+t_\nu} x(0) - U_{t_\nu} (0) \|$$

$$= \sum_{1}^{n} (c_\nu | \lim_{a \to 0} \| v_a x(0) \quad U_0 x(0) \|$$

$$= \sum_{1}^{n} |c_\nu| \lim_{a \to 0} E(|x(a) - x(0)|^2) = 0,$$

但 H_0 在 H 中稠密，并且 U_a 是酉算子，故 $\{U_a\}$ 在 H 上强连续.

由 Stone 定理，必存在谱分解

$$U_a = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia\lambda} dE_\lambda,$$

因而

$$x(t) = U_t x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda x(0). \tag{3}$$

这就是说，平稳且连续的随机过程仅决定于一个状态 $x(0)$ 和平移过程的无穷小母元 $\int \lambda dE_\lambda$. 显然，这又等价于可由任何 $x(t_0)$ 及

$\int \lambda dE_\lambda$ 决定.

考察新的随机过程

$$Z(\lambda)=E_\lambda x(0), \quad -\infty<\lambda<+\infty \tag{4}$$

它具有如下的性质：当$[\lambda_1,\lambda_2]\cap[\lambda_3,\lambda_4]=\varnothing$时，

$$E((z(\lambda_2)-z(\lambda_1))(\overline{z(\lambda_4)-z(\lambda_3)}))$$
$$=((E_{\lambda_2}-E_{\lambda_1})x(0), \ (E_{\lambda_4}-E_{\lambda_3})x(0))=0,$$

我们称 $z(\lambda_2)-z(\lambda_1)$ 为过程 (4) 的**增量**. 上式说明当区间互不相交时，相应的增量相互直交，所以我们把$z(\lambda)$称为**正交增量过程**.

(3) 式告诉我们：任何一个连续的平稳随机过程是正交增量过程的 Fourier 变换.

2.5.4 Stone 定理的应用：平均遍历定理

现在，我们可以在比 §2.4 稍为一般的情况下讨论平均遍历定理.

设$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$是一个测度空间，p_t 为Ω中的双射，$A\in\mathscr{R}$时，$p_tA=\{p_tx\,|\,x\in A\}\in\mathscr{R}$，且

$$\mu(p_tA)=\mu(A).$$

即 p_t 是保测变换. 又设 $\{p_t\,|-\infty<t<\infty\}$ 为一单参数变换群，$L^2(\Omega,\mathscr{R},\mu)$为平方可积函数空间. 当 $f(x)\in L^2(\Omega, \ \mathscr{R}, \ \mu)$时，定义

$$U_tf(x)=f(p_tx),$$

则由

$$\|U_tf\|^2=\int|U_tf(x)|^2d\mu(x)=\int|f(p_tx)|^2d\mu(x)=\|f\|^2,$$

即知$\{U_t\,|-\infty<t<+\infty\}$为一单参数酉算子群. 设

$$\lim_{t\to0}\|U_tf-f\|^2=\lim_{t\to0}\int_\Omega|f(p_tx)-f(x)|^2d\mu(x)=0,$$

即 U_t 为强连续的. 由 Stone 定理,存在谱系 $\{E_\lambda\}$,使

$$U_t=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}dE_\lambda,$$

对任何 $f\in L^2(\Omega,\mathscr{R},\mu)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(p_tx)\,dt&=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}U_tf(x)\,dx\\&=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}d(E_\lambda f(x))\,dt\\&=\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{1}{iT\lambda}\left[e^{i\lambda(a+T)}-e^{i\lambda a}\right]dE_\lambda f.\end{aligned}$$

由此，若记

$$E(0)=\lim_{\lambda\to0^+}E_\lambda-\lim_{\lambda\to0^-}E_\lambda,$$

则

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(p_tx)\,dt-E(0)f\right\|^2\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{e^{i\lambda(a+T)}-e^{i\lambda a}}{i\lambda T}-g(\lambda)\right|^2d\|E_\lambda f\|^2.\end{aligned}$$

这里,$g(\lambda)$ 当 $\lambda\neq0$ 时为 0,而当 $\lambda=0$ 时为 1. 由 Lebesgue 控制收敛定理，得

$$\lim_{T\to-\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(p_tx)\,dt=E(0)f.$$

由于 $U_tE(0)=E(0)U_t$,若记 $E(0)f=f^*$,则

$$\begin{aligned}U_tf^*=E(0)U_tf&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T}U_tf(p_tx)\,dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{a+t}^{a+t+T}f(p_\tau x)\,d\tau=E(0)f=f^*.\end{aligned}$$

故对几乎所有的 x,

$$f^*(p_tx)=f^*(x),$$

即 $E(0)f$ 为不变函数. 这就是平均遍历定理的一个主要结果.

第三章　拓扑线性空间

拓扑线性空间是现代分析数学中一种基本的数学结构．在拓扑线性空间中，所讨论的对象是基本的代数运算(加法及数乘)和拓扑(或极限)之间的关系．在数学分析中，函数有加法和数乘，但收敛的概念却有多种，最常用的函数列的收敛概念是一致收敛和点点收敛．在测度论中，又有依测度收敛、平均收敛等收敛概念．这许多收敛概念中大部分可以用一个衡量两个元素远近的函数——距离来描述，但有的收敛就不能如此，例如，[0,1]上函数的点点收敛的概念就不可能用距离来描述．

还有，泛函分析自身发展过程中提出的重要的"弱收敛"也不能用距离来描述，它们要用拓扑空间来刻划，从而出现了拓扑线性空间的理论．一般说来，当讨论既有代数运算又有极限概念的对象时，有一个基本的要求：代数运算是连续的．分析数学所讨论的大量问题中，绝大多数都可容纳在拓扑线性空间的框架中，因此拓扑线性空间理论是分析学中很一般的线性理论．本章讨论拓扑线性空间的基本概念和一般理论．

§3.1　拓 扑 空 间

这一节主要是列举关于拓扑空间的一些基本的概念和定理，目的是以后用到时比较方便．考虑到读者对这些内容都有不同程度的了解，所以这节中的大部分定理只叙述结论而不加证明，仅对一部分定理给出证明．

基本的概念都明确地叙述定义，但有些名称因使用时并不统一，对这种情况将略作说明。

3.1.1　邻域，序，网

定义　设X是非空集，τ是由X的某些子集所成的集类，如果τ具有下列性质：(i) $\varnothing\in\tau$，$X\in\tau$ (ii) τ中任意个集的和集属于τ (iii) τ中任何两个集的交集属于τ，则称τ是X的**拓扑**．当对集X给定拓扑τ时，就称(X,τ)是**拓扑空间**．

定义　设(X,τ)是拓扑空间，τ中的集称为(拓扑空间(X,τ)的)**开集**．开集的余集称为**闭集**．

由集合运算的和通关系式，即知有下面定理．

定理1　设(X,τ)是拓扑空间，记(X,τ)的闭集全体为$\bar{\tau}$，则集类$\bar{\tau}$有下列性质：(i) $\varnothing\in\bar{\tau}$，$X\in\bar{\tau}$；(ii) $\bar{\tau}$中任意个集的交集属于$\bar{\tau}$；(iii) $\bar{\tau}$中任何两个集的和集属于$\bar{\tau}$．反之，如果非空集X的集类$\bar{\tau}$有上面的性质(i)—(iii)，则有X的唯一的拓扑τ，使$\bar{\tau}$是(X,τ)的闭集全体．

定义　设(X,τ)是拓扑空间，$A\subset X$，$x_0\in X$．

(i) 如果有$O\in\tau$使$x_0\in O$且$O\subset A$，则称x_0是A的**内点**．A的内点全体称为A的**核**(**或开核**)．

(ii) 含有x_0的开集称为x_0的**邻域**．

(iii) 如果x_0的任何邻域O使$O\cap A\neq\varnothing$，则称x_0是A的**接触点**．

(iv) 包含A的最小闭集称为A的**闭包**．记为$\bar{A}$．

在有的书中把以x_0为内点的集称为x_0的邻域，而把(ii)中定义的邻域称为开邻域．本书中总是在开邻域的意义下使用邻域一词．由定理1中闭集的性质(ii)，一切包含A的闭集的交集就是A的闭包，它的意义是确定的．

定义 设 D 是非空集，$\prec$ 是 D 中的(二元)关系，如果 $\prec$ 具有下列性质：(i) 对任何 $\alpha\in D$ 成立 $\alpha\prec\alpha$；(ii) 如果 $\alpha,\ \beta\in D$ 使 $\alpha\prec\beta$ 且 $\beta\prec\alpha$，就必定 $\alpha=\beta$；(iii) 如果 $\alpha,\beta,\gamma\in D$ 使 $\alpha\prec\beta$ 且 $\beta\prec\gamma$，就成立 $\alpha\prec\gamma$，则称 $\prec$ 是 D 的**半序**. 当对集 D 给定半序 $\prec$ 时，就称 $(D,\prec)$ 是个**半序集**.

定义 设 $(D,\prec)$ 是半序集，如果 $\alpha,\beta\in D$ 使 $\alpha\prec\beta$，就称 β 在 α **之后**. 如果 $D_1\subset D,\beta\in D$ 使 $\alpha\prec\beta$(对任何 $\alpha\in D_1$)，就称 β 是 D_1 的**上界**. 如果 β 是 D_1 的上界且任何 D_1 的上界 γ 都使 $\beta\prec\gamma$，就称 β 是 D_1 的**上确界**. 如果 $D_1\subset D$ 且对于任何 $\alpha,\beta\in D_1$，$\alpha\prec\beta$ 与 $\beta\prec\alpha$ 至少有一个成立，就称 D_1 是 D 的**全序子集**. 如果 D 中元 α 有下述性质：当 $\beta\in D$ 且 $\alpha\prec\beta$ 时必定 $\beta=\alpha$，就称 α 是 D 中**极大元**. 如果 $\alpha\in D$ 使得 $\beta\prec\alpha$(对任何 $\beta\in D$)，就称 α 是 D 的**最大元**. 如果对任何 $\alpha,\beta\in D$，有 $\gamma\in D$ 使 $\alpha\prec\gamma,\beta\prec\gamma$，就称 D 是**定向**(半序)**集**.

对半序集，类似地也有下界、极小元等概念.

Zorn 引理 设 $(D,\prec)$ 是半序集，如果 D 的任何全序子集有上界，则 D 必有极大元.

Zorn 引理是与下面的 Zermelo 公理等价的.

Zermelo 公理 设 X 是非空集，$\{A_\alpha\}$ 是 X 的一族非空子集且它们两两不交(α 在足标集 D 中变化)，则有 X 的子集 B 使得对任何 $\alpha\in D$，$A_\alpha\cap B$ 是单元集.

由 Zermelo 公理可得下面的

定理 2 设 X 是非空集，$\{A_\alpha\}(\alpha\in D)$ 是 X 的一族非空子集，则有映射 $\varphi: D\to X$ 使得 $\varphi(\alpha)\in A_\alpha(\alpha\in D)$.

证 作乘积集 $D\times X$，令 $B_\alpha=\{\alpha\}\times A_\alpha(\alpha\in D)$，则 $\{B_\alpha\}$ 是 $D\times X$ 的一族两两不交的非空子集，于是有 $B(\subset D\times X)$ 使 $B\cap B_\alpha(\alpha\in D)$ 是单元集. 令 $\varphi(\alpha)$ 是使 $\{(\alpha,\ \varphi(\alpha))\}=B\cap B_\alpha$ 的那个(A_α 中的)元，φ 即合要求. 证毕.

定义 由定向集到集X的映射称为X中的网.

当φ是定向集$(D, \prec)$到集X的映射时，习惯上把$\varphi(\alpha)$记为x_α $(\alpha\in D)$，X中的网常记为$\{x_\alpha\}$，足标α理解为定向集$(D, \prec)$中的元. 一般略去$(D, \prec)$不写出.

定义 设(X, τ)是拓扑空间，$\{x_\alpha\}$是X中的网，$x\in X$，如果对x的任何邻域O，有(足标)α_0，使当$\alpha_0\prec\alpha$时成立$x_\alpha\in O$，则称网$\{x_\alpha\}$收敛于x，记为$x_\alpha\to x$(或$x=\lim x_\alpha$).

定理3 设(X,τ)是拓扑空间，$A\subset X$，$x\in X$，则下列各点等价：(i) $x\in\bar{A}$; (ii) x是A的接触点; (iii) 有A中的网$\{x_\alpha\}$使$x_\alpha\to x$.

证 (i)⇒(ii)用反证法. 如果x不是A的接触点，则有x的邻域O使$O\cap A=\varnothing$，于是O^c是闭集且$A\subset O^c$，所以$\bar{A}\subset O^c$，但$x\overline{\in} O^c$，与(1)矛盾.

(ii)⇒(iii) 记x的邻域全体为D，以$\supset$作为D的半序，易见$(D,\supset)$是定向集. 对于$O\in D$，$O\cap A$是非空的，由定理2，有映射$\varphi: D\to A$使$\varphi(O)\in O\cap A$. φ是A中的网. 如果记$\varphi(O)$为x_O $(O\in D)$，那末对x的邻域V，V是D中的元，当$W\in D$在V之后时，$x_W\in W\cap A\subset V$，所以$x_O\to x$.

(iii)⇒(i)设$\{x_\alpha\}$是A中网且$x_\alpha\to x$，要证$x\in\bar{A}$. 用反证法，如果$x\overline{\in}\bar{A}$，$(\bar{A})^c$是x的邻域，于是有足标α_0使$x_{\alpha_0}\in(\bar{A})^c$. $x_{\alpha_0}\in(\bar{A})^c\cap A$但$(\bar{A})^c\cap A=\varnothing$，便得到矛盾. 证毕.

定理4 (闭包的性质) 设(X,τ)是拓扑空间，$A, B\subset X$，则 (i) $\overline{\varnothing}=\varnothing$; (ii) $\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cup\bar{B}$; (iii) $(\bar{\bar{A}})=\bar{A}$; (iv) $\bar{A}\supset A$. 反之，如果记X的子集全体为S，又$\Phi: S\to S$具有下列性质：(i) $\Phi(\varnothing)=\varnothing$; (ii) $\Phi(A\cup B)=\Phi(A)\cup\Phi(B)$; (iii) $\Phi(\Phi(A))=\Phi(A)$; (iv) $\Phi(A)\supset A$，则有唯一的X的拓扑τ使得$\Phi(A)=\bar{A}$ $(A\in S)$.

3.1.2 拓扑的强弱、生成和分离公理

定义 设X是非空集，τ_1,τ_2是X的两个拓扑，如果$\tau_1\subset\tau_2$，则称τ_2比τ_1强(或细)，也称τ_1比τ_2弱(或粗)。

当集X有不止一个拓扑时，有关拓扑的概念要指明对于哪个拓扑。例如：x的τ邻域，$\overline{A}^{(\tau)}$，$x_\alpha\to x(\tau)$等。

定理1 设τ_1,τ_2是X的两个拓扑，则下列各点等价：

(i) τ_2比τ_1强。

(ii) 对任何$A\subset X$，$\overline{A}^{(\tau_2)}\subset\overline{A}^{(\tau_1)}$。

(iii) 对X中任何网$\{x_\alpha\}$及元x，$x_\alpha\to x(\tau_2)$时必定$x_\alpha\to x(\tau_1)$。

集X的任何一族拓扑的交仍是X的拓扑，所以对于X的集类S，有包含S的最弱拓扑。

定义 设X是非空集，S是X的集类，则称包含S的X的最弱拓扑为**S所生成的拓扑**。

定理2 设S是非空集X的集类且$\bigcup\limits_{A\in S}A=X$，记$S$所生成的拓扑为$\tau$，则$(X,\tau)$的非空开集必是一族集的和集，而这族集中每一个都是有限个S中集的交。

定义 设(X,τ)是拓扑空间，$S\subset\tau$，如果(X,τ)的非空开集都是S中一族集的和集，则称S是拓扑τ的**基**。

定理3 设S是非空集X的集类，则S是(X的)拓扑的基的充分必要条件是：(i) $X=\bigcup\limits_{A\in S}A$而且(ii)当$U,V\in S$，$x\in X$使$x\in U\cap V$时，有$W\in S$使$x\in W\subset U\cap V$。这时，$S$是它生成的拓扑的基。

系 设S是非空集X的集类，如果$\bigcup\limits_{A\in S}A=X$且当$U,V\in S$时，$U\cap V\in S$，则$S$是它生成的拓扑$\tau$的基。

定义　设(X,τ)是拓扑空间，$x\in X$，$\mathscr{U}(x)$是一族x的邻域．如果对于x的任何邻域O，有$V\in\mathscr{U}(x)$使$V\subset O$，则称$\mathscr{U}(x)$是τ**在x处的基**．又如果$\mathscr{U}_1(x)$是一族x的邻域，且$\mathscr{U}_1(x)$中有限个集的交集全体是τ在x处的基，则称$\mathscr{U}_1(x)$是τ**在x处的子基**．

由定义可知，设(X,τ)是拓扑空间，$\{x_\alpha\}$是X中的网，$x\in X$，$\mathscr{U}_1(x)$是τ在x处的子基，如果对任何$V\in\mathscr{U}_1(x)$，有足标α_0使当$\alpha_0\prec\alpha$时$x_\alpha\in V$，就成立$x_\alpha\to x$．

定理 4　设X是非空集，对每个$x\in X$，相应有一族X的子集$\mathscr{U}(x)$，如果(i) 对任何$x\in X$及$O\in\mathscr{U}(x)$有$x\in O$；(ii) 对任何$x\in X$及U，$V\in\mathscr{U}(x)$有$W\in\mathscr{U}(x)$使$W\subset U\cap V$；(iii) 对任何$x\in X$，$O\in\mathscr{U}(x)$及$y\in O$．有$V\in\mathscr{U}(y)$使$V\subset O$，则有唯一的X的拓扑τ使得对任何$x\in X$，$\mathscr{U}(x)$是τ在x处的基．

定义　设(X,τ)是拓扑空间，如果下面的(0)—(4)中有一条成立，相应地称(X,τ)满足T_0—T_4公理：

(0) 对X中不同的两点x,y，有$O\in\tau$使得$O\cap\{x,y\}$是单点集；

(1) 对X中不同的两点x,y，有$U,V\in\tau$使得$U\cap\{x,y\}=\{x\}$，$V\cap\{x,y\}=\{y\}$．

(2) 对X中不同的两点x,y，有$U,V\in\tau$使得$x\in U,y\in V$且$U\cap V=\varnothing$．

(3) 对(X,τ)的闭集A及$x\bar{\in}A$，有U，$V\in\tau$使得$x\in U$，$A\subset V$且$U\cap V=\varnothing$．

(4) 对(X,τ)的两个不相交的闭集A，B，有U，$V\in\tau$使得$A\subset U,B\subset V$且$U\cap V=\varnothing$．

由定义可知，拓扑空间(X,τ)满足T_1公理的充分必要条件是任何单点集都是闭集．

满足T_2公理的拓扑空间又称为**Hausdorff 空间**．

满足T_1和T_3公理的拓扑空间称为**正则空间**．

满足 T_1 和 T_4 公理的拓扑空间称为**正常**(或**正规**)**空间**.

注意,在有的书上,T_3 公理和正则空间的定义正好对调,而 T_4 公理和正常空间的定义正好对调.

3.1.3 连续映射和 Урысон 引理

定义 设(X_1,τ_1),(X_2,τ_2)是两个拓扑空间,映射$\varphi: X_1\to X_2$, $x\in X_1$, 如果对于 $\varphi(x)$的任何邻域 O, 有 x 的邻域 V 使得 $\varphi(V)\subset O$, 则称 φ **在 x 处连续**. 如果 φ 在任何 $x\in X_1$ 处连续, 则称 φ **在 (X_1,τ_1) 上连续**,简称 **φ 在 X_1 上连续**, 也可简单地说 φ 是连续的.

定理 1 设(X_1,τ_1),(X_2,τ_2)是两个拓扑空间,$\varphi: X_1\to X_2$, $x\in X_1$, 则 φ 在 x 处连续的充分必要条件是: 对 X_1 中任何收敛于 x 的网$\{x_\alpha\}$成立 $\varphi(x_\alpha)\to\varphi(x)(\tau_2)$. 从而, φ 在 X_1 上连续的充分必要条件是: 对于 X_1 中的网$\{x_\alpha\}$及元 x, 当 $x_\alpha\to x(\tau_1)$时成立 $\varphi(x_\alpha)\to\varphi(x)(\tau_2)$.

定理 2 设(X_1,τ_1),(X_2,τ_2)是两个拓扑空间,$\varphi: X_1\to X_2$, 则 φ 在 X_1 上连续的充分必要条件是: (X_2, τ_2) 中任何开集 O 的原象 $\varphi^{-1}(O)$ 是(X_1,τ_1)的开集. 另一个充分必要条件是: 任何 τ_2 闭集的原象是 τ_1 闭集.

由定理 2 可知,如果 φ 是$(X_1,\tau_1)\to(X_2,\tau_2)$的连续映射,又 $\tilde{\tau}_1$ 是 X_1 的拓扑且 $\tilde{\tau}_1$ 比 τ_1 强,那末 φ 是$(X_1, \tilde{\tau}_1)\to(X_2, \tau_2)$的连续映射. 类似地, 如果 $\tilde{\tau}_2$ 是比 τ_2 弱的 X_2 的拓扑, 则 φ 是$(X_1, \tau_1)\to(X_2, \tilde{\tau}_2)$的连续映射.

定义 设(X,τ)是拓扑空间,如果对任何 $x\in X$,有 x 的(至多)可列个邻域构成 τ 在 x 处的基,则称(X,τ)**满足第一可列公理**. 如果有(至多) 可列个开集构成 τ 的基, 则称 (X, τ)**满足第二可列公理**.

自然数集$\mathbb{N}$以$\leqslant$为序是全序的, 以自然数为足标的网称为点

列．但对拓扑空间来说，点列的收敛概念还不够．例如在3.1.1定理3的(iii)中，不能把网$\{x_\alpha\}$改成点列$\{x_n\}$，因为由$x\in\bar{A}$不能推出有A中点列$\{x_n\}$使$x_n\to x$．又如在3.1.2的定理1中，(iii)的网$\{x_\alpha\}$不能改成点列$\{x_n\}$，因为由$x_n\to x(\tau_2)$就必定$x_n\to x(\tau_1)$不能推出τ_2比τ_1强．同样，3.1.3定理1中如把网改成点列，就只是必要条件而并不充分．然而，在上面提及的三个定理中，如果分别再假设(X,τ)，(X,τ_2)，(X_1,τ_1)满足第一可列公理，则这些定理中的网可以改成点列．

定理3　(Урысон引理)　设(X,τ)是正常空间，A,B是两个不相交的闭集，则有(X,τ)上实值连续函数φ使得(i) φ在A上取值为0；(ii) φ在B上取值为1；(iii) 对于任何$x\in X$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$.

证　当(X,τ)是正常空间时，对于(X,τ)的闭集F及开集O，如果$O\supset F$，就必有开集V使得$O\supset\bar{V}\supset V\supset F$．记$A$为$U_0$，记$B^c$为$U_1$，于是有开集$U_{1/2}$使$U_0\subset U_{1/2}\subset\bar{U}_{1/2}\subset U_1$．对于$U_0$和$U_{1/2}$，$\bar{U}_{1/2}$和$U_1$，又分别有开集$U_{1/4}$和$U_{3/4}$，使得

$$U_0\subset U_{1/4}\subset\bar{U}_{1/4}\subset U_{1/2}\subset\bar{U}_{1/2}\subset U_{3/4}\subset\bar{U}_{3/4}\subset U_1,$$

接着对于依次的四对集又分别有开集$U_{1/8}$，$U_{3/8}$，$U_{5/8}$，$U_{7/8}$满足相应的包含关系．这样下去，对于形为$\frac{k}{2^n}$的$(0,1)$中有理数t，可作开集U_t．当t,s是这种形式的数目$t<s$时，$\bar{U}_t\subset U_s$．记$[0,1]$中形为$\frac{k}{2^n}$(n是自然数，k是0或自然数）的数全体为E．作映射φ：$X\to[0,1]$如下：

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\overline{\in}U_1\text{ 时},\\ \inf\{t\mid t\in E,\ x\in U_t\}, & \text{当 } x\in U_1\text{ 时}.\end{cases}$$

由作法即知φ满足定理的要求(i)－(iii)，故只需证明φ在X上连续．对$x\in X$及$\varepsilon>0$，记$\varphi(x)$为t，取$t_1,t_2\in E$使$t-\varepsilon<t_1<$

$t<t_2<t+\varepsilon$(如$t=1$就取$t_2=1$,如$t=0$就取$t_1=0$),记$O=U_{t_2}\setminus \bar{U}_{t_1}$(在$t=1$时记$O=(\bar{U}_{t_1})^c$,在$t=0$时记$O=U_{t_2}$),由作法$O$是$x$的邻域且$\varphi(O)\subset(t-\varepsilon,t+\varepsilon)$,所以$\varphi$在$x$处连续,故$\varphi$是$X$上连续函数. 证毕.

3.1.4 紧性

定义 设X是非空集,$\{A_\alpha\}$是X的一族子集,$A\subset X$,如果$\bigcup_\alpha A_\alpha\supset A$,则称集族$\{A_\alpha\}$覆盖集$A$. 如果集族$\{A_\alpha\}$中任何有限个集的交集非空,则称$\{A_\alpha\}$是**联族**,或称$\{A_\alpha\}$**具有有限交性质**.

定义 设(X,τ)是拓扑空间,$A\subset X$,如果在任何一族覆盖A的开集$\{O_\alpha\}$中,总可取出有限个集也覆盖A,则称A是(X,τ)中的**紧集**. 如果X本身是紧集,就称(X,τ)是**紧空间**.

定理1 设(X,τ)是拓扑空间,$A\subset X$,则A是(X,τ)中紧集的充分必要条件是:对(X,τ)的任何闭集族$\{F_\alpha\}$,如果$\{F_\alpha\cap A\}$是联族,就必定$\bigcap_\alpha(F_\alpha\cap A)\neq\varnothing$.

定理2 设(X,τ)是拓扑空间,则下列各点等价:

(i) (X,τ)是紧空间.

(ii) (X,τ)的任何闭联族$\{F_\alpha\}$使$\bigcap_\alpha F_\alpha\neq\varnothing$.

(iii) (X,τ)的任何联族$\{A_\alpha\}$有公共的接触点.

定理3 设A是拓扑空间(X,τ)中的紧集,$B\subset A$且B是闭集,则B是紧集. 简言之,紧集的闭子集是紧集.

定理4 Hausdorff 空间(X,τ)中的紧集必定是闭集.

系 在紧 Hausdorff 空间(X,τ)中,集A是紧集等价于集A是闭集.

定理5 紧 Hausdorff 空间是正常空间.

定理 6 设(X_1,τ_1)，(X_2,τ_2)是两个拓扑空间，$\varphi: X_1\to X_2$是连续映射，则 X_1 中紧集 A 的象 $\varphi(A)$ 是 X_2 中紧集.

定义 设(X_1,τ_1)，(X_2,τ_2)是两个拓扑空间，φ 是 $X_1\to X_2$ 的双射，如果 φ 和 φ^{-1} 都连续，则称 φ 是 $X_1\to X_2$ 的**同胚**(映射). 存在同胚(映射)的两个拓扑空间称为是同胚的.

定理 7 紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射是同胚.

定理 8 (**Dini 定理**) 设(X, τ)是紧空间，$\{\varphi_n\}$是X上的一列实值连续函数，如果$\{\varphi_n\}$单调下降（或上升），即对任何$x\in X$，$\varphi_1(x)\geqslant\varphi_2(x)\geqslant\cdots$(或 $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots$)且 φ_n 在X上点点收敛于连续函数 φ，则$\{\varphi_n\}$在 X 上一致收敛于 φ.

证 对任给的 $\varepsilon>0$，记 $A_n=\{x\,|\,\varphi_n(x)-\varphi(x)\geqslant\varepsilon\}$ $(n=1, 2, \cdots)$. 因为 $\varphi_n-\varphi$ 是X上连续函数，A_n 是(X, τ)中闭集. 又由$\{\varphi_n\}$单调下降，$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$. 由于$\{\varphi_n\}$点点收敛于 φ，故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$. 而因$(X,\tau)$是紧空间，由定理 1 $\{A_n\}$不是联族. 从而有 n_0 使 $A_{n_0}=\varnothing$，所以当 $n\geqslant n_0$ 时，$\varphi_n(x)-\varphi(x)<\varepsilon$ 对任何 $x\in X$ 成立，也即$\{\varphi_n\}$在 X 上一致收敛于 φ. 证毕.

3.1.5 乘积拓扑，Тихонов 定理

在 3.1.4 中，引进了联族的概念，对于集类也可用同样的名称. 设 $\boldsymbol{S}$ 是非空集 X 的集类，如果对 $\boldsymbol{S}$ 的任何有限子类 $\boldsymbol{S}_1$，$\bigcap\limits_{A\in\boldsymbol{S}_1}A$ 非空，也称 $\boldsymbol{S}$ 是联族或称 $\boldsymbol{S}$ 具有有限交性质. 这里不考虑 $\boldsymbol{S}$ 或 $\boldsymbol{S}_1$ 是空类的情况(通常当非空集 X 的集类 $\boldsymbol{S}$ 是空类时，$\bigcap\limits_{A\in\boldsymbol{S}}A$ 理解为 X)，而在用足标时，总设足标集是非空的. 一般说来，X的集类 $\boldsymbol{S}$ 与 X 的一族子集$\{A_\alpha\}$(α 在足标集 D 中变化)这两种说法，在 $\boldsymbol{S}=\{A_\alpha\,|\,\alpha\in D\}$时也是有些差别的. 在集族$\{A_\alpha\}$中，对于不同的足

标 α,β，可以 $A_\alpha=A_\beta$，而在集类 S 中，不同的元 A,B 则指 $A\neq B$.

定义 设 X 是非空集，F 是 X 的集类（F 非空），如果

(i) 当 $A,B\in F$ 时 $A\cap B\in F$;

(ii) 当 $A\in F$, $A\subset B(\subset X)$ 时 $B\in F$;

(iii) $\varnothing\overline{\in}F$,

则称 F 是 X 的**滤子**或**渗透**(filter)．如果 F 是（X 的）滤子且当 $F\subset F_1$, F_1 是滤子时必定 $F_1=F$，则称 F 是 X 的**超滤子**(ultrafilter)．

由定义即知滤子是联族．超滤子也就是极大的滤子．由Zorn引理，任何滤子 F 必有包含 F 的超滤子．实际上，任何联族 S 必有包含它的极大联族，而极大联族也就是超滤子.

定理 1 设 X 是非空集，F 是 X 的超滤子，$A\subset X$，则 $A\in F$ 及 $A^c\in F$ 必有一个（当然也只有一个）成立.

证 用反证法．如 A 及 A^c 都 $\overline{\in}F$．这时对于任何 $B\in F$, $A\cap B\neq\varnothing$（否则 $A^c\supset B$，从而 $A^c\in F$）．由于 F 中有限个元的交仍在 F 中，所以 $F\cup\{A\}$ 有有限交性质．令

$$F_1=\{A_1\mid A_1\subset X, \text{有 } B\in F \text{ 使 } A_1\supset A\cap B\},$$

易见 F_1 是滤子，且 $F_1\supset F$, $F_1\neq F$，这与 F 是超滤子矛盾．证毕.

系 设 F 是 X 的超滤子，$A\subset X$，如果对任何 $B\in F$, $A\cap B\neq\varnothing$，则 $A\in F$.

定义 设 (X,τ) 是拓扑空间，F 是 X 的滤子，$x\in X$，如果 x 的任何邻域 O 与任何 $B\in F$ 使 $O\cap B$ 非空，则称 x 是 F 的**接触点**．如果 x 的任何邻域 O 都属于 F，则称 F **收敛**于 x，记为 $F\to x$.

定理 2 设 (X,τ) 是拓扑空间，F 是 X 的超滤子，$x\in X$，如果 x 是 F 的接触点，则 $F\to x$.

系 设 (X,τ) 是拓扑空间，则 (X,τ) 是紧空间的充分必要条件是：X 的任何超滤子 F 都收敛于 X 中的某个元.

由滤子的定义可知，当 X,Y 是非空集，ψ 是 $X\to Y$ 的满射时，对于X的滤子 $\boldsymbol{F}$，$\{\psi(A)\mid A\in\boldsymbol{F}\}$ 是Y的滤子。

定义　设 $X_\alpha(\alpha\in D)$ 是一族非空集，称

$$\{\varphi\mid\varphi\text{ 是 }D\text{ 上的映射},\varphi(\alpha)\in X_\alpha(\alpha\in D)\}$$

为 $X_\alpha(\alpha\in D)$ 的**乘积集**，记为 $\underset{\alpha\in D}{\times}X_\alpha$ 或 $\underset{\alpha}{\times}X_\alpha$. 对于$\beta\in D$，映射 P_β: $\underset{\alpha\in D}{\times}X_\alpha\to X_\beta:\varphi\longmapsto\varphi(\beta)$ 称为 $\underset{\alpha\in D}{\times}X_\alpha$ 的**第 β 个投影**.

定义　设 $(X_\alpha,\tau_\alpha)(\alpha\in D)$ 是一族拓扑空间，乘积集 $\underset{\alpha}{\times}X_\alpha$ 的使每个 $P_\beta(\beta\in D)$ 都连续的最弱拓扑称为**乘积拓扑**，记为 $\underset{\alpha\in D}{\times}\tau_\alpha$ 或 $\underset{\alpha}{\times}\tau_\alpha$. $\left(\underset{\alpha}{\times}X_\alpha,\ \underset{\alpha}{\times}\tau_\alpha\right)$称为$(X_\alpha,\tau_\alpha)(\alpha\in D)$的**乘积拓扑空间**.

要使 P_β 连续，对于 $(X_\beta,\ \tau_\beta)$ 中开集 O_β，$P_\beta^{-1}(O_\beta)=\{\varphi\mid\varphi\in\underset{\alpha}{\times}X_\alpha,\ \varphi(\beta)\in O_\beta\}$ 应是开集. 因此，要使每个 $P_\beta(\beta\in D)$ 都连续，对于任何 $\beta\in D$ 及 $O_\beta\in\tau_\beta$，$P_\beta^{-1}(O_\beta)$ 都应是开集，所以乘积拓扑 $\underset{\alpha}{\times}\tau_\alpha$就是由这种形式的集全体所生成的拓扑.

定理 3　(Тихонов)　设$(X_\alpha,\tau_\alpha)(\alpha\in D)$ 是一族紧空间，则乘积拓扑空间$\left(\underset{\alpha}{\times}X_\alpha,\ \underset{\alpha}{\times}\tau_\alpha\right)$是紧空间.

证　设 $\boldsymbol{F}$ 是 $\underset{\alpha}{\times}X_\alpha$ 的超滤子，只要证明 $\boldsymbol{F}$ 有接触点. 对任何 $\beta\in D$，因为 P_β 是 $\underset{\alpha}{\times}X_\alpha\to X_\beta$ 的满射，$P_\beta(\boldsymbol{F})=\{P_\beta(A)\mid A\in\boldsymbol{F}\}$ 是 X_β 的滤子. 由于(X_β,τ_β)是紧的，$P_\beta(\boldsymbol{F})$有接触点，因而有 $\varphi_0\in\underset{\alpha}{\times}X_\alpha$，使得对任何 $\beta\in D$，$\varphi_0(\beta)$是 $P_\beta(\boldsymbol{F})$的接触点. 下面证明φ_0是 $\boldsymbol{F}$ 的接触点.

对任一 $\beta\in D$ 及 (X_β, τ_β) 中 $\varphi_0(\beta)$ 的邻域 O_β，由于 $\varphi_0(\beta)$ 是 $P_\beta(F)$ 的接触点，故对于 $A\in F$，$O_\beta\cap P_\beta(A)$ 非空，从而 $P_\beta^{-1}(O_\beta)\cap A$ 非空. 由定理 1 的系，$P_\beta^{-1}(O_\beta)\in F$.

因为 $\bigtimes_\alpha \tau_\alpha$ 是由 $\{P_\beta^{-1}(O_\beta)\mid \beta\in D, O_\beta\in\tau_\beta\}$ 生成的拓扑，所以 $\{P_\beta^{-1}(O_\beta)\mid\beta\in D, O_\beta$ 是 $\varphi_0(\beta)$ 的邻域$\}$ 是 $\bigtimes_\alpha\tau_\alpha$ 在 φ_0 处的子基，又因这个子基是 F 的子类，F 是滤子，故 φ_0 的任何邻域 O 在 F 中，即 $F\to\varphi_0$. 由定理 2 的系，$\left(\bigtimes_\alpha X_\alpha, \bigtimes_\alpha \tau_\alpha\right)$ 是紧空间. 证毕.

定义 设 (X,τ) 是 Hausdorff 拓扑空间，如果对任何 $x\in X$，都有 x 的邻域 O 使 $\bar{O}$ 是 (X,τ) 中紧集，则称 (X,τ) 是**局部紧空间**。

当 (X,τ) 是局部紧空间时，记 $X_1=X\cup\{\infty\}$，这里 ∞ 不是 X 中的元，X_1 是 X 再添加一个点而成的集. 作 X_1 的拓扑 $\{A^c\cup\{\infty\}\mid A$ 是 (X,τ) 中紧集$\}\cup\tau$，其中 A^c 表示 $X\backslash A$. 对于 X_1 来说，就是以 (X,τ) 中开集以及 (X,τ) 中紧集（在 X_1 中）的余集全体为拓扑. 这时 X_1 成为一个紧空间. 以此方法作出的紧空间 X_1 称为 (X,τ) 的**单点紧化扩张**.

3.1.6 诱导拓扑和可度量化空间

定义 设 (X,τ) 是拓扑空间，A 是 X 的非空子集，记 $\tau_A=\{O\cap A\mid O\in\tau\}$，称 τ_A 是 τ 在 A 上的**诱导拓扑**. (A,τ_A) 称为 (X,τ) 的**子空间**. τ_A 有时也记为 $\tau|_A$.

定理 1 设 (A,τ_A) 是拓扑空间 (X,τ) 的子空间，那末:

(i) A 是 (X,τ) 中紧集等价于 (A,τ_A) 是紧空间.

(ii) 对于 A 中的网 $\{x_\alpha\}$ 及元 x，$x_\alpha\to x(\tau)$ 等价于 $x_\alpha\to x(\tau_A)$.

(iii) 设 $x\in A$，$\mathscr{U}(x)$ 是 τ 在 x 处的基（或子基），则 $\{O\cap A\mid O\in\mathscr{U}(x)\}$ 是 τ_A 在 x 处的基（或子基）.

(iv)对于 A 的子集 B, $\overline{B}^{(\tau_A)}=\overline{B}^{(\tau)}\cap A$.

定义 设 X 是非空集, $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$, 如果(i) $\rho(x,y)\geqslant 0$ $(x, y\in X)$ 且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$ 时成立; (ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ $(x,y\in X)$; (iii) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$ $(x,y,z\in X)$, 则称 ρ 是 X 中的**距离**. 当集 X 中给定距离 ρ 时, 称 (X,ρ) 为**度量空间**. 如果 (X,ρ) 是度量空间, 对于 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$, 称集 $\{y\mid y\in X, \rho(x,y)<\varepsilon\}$ 为 x 的 **ε 邻域**, 记为 $O(x;\varepsilon)$, 而由 $\{O(x;\varepsilon)\mid x\in X, \varepsilon>0\}$ 生成的 X 的拓扑称为**由 ρ 导出的拓扑**, 记为 τ_ρ. 对于度量空间 (X,ρ), 有关拓扑的概念总是理解为对 (X,τ_ρ) 而言的. 如果 (X,τ) 是拓扑空间, 且有 X 中距离 ρ 使 $\tau_\rho=\tau$, 则称 (X,τ) 是**可度量化的**.

如果 (X,ρ) 是度量空间, 则 $\{O(x;\varepsilon)\mid x\in X, \varepsilon>0\}$ 是 τ_ρ 的基, 而对于 $x\in X$, $\{O(x;\varepsilon)\mid\varepsilon>0\}$ 是 τ_ρ 在 x 处的基. 实际上, $\left\{O\left(x;\frac{1}{n}\right)\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ ① 也是 τ_ρ 在 x 处的基, 所以 (X,ρ) 满足第一可列公理. 又易见 (X,ρ) 是 Hausdorff 空间.

定理 2 设 (X,ρ) 是度量空间, $A\subset X$, 则 A 是紧集的充分必要条件是: A 中任何点列 $\{x_n\}$ 必有子点列 $\{x_{n_K}\}$ 收敛于 A 中的点.

系 设 (X,τ) 是可度量化的拓扑空间, $A\subset X$, 则 A 是紧集的充分必要条件是: A 是闭集且 A 中任何点列 $\{x_n\}$ 必有收敛的子点列 $\{x_{n_K}\}$.

定义 设 (X,τ) 是拓扑空间, 如果有 X 的(至多)可列子集 A 使 $\overline{A}=X$, 则称 (X,τ) 是**可分的**.

定理 3 设 (X,τ) 是拓扑空间, 则 (X,τ) 是可分的可度量化空间的充分必要条件是: (X,τ) 是满足第二可列公理的正则空间.

定义 设 (X,ρ) 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中点列, 如果对任何

---

① $\mathbb{N}$ 表示自然数全体.

$\varepsilon>0$，有(自然数)N，使当 $m,n\geq N$ 时，$\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$是$(X,\rho)$中**基本点列**(或 Cauchy 点列)．如果(X,ρ)中任何基本点列都收敛，则称(X,ρ)是**完备**的．

定义 设(X,τ)是拓扑空间，$A\subset X$，如果 $\bar{A}$ 没有内点，则称 A 是(X,τ)中**疏朗集**．可以表示成(至多)一列疏朗集的和集的集称**为第一纲的**．不是第一纲的集称为**第二纲的**．

上面对度量空间引进了完备的概念，但对拓扑空间并没有完备的概念，主要是没有适当的"基本"的概念．即使(X,τ)是可度量化的拓扑空间，可能会有两个 X 的距离 ρ_1 和 ρ_2 使得 $\tau_{\rho_1}=\tau_{\rho_2}=\tau$，但$(X,\rho_1)$，$(X,\rho_2)$中一个是完备的而另一个并不完备，原因是"基本点列"的概念与距离有关．例如在实数集 $\mathbf{R}$中，令 $\rho_1(x,y)=|x-y|$，$\rho_2(x,y)=|arctgx-arctgy|$ $(x,y\in\mathbf{R})$，ρ_1，ρ_2 都是 $\mathbf{R}$ 的距离，τ_{ρ_1}，τ_{ρ_2} 是同一拓扑，但$(\mathbf{R},\rho_1)$是完备的，而$(\mathbf{R},\rho_2)$不是完备的．

定义 设(X,τ)是拓扑空间，如果 X 不能表示成两个非空的不相交的开集的和集，则称(X,τ)是**连通的**．

例如实数集 $\mathbf{R}$ 在通常拓扑下是连通的．

容易看到，拓扑空间(X,τ)是连通的意思是：除 $\varnothing$，X 外，没有既是开集又是闭集的集．

§3.2 拓扑线性空间

本节讨论拓扑线性空间中一些基本的概念和结论．利用有限维线性空间在(一个特定的)范数下的紧集的性质，证明了局部紧是有限维线性拓扑空间的特征．还讨论了线性算子及线性泛函的连续性．讨论了拓扑线性空间中的有界集，完全有界集，完备集及紧集等概念以及它们之间的一些关系．

3.2.1　基本概念和性质

所讨论的线性空间限于实或复空间. 以 $\mathbf{K}$ 表示实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$. 由于线性空间的基本概念一般是已经熟悉的, 所以有的概念只作简单的叙述.

定义　设 L 是非空集, 而且

I. 在 L 中有二元运算, 即 $L\times L\to L$ 的映射(称为加法, 记为 $+$, (x,y) 的象记为 $x+y$), 它使 L 成为交换群, 也就是说加法有下列性质:

(i) $x+y=y+x\quad(x,y\in L)$,

(ii) $x+(y+z)=(x+y)+z\quad(x,y,z\in L)$,

(iii) 有 L 中元(称为零元, 记为 0) 使 $0+x=x\,(x\in L)$,

(iv) 对 $x\in L$, 有 $y\in L$ 使 $x+y=0$(y 称为 x 的负元, 记为 $-x$).

II. 有 $\mathbf{K}\times L\to L$ 的映射(称为数乘, (λ,x) 的象记为 $\lambda\cdot x$ 或 λx), 它有下列性质:

(i) $1x=x\quad(x\in L)$,

(ii) $\lambda(\mu x)=\mu(\lambda x)=(\lambda\mu)x\quad(\lambda,\mu\in\mathbf{K},x\in L)$,

(iii) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x\quad(\lambda,\mu\in\mathbf{K},x\in L)$,

(iv) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y\quad(\lambda\in\mathbf{K},x,y\in L)$,

则称 L 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间或简称为**线性空间**, 线性空间也称为**向量空间**.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$(n 是自然数)是线性空间 L 中的 n 个元, 形为 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\,(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{K})$ 的元称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的**线性组合**. 如果有不全为零的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 使 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=0$, 就称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是**线性相关的**, 否则就称为**线性无关的**. 一个元 x 线性相关就是 $x=0$.

设 A 是线性空间 L 的(非空)子集，如果 A 中任何有限个各不相同的元都线性无关，就称 A 是**线性无关**的．L 的极大线性无关子集 A 称为 L 的**线性基**或 **Hamel 基**．由 Zorn 引理可知线性空间 L 必有 Hamel 基．L 的任何两个 Hamel 基必定具有相同的势．当 L 的 Hamel 基是有限集时，称 L 是**有限维的**，而 L 的 Hamel 基的势称为 L 的**维数**．不是有限维的线性空间称为**无限维的**．

设 L 是 $\mathbf{K}$ 上线性空间，$A,B\subset L$，$F\subset\mathbf{K}$，记

$$A+B=\{x+y\mid x\in A, y\in B\}, FA=\{\lambda x\mid \lambda\in F, x\in A\}$$

当 A,B 中有一个是空集时，$A+B$ 认为是空集，对 FA 也同样如此，但通常在非空集的情况下使用这记号．特别，$A+\{x\}$ 记为 $A+x$，$\{\lambda\}A$ 记为 λA．一般说来，$A+A\neq 2A$．

对于 $\varepsilon>0$，数集 $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{K}, |\lambda|<\varepsilon\}$ 及 $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{K}, |\lambda|\leqslant\varepsilon\}$ 分别记为 $K(\varepsilon)$ 及 $\bar{K}(\varepsilon)$．

设 L 是线性空间．L 的子集 A 如果使 $\bar{K}(1)A\subset A$，就称 A 是**均衡集**．易知对 L 的子集 B．$\bar{K}(1)B$ 是包含 B 的最小均衡集．L 的(非空)子集 L_0 如果使 $L_0+L_0\subset L_0$ 且 $\mathbf{K}L_0\subset L_0$，就称 L_0 是 L 的**线性子空间**．对 L 的(非空)子集 B，包含 B 的最小线性子空间称为 B **张成的线性子空间**或 B 的**线性包**，记为 $\mathrm{span}(B)$．直接验证可知 $\mathrm{span}(B)$ 等于

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k \,\middle|\, n \text{ 是自然数}, \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{K}, x_1,\cdots,x_n\in B\right\}$$

当 L_0 是线性空间 L 的线性子空间时，对 $x\in L$，称 $x+L_0$ 为 x(关于 L_0)的**陪集**．记(关于 L_0 的)陪集全体为 L/L_0，对于 L/L_0 中的两个元 $x+L_0$，$y+L_0$ 及 $\lambda\in\mathbf{K}$，由于

$$(x+L_0)+(y+L_0)=(x+y)+L_0,$$

$$\lambda(x+L_0)=\lambda x+L_0,$$

以此作为 L/L_0 中的加法及数乘，L/L_0 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，称为 L 关于 L_0 的**商空间**．在不致混淆时，x 的陪集记为 $\tilde{x}$．对于 L 中元 x,y，$\tilde{x}=\tilde{y}$ 等价于 $x-y\in L_0$．

定义 设 L_1,L_2 是 $\mathbf{K}$ 上线性空间，$T:L_1\to L_2$，如果对任何 x，$y\in L_1$ 及 $\lambda\in\mathbf{K}$ 成立 $T(x+y)=Tx+Ty$，$T(\lambda x)=\lambda Tx$，则称 T 是 $L_1\to L_2$ 的(线性)**同态或线性算子**，$T^{-1}(\{0\})$ 称为同态 T 的**核或线性算子** T 的**零空间**．$L_1\to L_2$ 的同态全体记为 $L(L_1\to L_2)$．特别，$L_1\to\mathbf{K}$ 的同态称为 L_1 **上线性泛函**，而 $L(L_1\to\mathbf{K})$ 记为 L_1'．如果 L 是 $\mathbf{K}$ 上线性空间，L_0 是 L 的线性子空间，则映射 $Q:L\to L/L_0$：$x\longmapsto\tilde{x}(=x+L_0)$ 是同态，称为 $L\to L/L_0$ 的**自然同态**或**商映射**．商映射的核即为 L_0．

当 $T_1,T_2\in L(L_1\to L_2)$，$\lambda\in\mathbf{K}$ 时，映射 $x\longmapsto T_1x+T_2x$ 及映射 $x\longmapsto\lambda T_1x$ 都是同态，分别记为 T_1+T_2 及 λT_1，以此作为 $L(L_1\to L_2)$ 的加法及数乘，$L(L_1\to L_2)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间．特别，L_1' 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间．

设 L_1,L_2,L_3 是 $\mathbf{K}$ 上线性空间，对于 $T\in L(L_1\to L_2)$，$S\in L(L_2\to L_3)$，映射 $x\longmapsto S(Tx)\ (x\in L_1)$ 是 $L_1\to L_3$ 的同态，称为 S 与 T 的**复合**或**乘积**，记为 $S\circ T$ 或 ST．复合"$\circ$"可看作是

$$L(L_2\to L_3)\times L(L_1\to L_2)\to L(L_1\to L_3)$$

的映射，当固定一个元(S 或 T)时，"$\circ$"是个线性算子，而"$\circ$"称为是**双线性**的．

定理 1 设 L 是 $\mathbf{K}$ 上线性空间，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 L' 中 n 个线性无关的元，记 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的公共零空间为 L_0，则

(i) L/L_0 是 n 维空间，

(ii) 如果 $f\in L'$ 且 f 在 L_0 上为 0，f 必是 $f_1,\cdots,f_n$ 的线性组合．

证 对于 n 用归纳法来证．设 $n=1$，这时，$f_1\neq 0$，故有 $x_1\in L$ 使 $f_1(x_1)=1$．这说明 $L_0\neq L$，而对于 $x\in L$，记 $f_1(x)$ 为 λ，则 $x-\lambda x_1$

$\in L_0$，也即 $\bar{x}=\lambda\bar{x}_1$，所以 L/L_0 是一维空间．如果 $f\in L'$ 且 f 在 L_0 上为 0，记 $f(x_1)$ 为 μ，则 $f-\mu f_1$ 在 L_0 上为 0 且在 x_1 的值也是 0，故 $f-\mu f_1$ 是在 L 上恒为 0 的泛函，即 $f-\mu f_1=0$，所以 $f=\mu f_1$.

设当 $n=m$ 时定理成立，今证 $n=m+1$ 时定理也成立．记 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 的公共零空间为 M，由归纳假设，L/M 是 m 维的，且 f_{m+1} 在 M 上不恒为 0，又 $L_0=\{x \mid x\in M, f_{m+1}(x)=0\}$．如上所证 M/L_0 是一维空间，故 L/L_0 是 $m+1$ 维的．又如 $f\in L'$ 且 f 在 L_0 上为 0，取 M 中元 y 使 $f_{m+1}(y)=1$ 并记 $f(y)$ 为 λ_1，则 $f-\lambda_1 f_{m+1}$ 在 L_0 上及 y 处都为 0，所以在 M 上为 0，由归纳假设 $f-\lambda_1 f_{m+1}$ 是 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 的线性组合，因而 f 是 $f_1, f_2, \cdots, f_{m+1}$ 的线性组合．证毕．

系 设 L 是线性空间，$f_1, \cdots, f_n\in L'$，L_0 是 $f_1, \cdots, f_n$ 的公共零空间，则

(i) L/L_0 是有限维空间，且 L/L_0 的维数等于 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 中的线性无关组元素的最大个数；

(ii) 如 $f\in L'$ 且 f 在 L_0 上为 0，f 必是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的线性组合．

定义 设 L 是线性空间，τ 是 L 的拓扑，如果

(i) 加法是 $L\times L\to L$ 的连续映射，

(ii) 数乘是 $\mathbf{K}\times L\to L$ 的连续映射，

则称 τ 是 L 的**向量拓扑**．如果 τ 是线性空间 L 的向量拓扑，则称 (L, τ) 是**拓扑线性空间**或**拓扑向量空间**，也称为**线性拓扑空间**．

在上述定义中，$L\times L$ 及 $\mathbf{K}\times L$ 是用乘积拓扑，而 $\mathbf{K}$ 是用通常的拓扑．向量拓扑定义中条件 (i)，(ii) 可改述如下：

(i) 对 $x, y\in L$ 及 $x+y$ 的邻域 O，有 x 的邻域 U 及 y 的邻域 V 使得 $U+V\subset O$，

(ii) 对 $\lambda\in\mathbf{K}, x\in L$ 及 λx 的邻域 O，有 $\varepsilon>0$ 及 x 的邻域 U 使

得$(\lambda+K(\varepsilon))U\subset O$.

引理1 设(L,τ)是拓扑线性空间，那末

(i) 对于$x_0\in L$，映射：$L\to L: x\longmapsto x+x_0$ 是同胚，

(ii) 对于$\lambda_0\in\mathbf{K}$，映射：$L\to L: x\longmapsto \lambda_0 x$ 是连续的，当$\lambda_0\neq 0$时这是个同胚，

(iii) 对0的邻域O，有0的邻域U使$U+U\subset O$，

(iv) 对0的邻域O，有0的均衡邻域U使$U\subset O$.

证 (i) (ii)是显然的. 设O是0的邻域，由加法在$(0,0)$处的连续性. 有0的邻域V及W使$V+W\subset O$，取$U=V\cap W$即得(iii). 又由数乘在$(0, 0)$处的连续性，有$\varepsilon>0$及0的邻域V使$K(\varepsilon)V\subset O$，取$U=K(\varepsilon)V$，U显然是均衡集，又因为$U=\bigcup\limits_{0<|\lambda|<\varepsilon}(\lambda V)$，$U$是开集，所以(iv)成立. 证毕.

系 对拓扑线性空间(L,τ)的0的邻域O及自然数n，有0的邻域V使$V+V+\cdots+V\subset O$(n个V相加).

证 重复用引理1的(iii)即得，证毕.

定理2 设(L,τ)是拓扑线性空间，n是自然数，则$\mathbf{K}\times\mathbf{K}\times\cdots\times\mathbf{K}\times L\times L\times\cdots\times L\to L$的映射

$$\varphi: (\lambda_1,\cdots,\lambda_n,x_1,\cdots,x_n)\longmapsto\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$$

是连续的.

证 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{K}$，$x_1,\cdots,x_n\in L$，记$y=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$. 对$y$的邻域$O$，$O-y$是0的邻域，故有0的邻域$V$使$V+V+\cdots+V\subset O-y$ (n个V相加)，对于$k=1,2,\cdots,n$，有$\varepsilon_k>0$及x_k的邻域U_k使得$(\lambda_k+K(\varepsilon_k))U_k\subset\lambda_k x_k+V$. 记$\lambda_k+K(\varepsilon_k)$为$F_k$，当$\mu_k\in F_k$，$y_k\in U_k$ ($k=1,2,\cdots,n$)时，$\varphi(\mu_1,\cdots,\mu_n,y_1,\cdots,y_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k y_k\in y+(O-y)$

$=O$，所以 φ 在 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,x_1,\cdots,x_n)$ 处连续，故 φ 是连续映射．证毕．

定义 设 (L,τ) 是拓扑线性空间，τ 在 0 点处的基称为 τ 的**局部基**．

由引理 1 的(i)，对于拓扑线性空间 (L,τ)，由一个点处的邻域经平移就可得到任一点处的邻域．引理 1 的(iv)说明 0 的均衡邻域全体是局部基．

3.2.2 有限维线性空间的特征

定义 设 L 是线性空间，$\|\cdot\|$ 是 $L\to\mathbf{R}$ 的映射，如果

(i) $\|x\|\geqslant 0\quad(x\in L)$，

(ii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|\quad(\lambda\in\mathbf{K},x\in L)$，

(iii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\quad(x,y\in L)$，

(iv) $\|x\|=0$ 仅当 $x=0$ 成立，

则称 $\|\cdot\|$ 是 L 上的**范数**．满足上面(i)，(ii)，(iii) 的 $L\to\mathbf{R}$ 的映射称为 L 上的**拟范数或半范数**(semi-norm)．拟范数常用 p 来表示．当 p 是 L 上拟范数时，对于 $x\in L$ 及 $\varepsilon>0$，记 $O(x;p;\varepsilon)=\{y\mid y\in L,p(y-x)<\varepsilon\}$．

引理 1 设 L 是线性空间，p 是 L 上拟范数，则

(i) $\{O(x;p;\varepsilon)\mid x\in L,\varepsilon>0\}$ 是它生成的拓扑 τ 的基，

(ii) τ 是 L 的向量拓扑，

(iii) $\{O(0;p;\varepsilon)\mid\varepsilon>0\}$ 是 τ 的局部基．

证 (i)显然 $\{O(x;p;\varepsilon)\mid x\in L,\varepsilon>0\}$ 中所有集的和集为 L．如果 $x,y,z\in L,\varepsilon,\delta>0$ 使得 $z\in O(x;p;\varepsilon)\cap O(y;p;\delta)$，只要令 $\varepsilon_1=\min(\varepsilon-p(z-x),\delta-p(z-y))$，则 $\varepsilon_1>0$ 且 $O(z;p;\varepsilon_1)\subset O(x;p;\varepsilon)\cap O(y;p;\delta)$，由 3.1.2 定理 3，$\{O(x;p;\varepsilon)\mid x\in L,\varepsilon>0\}$ 是它生成的拓扑 τ 的基．而且还同时证明了对 $z\in L$，$\{O(z;p;\varepsilon)\mid\varepsilon>0\}$ 是 τ

在 z 处的基，因而(iii)也已证得.

(ii) 由 $O\left(x;p;\frac{\varepsilon}{2}\right)+O\left(y;p;\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset O(x+y;p;\varepsilon)$ 即知加法是连续的. 另一方面，对于 $\lambda,\lambda_0\in\mathbf{K},x,x_0\in L$ 有

$$p(\lambda x-\lambda_0x_0)\leqslant p(\lambda x-\lambda_0x)+p(\lambda_0x-\lambda_0x_0)$$
$$\leqslant|\lambda-\lambda_0|p(x)+|\lambda_0|p(x-x_0)$$

因而对 $\lambda_0\in\mathbf{K},x_0\in L$ 及 $\varepsilon>0$，令 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2|\lambda_0|+1}$, $\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2(p(x_0)+\varepsilon)}$ 则

$$(\lambda_0+K(\varepsilon_2))O(x_0;p;\varepsilon_1)\subset O(\lambda_0x_0;p;\varepsilon),$$

所以数乘是连续的，故 τ 是向量拓扑，证毕.

当 p 是线性空间 L 上的拟范数时，由 $\{O(x;p;\varepsilon)|x\in L,\varepsilon>0\}$ 所生成的拓扑称为由拟范数 p **所决定的拓扑**. 特别当 $\|\cdot\|$ 是 L 上范数时，令 $\rho(x,y)=\|x-y\|(x,y\in L)$，$\rho$ 是 L 上的距离，由 ρ 导出的拓扑 τ_ρ 即为由 $\|\cdot\|$ 所决定的拓扑. 在不致混淆时，也用 $\|\cdot\|$ 来表示这个拓扑.

引理 2 设 L 是有限维线性空间(设维数为 m)，$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是 L 的线性基. L 中元 x 有唯一的表示式 $x=\sum_{k=1}^{m}\lambda_kx_k$，令 $\|x\|=\max(|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_m|)$，则 $\|\cdot\|$ 是 L 上的范数，且 $\{y|\|y\|=1\}$ 是 $(L,\|\cdot\|)$ 中的紧集.

证 直接验证即知 $\|\cdot\|$ 是 L 上范数. 记 $A=\{y|\|y\|=1\}$，由 3.1.6 定理 2，只要证明 A 中点列必有子点列收敛于 A 中的元. 设 $\{y_n\}$ 是 A 中点列，$y_n=\lambda_{n,1}x_1+\cdots+\lambda_{n,m}x_m(n=1,2,\cdots)$ 由于 $\lambda_{j,l}\in K(1)(j=1,2,3,\cdots;l=1,2,\cdots,m)$，易知有自然数列的子列 $\{n_k\}$，使得 $\lambda_{n_k,l}\to\lambda_l^{(0)}(l=1,2,\cdots,m)$. 显然 $\sum_{l=1}^{m}|\lambda_l^{(0)}|=1$. 记 $y=\sum_{l=1}^{m}$

$\lambda_l^{(l)}x_l$，则 $y\in A$ 且 $y_{n_k}\to y$. 所以 A 是紧集. 证毕.

定理 1 设 L 是线性空间，τ_1,τ_2 是 L 的两个向量拓扑，则 τ_2 比 τ_1 强的充分必要条件是：对于 0 的 τ_1 邻域 O，有 0 的 τ_2 邻域 $V\subset O$.

证 必要性是显然的(取 $V=O$ 即可). 故只要证充分性.

如果 L 中的网 $\{x_\alpha\}$ 及元 x 使 $x_\alpha\to x(\tau_2)$，则 $x_\alpha-x\to 0(\tau_2)$，对于 0 的 τ_1 邻域 O，先取 0 的 τ_2 邻域 $V\subset O$，从而有足标 α_0，使当 $\alpha_0\prec\alpha$ 时 $x_\alpha-x\in V$，所以 $x_\alpha-x\to 0(\tau_1)$. 从而 $x_\alpha\to x(\tau_1)$. 由 3.1.2 定理 1，τ_2 比 τ_1 强. 证毕.

定理 2 设 L 是有限维线性空间，则有 L 的唯一拓扑 τ 使 (L,τ) 成为 Hausdorff 的拓扑线性空间.

证 设 L 的维数为 m，取定 L 的一组基 $x_1,\cdots,x_m$ 并如引理 2 作范数 $\|\cdot\|$. 易知 $(L,\|\cdot\|)$ 是 Hausdorff 的拓扑线性空间.

设 τ 是 L 的(向量)拓扑且 (L,τ) 是 Hausdorff 的拓扑线性空间，下面证明 $\|\cdot\|$ 与 τ 是同一个拓扑.

由 3.2.1 定理 2，m 个 $\mathbb{K}$ 与 m 个 L 的乘积拓扑空间到 L 的映射 (L 中拓扑用 τ) $\varphi:(\lambda_1,\cdots,\lambda_m,y_1,\cdots,y_m)\mapsto\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_ky_k$ 是连续的，由 φ 在 $(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots x_m)$ 处的连续性，对于 0 的 τ 邻域 O，有 $\varepsilon>0$，使当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in K(\varepsilon)$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_kx_k\in O$，因此 $\{y\mid\|y\|<\varepsilon\}\subset O$，即 $O(0;\|\cdot\|;\varepsilon)\subset O$，所以 $\|\cdot\|$ 比 τ 强.

记 $A=\{y\mid\|y\|=1\}$，A 是 $(L,\|\cdot\|)$ 中紧集，$\|\cdot\|$ 比 τ 强，故 A 是 (L,τ) 中紧集，由于 (L,τ) 是 Hausdorff 空间，A 是 (L,τ) 中闭集，所以 A^c 是 0 的 τ 邻域，故有均衡的 0 的 τ 邻域 $U\subset A^c$. 由于 $U\cap A=\varnothing$，对 $x\in U$ 必定 $\|x\|\neq 1$，又由 U 是均衡集，可知对 $x\in U$ 必定 $\|x\|<1$，因此 $U\subset O(0;\|\cdot\|;1)$，$\varepsilon U\subset\varepsilon O(0;\|\cdot\|;1)=O(0;\|\cdot\|;\varepsilon)$

$(\varepsilon>0)$. 由定理 1 即知 τ 比$\|\cdot\|$强. 故$\|\cdot\|$与 τ 是同一拓扑. 证毕.

系 1 设(L,τ)是有限维的 Hausdorff 的拓扑线性空间, L_0 是 L 的线性子空间,则 L_0 是(L,τ)中闭集.

证 记 L, L_0 的维数为 n, m. 不妨设 $n>m>0$. 取 L_0 的基 $x_1,x_2,\cdots,x_m$, 然后再加上 $x_{m+1},\cdots,x_n$ 成为 L 的基. 对于这组基 $x_1,\cdots,x_n$, 如引理 2 作范数$\|\cdot\|$, 由$\|\cdot\|$决定的拓扑(仍记为$\|\cdot\|$)也就是 τ. 当 $y\overline{\in}L_0$时, $y=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$, 且 $\lambda_{m+1},\cdots,\lambda_n$ 中总有不等于 0 的数,记这数的绝对值为 $\varepsilon(>0)$, 易见 $L_0\cap O(y;\|\cdot\|;\varepsilon)=\varnothing$, 所以 $y\overline{\in}L_0$, 因而 $L_0=L_0$, 即 L_0是闭集. 证毕.

系 2 设(L,τ)是 Hausdorff 的拓扑线性空间, L_0 是 L 的有限维线性子空间,则 L_0 是(L,τ)中闭集.

证 如果 $x\in\overline{L_0}^{(\tau)}$, 记 $\operatorname{span}(\{x\}\cup L_0)$ 为 M, τ 在 M 上的诱导拓扑(见 3.1.6) 记为 τ_M, 在(M,τ_M)中 L_0 是闭集(系 1), 由 $\overline{L_0}^{(\tau_M)}=\overline{L_0}^{(\tau)}\cap M$, 即知 $x\in\overline{L_0}^{(\tau_M)}=L_0$, 因而 $\overline{L_0}^{(\tau)}=L_0$, 证毕.

定理 3 设(L,τ)是 Hausdorff 的拓扑线性空间,如果有非空开集 O 使 $\overline{O}$ 是紧集,则 L 是有限维的.

证 取 $x_0\in O$, $O-x_0$ 是 0 的邻域, 再取 0 的均衡邻域 U 使 $U\subset O-x_0$, 由于 $\overline{O}-x_0$ 是紧集, $\overline{U}$ 是紧集.

下面证明$\{tU\mid t>0\}$是 τ 的局部基. 对于 0 的任一邻域 V, 取 0 的均衡邻域 W 使 $W+W\subset V$, 因为$\{y+W\mid y\in\overline{U}\}$是覆盖 $\overline{U}$ 的开集族,由 $\overline{U}$ 的紧性,有有限个 $\overline{U}$ 中元 $y_1,\cdots,y_n$ 使得 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}(y_k+W)\supset\overline{U}\supset U$, 又由数乘的连续性,有 $\varepsilon>0$(可取 $\varepsilon<1$)使 $\varepsilon y_k\in W$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 从而 $\varepsilon U\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}(\varepsilon y_k+\varepsilon W)\subset W+W\subset V$, 所以 $\{tU\mid t>0\}$是 τ 的局部基.

记 $W_1=\frac{1}{3}U$, 同样由 $\{z+W_1|z\in\bar{U}\}$ 覆盖 $\bar{U}$ 及 $\bar{U}$ 的紧性,有有限个元 $z_1,\cdots,z_m$ 使 $\bigcup\limits_{k=1}^{m}(z_k+W_1)\supset\bar{U}\supset U$. 记 $z_1,\cdots,z_m$ 张成的线性子空间为 L_0,则 $U\subset L_0+W_1$.

最后用反证法证明 $L=L_0$: 如果有 $z_0\overline{\in}L_0$, 考虑数集 $F=\{t|t>0$, z_0+tU 与 L_0 的交集非空$\}$. 由于有 $\varepsilon>0$ 使 $-\varepsilon z_0\in U$, 故 $-z_0\in\frac{1}{\varepsilon}U$, $0\in z_0+\frac{1}{\varepsilon}U$, 从而$\frac{1}{\varepsilon}\in F$,所以$F$是非空的. 另一方面, 因 $L_0=\bar{L}_0$(定理2系2), $\{z_0+tU|t>0\}$是 τ 在 z_0 处的基,由 $z_0\overline{\in}\bar{L}_0$,故有 $t>0$ 使 z_0+tU 与 L_0 不交, 即 $F\neq(0,\infty)$. 又由F的作法,当 $t_0\in F$ 时,$[t_0,\infty)\subset F$. 记 $d=\inf\limits_{t\in F}(t)$, 于是 $d>0$ 且 $(d,\infty)\subset F$. 所以 z_0+2dU 与 L_0 交集非空,即有 $u\in U$ 使 $z_0+2du\in L_0$, 但 $U\subset L_0+\frac{1}{3}U$, 故有 $z\in L_0,u_1\in U$ 使 $u=z+\frac{1}{3}u_1$,这样就得到 $z_0+2d\left(z+\frac{1}{3}u_1\right)\in L_0$, $z_0+\frac{2d}{3}u_1\in L_0$, 故$\frac{2}{3}d\in F$, 与 d 的定义相矛盾,从而 $L=L_0$, L是有限维空间. 证毕.

引理 3 设(L,τ) 是拓扑线性空间, A, B 是 L 的非空子集,那末

(i) 如果 A 是 L 的线性子空间,则 $\bar{A}$ 是线性子空间;

(ii) 如果 A,B 都是紧集,则 $A+B$ 是紧集;

(iii) 如果 A 是紧集,B 是闭集,则 $A+B$ 是闭集.

证 (i) 对 $x_0\in A$, 由 $x_0+A\subset A\subset\bar{A}$ 及映射 $x\longmapsto x+x_0$ 是连续的,由 3.1.3 定理 2, 闭集的原象是闭集, 即知 $x_0+\bar{A}\subset\bar{A}$,所以 $A+\bar{A}\subset\bar{A}$. 又由对 $y_0\in\bar{A},y_0+A\subset\bar{A}$ 得 $y_0+\bar{A}\subset\bar{A}$, 所以有 $\bar{A}+\bar{A}\subset\bar{A}$. 同样对 $\lambda\in\mathbb{K}$,由 $\lambda A\subset A\subset\bar{A}$ 即知 $\lambda\bar{A}\subset\bar{A}$, 所以 $\bar{A}$ 是 L 的线性子空间.

(ii) 因加法是 $L\times L\to L$ 的连续映射，由于 A，B 都是紧集，$A\times B$ 是 $L\times L$(在乘积拓扑下)中的紧集. 所以在加法映射下，$A\times B$ 的象(即 $A+B$)是 L 中紧集.

(iii) 设 $x_0\overline{\in}A+B$，对于 $x\in A$，$x_0-x\overline{\in}B$. B^c 是 x_0-x 的邻域因而有 0 的均衡邻域 U 使 $(x_0-x)+(U+U)\subset B^c$，这样取的 U 记为 U_x，由于 $\{x+U_x|x\in A\}$ 覆盖 A 及 A 是紧集，故有有限个 A 中元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}(x_k+U_{x_k})\supset A$. 记 $V=\bigcap\limits_{k=1}^{n}U_{x_k}$，$V$ 是 0 的邻域且 $x_0+V-A\subset B^c$，故 x_0+V 与 $A+B$ 不交. 由于当 $x_0\overline{\in}A+B$ 时，有 x_0 的邻域 x_0+V 与 $A+B$ 不交，$A+B$ 是闭集. 证毕.

定义　设 (L,τ) 是拓扑线性空间，$A\subset L$，包含 A 的最小线性闭子空间称为 A 的**线性闭包**或 **A 张成的线性闭子空间**.

A 张成的线性闭子空间即为 $\overline{\mathrm{span}(A)}$.

3.2.3　线性连续算子和线性连续泛函

定义　设 (L_1,τ_1)，(L_2,τ_2) 是拓扑线性空间，如果 $T\in L(L_1\to L_2)$ 且 T 是连续的，则称 T 是 $L_1\to L_2$ 的**线性连续算子**或**连续线性算子**. $L_1\to L_2$ 的线性连续算子全体记为 $B(L_1\to L_2)$. 特别，$B(L_1\to\mathbb{K})$ 中的 f 称为 L_1 上的**线性连续泛函**或**连续线性泛函**，而记 $B(L_1\to\mathbb{K})$ 为 $L_1^{\#}$.

连续的概念是与拓扑有关的，在必要时为指明拓扑，$L_1^{\#}$ 就记为 $(L_1,\tau_1)^{\#}$.

引理 1　设 (L_1,τ_1)，(L_2,τ_2) 是拓扑线性空间，$T\in L(L_1\to L_2)$，则 $T\in B(L_1\to L_2)$ 的充分必要条件是 T 在 0 处连续.

证　显然只要证充分性. 如果 L_1 中网 $\{x_\alpha\}$ 及元 x 使得 $x_\alpha\to x(\tau_1)$，则 $x_\alpha-x\to 0(\tau_1)$，故 $T(x_\alpha-x)\to 0(\tau_2)$，即 $Tx_\alpha-Tx\to 0(\tau_2)$，从而 $Tx_\alpha\to Tx(\tau_2)$. 因此 T 是连续的. 证毕.

定理 1 设(L,τ)是拓扑线性空间，$f\in L'$，则下列各点都等价：

(i) $f\in L^*$；

(ii) f 在 0 点处连续；

(iii) 有 0 的邻域U使得f在U上取值是有界的；

(iv) 有非空开集O使得$f(O)\neq\mathbf{K}$；

(v) f 的零空间是闭集.

证 (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv)及(i)$\Longrightarrow$(v)是显然的.

(iv)$\Longrightarrow$(i) 设f在非空开集O上的取值$f(O)\neq\mathbf{K}$，取$x\in O$并取 0 的均衡邻域$U\subset O-x$，这时$f(O-x)\neq\mathbf{K}$，$f(U)\subset f(O-x)$，所以$f(U)\neq\mathbf{K}$. 设$\lambda\overline{\in}f(U)$. 由于$U$是均衡集，$f\in L'$，可知对于$y\in U$，$|f(y)|<|\lambda|$. 于是对$\varepsilon>0$，$f\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}U\right)\subset K(\varepsilon)$，这说明$f$在 0 点处连续，由引理1，$f\in L^*$.

(v)$\Longrightarrow$(i) 记$f^{-1}(\{0\})$为L_0，如果$L_0=L$，则$f=0$，故$f\in L^*$；如果$L_0\neq L$，则L_0^c是非空开集，且$0\overline{\in}f(L_0^c)$，故由上知$f\in L^*$. 证毕.

定理 2 设L_1是线性空间，(L_2,τ_2)是拓扑线性空间，$T\in L(L_1\to L_2)$，则$\{T^{-1}(O)\mid O\in\tau_2\}$是$L_1$的向量拓扑.

证 记$\tau_1=\{T^{-1}(O)\mid O\in\tau_2\}$. 由于$T^{-1}(L_2)=L_1$，$T^{-1}(\varnothing)=\varnothing$，且$T^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha}T^{-1}(A_\alpha)$，$T^{-1}(A_1\cap A_2)=T^{-1}(A_1)\cap T^{-1}(A_2)$（这后两式对于$L_2$的任何一族子集$\{A_\alpha\}$及$A_1$，$A_2$都是成立的)，所以从$\tau_2$是拓扑即知$\tau_1$是($L_1$的)拓扑. 下面证明加法和数乘的连续性.

如果$x,y\in L_1$，$V\in\tau_1$且$x+y\in V$，于是有$O\in\tau_2$使$V=T^{-1}(O)$，所以$Tx+Ty=T(x+y)\in O$，从而有Tx的邻域O_1，Ty的邻域O_2使$O_1+O_2\subset O$. 由此$x\in T^{-1}(O_1)$，$y\in T^{-1}(O_2)$且$T^{-1}(O_1)+T^{-1}(O_2)$

$\subset T^{-1}(O)=V$，这就说明了加法的连续性.

类似地，如果 $\lambda\in\mathbb{K}$，$x\in L_1$，$V\in\tau_1$ 且 $\lambda x\in V$，于是有 $O\in\tau_2$ 使 $V=T^{-1}(O)$，故 $\lambda Tx=T(\lambda x)\in O$，从而有 $\varepsilon>0$ 及 Tx 的邻域 O_1 使得 $(\lambda+K(\varepsilon))O_1\subset O$，由此 $x\in T^{-1}(O_1)$ 且 $(\lambda+K(\varepsilon))T^{-1}(O_1)\subset T^{-1}(O)=V$，因而数乘是连续的，所以 τ_1 是 L_1 的向量拓扑. 证毕.

易见在定理 2 的条件下，所作的 τ_1 是使 T 连续的最弱的 L_1 的拓扑. 又当 $\tau(\subset\tau_2)$ 是 τ_2 的局部基时，$\{T^{-1}(U)\,|\,U\in\tau\}$ 是 τ_1 的局部基.

3.2.4 有界集和完全有界集

定义 设 L 是线性空间，A，B 是 L 的非空子集. 如果有 $\varepsilon>0$ 使 $K(\varepsilon)B\subset A$，则称 A **吸收** B. 如果 A 吸收任何单元集，则称 A 是**吸收集**.

定义 设 (L,τ) 是拓扑线性空间，$B\subset L$. 如果 0 的任一邻域都吸收 B，则称 B 是 $(L,\ \tau)$ 中**有界集**. 如果对 0 的任一邻域 O，有 L 的有限子集 A 使 $B\subset A+O$，则称 B 是 $(L,\ \tau)$ 中的**完全有界集**.

在拓扑线性空间中，0 的任何邻域吸收任一单元集，因此 0 的邻域是吸收集，单元集是有界集.

引理 1 设 (L,τ) 是拓扑线性空间，$B\subset L$，那末

(i) 如果对 0 的任何邻域 O，有 $\varepsilon>0$ 使 $\varepsilon B\subset O$，则 B 有界，

(ii) 如果 B 是完全有界集，则对 0 的任何邻域 O，有 B 的有限子集 A 使 $B\subset A+O$.

证 (i) 设 B 满足所说的条件，则对 0 的邻域 O，先取 0 的均衡邻域 $U\subset O$，从而有 $\varepsilon>0$ 使 $\varepsilon B\subset U$，故 $K(\varepsilon)B\subset U\subset O$，所以 B 是有界集.

(ii) 设 B 完全有界，对 0 的邻域 O，先取 0 的均衡邻域 V 使

V：$V\subset O$，又有有限个 L 中元 $x_1,\cdots,x_n$ 使 $B\subset\bigcup_{k=1}^{n}(x_k+V)$. 不妨设 $(x_k+V)\cap B$ 非空 $(k=1,2,\cdots,n)$. 取 $y_k\in(x_k+V)\cap B$ $(k=1,2,\cdots,n)$，于是 $x_k\in y_k+V$ $(K=1,2,\cdots,n)$ 而 $B\subset\bigcup_{k=1}^{n}(y_k+O)$. 令 $A=\{y_1,\cdots,y_n\}$ 即知 $A\subset B$ 且 $B\subset A+O$. 证毕.

引理 2 设 (L,τ) 是拓扑线性空间，$A\subset L$，则 A 是 (L,τ) 中有界集的充分必要条件是：A 中任何点列 $\{x_n\}$ 使 $\frac{1}{n}x_n\to0$.

证 必要性 如 A 有界，$\{x_n\}$ 是 A 中点列，则对于 0 的邻域 O，有 $\varepsilon>0$ 使 $K(\varepsilon)A\subset O$，取 N 使 $\frac{1}{N}<\varepsilon$，则当 $n\geqslant N$ 时，$\frac{1}{n}x_n\in O$ 故 $\frac{1}{n}x_n\to0(\tau)$.

充分性 用反证法. 如 A 不是有界集，则有 0 的邻域 O 使得对任何自然数 n，$\frac{1}{n}A\not\subset O$，故有 $x_n\in A$ 使 $\frac{1}{n}x_n\overline{\in}O$，这时 $\{x_n\}$ 是 A 中点列但它不使 $\frac{1}{n}x_n\to0(\tau)$. 证毕.

系 设 (L_1,τ_1)，(L_2,τ_2) 是拓扑线性空间，$T\in B(L_1\to L_2)$，则对于 (L_1,τ_1) 中有界集 A，$T(A)$ 是 (L_2,τ_2) 中有界集.

引理 3 设 (L_1,τ_1) (L_2,τ_2) 是拓扑线性空间，$T\in B(L_1\to L_2)$，则对 (L_1,τ_1) 中完全有界集 A，$T(A)$ 是 (L_2,τ_2) 中完全有界集.

证 对 (L_2,τ_2) 中 0 的邻域 O，$W=T^{-1}(O)$ 是 (L_1,τ_1) 中 0 的邻域，所以有 L_1 的有限子集 B 使 $A\subset W+B$，从而 $T(A)\subset O+T(B)$. 由于 $T(B)$ 是有限集，所以 $T(A)$ 是 (L_2,τ_2) 中完全有界集. 证毕.

定理 1 在拓扑线性空间 (L,τ) 中，紧集是完全有界集，完全有界集是有界集.

证　设 A 是紧集，则对于 0 的邻域 O，由于 $\{O+x|x\in A\}$ 覆盖 A，故有 A 的有限子集 B 使 $A\subset O+B$，即 A 完全有界.

又如果 A 是完全有界集，对 0 的邻域 O，先取 0 的均衡邻域 V 使 $V+V\subset O$，又有 L 中有限集 B 使 $A\subset B+V$. 因为 B 是有限集，所以有 $\varepsilon>0$ 使 $\varepsilon B\subset V$(可取 $\varepsilon<1$)，从而 $\varepsilon A\subset\varepsilon B+\varepsilon V\subset V+V\subset O$，所以 A 是有界集. 证毕.

3.2.5　局部基的特征，商拓扑

定理 1　设 L 是线性空间，$\boldsymbol{S}$ 是 L 的(非空)集类，且对任何 $A\in\boldsymbol{S}$，$0\in A$. 如果

(i) 对任何 $U,V\in\boldsymbol{S}$，有 $W\in\boldsymbol{S}$ 使 $W\subset U\cap V$;

(ii) 对任何 $U\in\boldsymbol{S}$ 有 $V\in\boldsymbol{S}$ 使 $V+V\subset U$;

(iii) 对任何 $U\in\boldsymbol{S}$ 有 $V\in\boldsymbol{S}$ 使 $K(1)V\subset U$;

(iv) 当 $U\in\boldsymbol{S}$ 且 $x\in U$ 时有 $V\in\boldsymbol{S}$ 使 $x+V\subset U$;

(v) $\boldsymbol{S}$ 中每个 U 都是吸收集.

则 $\boldsymbol{S}$ 是 L 的向量拓扑的局部基.

证　首先我们注意，当 $\boldsymbol{S}$ 是 L 的向量拓扑 τ 的局部基时，上列的各点都是成立的.

记 $\boldsymbol{S}(y)=\{y+O|O\in\boldsymbol{S}\}$，并把 $\bigcup\limits_{y\in L}\boldsymbol{S}(y)$ 生成的拓扑记为 τ. 先证明 $\bigcup\limits_{y\in L}\boldsymbol{S}(y)$ 是 τ 的基. 易见 $\bigcup\limits_{y\in L}\boldsymbol{S}(y)$ 中所有集的和集是 L，如果 $U_1,V_1\in\bigcup\limits_{y\in L}\boldsymbol{S}(y)$ 且 $z_0\in U_1\cap V_1$，于是有 $x_0,y_0\in L$ 及 $U,V\in\boldsymbol{S}$ 使得 $U_1=x_0+U$ $V_1=y_0+V$. 因为 $z_0-x_0\in U$，$z_0-y_0\in V$，由性质(iv)有 $W_1,W_2\in\boldsymbol{S}$ 使 $(z_0-x_0)+W_1\subset U$，$(z_0-y_0)+W_2\subset V$，又由性质(i)有 $W\in\boldsymbol{S}$ 使 $W\subset W_1\cap W_2$，从而 $(z_0-x_0)+W\subset U$，$(z_0-y_0)+W\subset V$，所以 $z_0+W\subset U_1$，$z_0+W\subset V_1$. 而 $z_0+W\in\boldsymbol{S}(z_0)$. 由3.1.2

定理 3，$\bigcup_{y\in L} \boldsymbol{S}(y)$ 是 τ 的基，并且对任何 $x\in L$，$\boldsymbol{S}(x)$ 是 τ 在 x 处的基. 下面证明 τ 是向量拓扑.

设 $x, y\in L$ 且 O 是 $x+y$ 的 τ 邻域，因 $\boldsymbol{S}(x+y)$ 是 τ 在 $x+y$ 处的基，故有 $U\in\boldsymbol{S}$ 使 $(x+y)+U\subset O$. 由性质(ii)有 $V\in\boldsymbol{S}$ 使 $V+V\subset U$，从而 $(x+V)+(y+V)\subset O$，所以加法是连续的.

设 $\lambda\in\mathbb{K}$，$x\in L$ 且 O 是 λx 的 τ 邻域，有 $U\in\boldsymbol{S}$ 使 $\lambda x+U\subset O$ 取自然数 $n>|\lambda|+1$，重复用性质(ii)，有 $W\in\boldsymbol{S}$ 使 $W+W+\cdots+W\subset U$（式中为 $n+1$ 个 W）又由性质(iii)有 $V\in\boldsymbol{S}$ 使 $\bar{K}(1)V\subset W$. 由性质(v)，V 是吸收集，所以有 $\varepsilon>0$（可取 $\varepsilon<1$）使得 $\varepsilon x\in V$. 对于这样的 ε 及 $V\in\boldsymbol{S}$，当 $\mu\in\lambda+K(\varepsilon)$，$y\in x+V$ 时，由于

$$\mu y-\lambda x=(\mu-\lambda)x+\mu(y-x)$$

$$=\frac{\mu-\lambda}{\varepsilon}\cdot\varepsilon x+\mu(y-x)\in W+\mu(y-x),$$

又 $\mu(y-x)=\dfrac{\mu}{n}n(y-x)\in W+W+\cdots+W$（$n$ 个 W 相加）. 因而

$$\mu y\in\lambda x+(W+\cdots+W)\subset\lambda x+U\subset O,$$

即 $(\lambda+K(\varepsilon))(x+V)\subset O$，故数乘是连续的. τ 是向量拓扑. 证毕.

显然以 $\boldsymbol{S}$ 为局部基的向量拓扑是唯一的.

定理 2 设 L 是线性空间，τ_α 是 L 的一族向量拓扑，则比每个 τ_α 都强的最弱拓扑是向量拓扑.

证 取 τ_α 的局部基 $\boldsymbol{S}_\alpha$（例如令 $\boldsymbol{S}_\alpha$ 是 0 的 τ_α 邻域全体）并记 $\bigcup_\alpha \boldsymbol{S}_\alpha$ 中有限个集的交集全体为 $\boldsymbol{S}$. 由于每个 $\boldsymbol{S}_\alpha$ 都满足定理1中的性质(i)—(v)，当 $U\in\boldsymbol{S}$ 时，$U=U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_n$（$U_1, \cdots, U_n\in\bigcup_\alpha \boldsymbol{S}_\alpha$）对每个 $k=1, 2, \cdots, n$，U_k 在某个 $\boldsymbol{S}_{\alpha_k}$ 中，因而必有 $V_k\in\boldsymbol{S}_{\alpha_k}$，使得 $V_k+V_k\subset U_k$. 记 $V=V_1\cap\cdots\cap V_n$，则 $V\in\boldsymbol{S}$ 且 $V+V\subset U$，所以(ii)

满足. 对于(iii)及(iv)也同样可证. 由 S 中两集的交仍在 S 中, (i)显然成立,又因有限个吸收集的交仍是吸收集,(v)也成立. 可见 S 是 L 的向量拓扑 τ 的局部基, 易见 τ 是比每个 τ_α 都强的最弱拓扑. 证毕.

系 1　设 L 是线性空间, τ_α 是 L 的一族向量拓扑, S_α 是 τ_α 的局部基,则 $\bigcup\limits_\alpha S_\alpha$ 是比每个 τ_α 都强的最弱拓扑 τ(它是 L 的向量拓扑)在 0 点处的子基.

系 2　设 L 是线性空间, (L_α,τ_α) 是一族拓扑线性空间, $T_\alpha\in\mathscr{L}(L\to L_\alpha)$,则使每个 T_α 都连续的 L 的最弱拓扑是向量拓扑.

定理 3　设 (L,τ) 是拓扑线性空间, L_0 是 L 的线性子空间, Q 是 $L\to L/L_0$ 的自然同态, 则 $\{Q(V)\mid V\in\tau\}$ 是 L/L_0 的向量拓扑, 且这是使 Q 是 $L\to L/L_0$ 的连续映射的最强拓扑.

证　因为 Q 的零空间是 L_0, 故对于 $A\subset L$, $Q(A)=Q(A+L_0)$ 且 $Q^{-1}(Q(A))=A+L_0$. 对于 L 的一族子集 $\{A_\alpha\}$, $Q\left(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha\right)=\bigcup\limits_\alpha Q(A_\alpha)$. 又当 B_1, B_2 是 L 的子集时, $Q(B_1\cap B_2)\subset Q(B_1)\cap(B_2)$, 但如果 $\tilde{x}(=x+L_0)$ 在 $Q(B_1)\cap Q(B_2)$ 中时, $x\in B_1+L_0$, $x\in B_2+L_0$, 由此即知 $Q((B_1+L_0)\cap(B_2+L_0))=Q(B_1+L_0)\cap Q(B_2+L_0)$. 由 $\{Q(V)\mid V\in\tau\}=\{Q(V+L_0)\mid V\in\tau\}$ 及当 $V\in\tau$ 时, $V+L_0\in\tau$, 即知 $\{Q(V)\mid V\in\tau\}$ 是 L/L_0 的拓扑,而且这个拓扑使 Q 是连续的. 下面证明它是向量拓扑.

对于 $\tilde{x}$, $\tilde{y}\in L/L_0$ 及 $\tilde{x}+\tilde{y}$ 的邻域 O, 有 $V\in\tau$ 使 $O=Q(V)=Q(V+L_0)$, $x+y\in V+L_0$, 所以 $V+L_0$ 是 $x+y$ 的邻域,从而有 x 的邻域 V_1 及 y 的邻域 V_2 使 $V_1+V_2\subset V+L_0$, 从而 $Q(V_1)$, $Q(V_2)$ 是 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 的邻域且 $Q(V_1)+Q(V_2)\subset Q(V_1+V_2)\subset Q(V+L_0)=O$, 即加法是连续的. 类似地, 如果 $\lambda\in\mathbb{K}$, $\tilde{x}\in L/L_0$ 且 O 是 $\lambda\tilde{x}$ 的邻域,有

$V\in\mathscr{V}\tau$使$O=Q(V)=Q(V+L_0)$，$V+L_0$是λx的邻域。从而有$\varepsilon>0$及x的邻域V_1使$(\lambda+K(\varepsilon))V_1\subset V+L_0$，所以$(\lambda+K(\varepsilon))Q(V_1)\subset Q(V+L_0)=O$，而$Q(V_1)$是$\bar{x}$的邻域，从而数乘是连续的，即$\{Q(V)|V\in\tau\}$是向量拓扑。最后证明它是使$Q$连续的$L/L_0$的最强拓扑。

如τ_1是L/L_0的拓扑，且它使Q是$(L,\tau)\to(L/L_0,\tau_1)$的连续映射。对$O_1\in\tau_1$，$Q^{-1}(O_1)\in\tau$，显然$Q(Q^{-1}(O_1))\in\{Q(V)|V\in\tau\}$，但因为$Q$是满射，$Q(Q^{-1}(O_1))=O_1$，即$\tau_1$比$\{Q(V)|V\in\tau\}$弱。证毕。

当(L,τ)是拓扑线性空间，L_0是L的线性子空间时，称$\{Q(V)|V\in\tau\}$（Q是$L\to L/L_0$的自然同态）为L/L_0的**商拓扑**，记为τ_Q

系 1 $\tau_Q=\{O|O\subset L/L_0,Q^{-1}(O)\in\tau\}$.

系 2 τ_Q是 Hausdorff 拓扑等价于L_0是(L,τ)中闭集.

证 如果τ_Q是 Hausdorff 拓扑，则$\{0\}$是L/L_0中闭集，因而$Q^{-1}(\{0\})=L_0$是(L,τ)中闭集。反之，如果L_0是(L,τ)的闭子空间，则对于L/L_0中非零元$\bar{x}$（即$x\bar{\in}L_0$），由于有0的τ邻域U与$x-L_0$不交，取0的均衡τ邻域W使$W+W\subset U$，于是W与$(x+L_0)+W$不交，易知这两个集在Q下的象是0及$\bar{x}$的邻域且不相交，即τ_Q是 Hausdorff 拓扑。证毕.

3.2.6 完备集，完备性

定义 设(L,τ)是拓扑线性空间，$\{x_\alpha\}$是L中的网，如果对0的任何邻域O，有α_0使得当$\alpha_0\prec\alpha,\alpha_0\prec\beta$时，$x_\alpha-x_\beta\in O$，则称$\{x_\alpha\}$是$(L,\tau)$的**基本网**或 **Cauchy 网**. 而足标集是自然数集$\mathbb{N}$的基本网$\{x_n\}$称为**基本点列**或 **Cauchy 点列**. 如果$\{x_\alpha\}$是 Cauchy 网且$\{x_\alpha|\alpha\in D\}$是有界集，称$\{x_\alpha\}$是**有界 Cauchy 网**. 设A是L的（非空）子集，如果A中的 Cauchy 网$\{x_\alpha\}$必定收敛于A的某点x，就称A是(L,τ)的**完备集**. 类似地，如果A中的任何 Cauchy 点列（或有界 Cauchy 网）必收敛于A中的点，就称A是(L,τ)中的点

列完备(或有界完备)集．当 L 本身完备(点列完备，有界完备)时，**称 (L,τ) 完备的(点列完备的，有界完备的)空间**．

易知 (L,τ) 中收敛的网是 Cauchy 网，但可能不是有界网．

由定义可知在完备(点列完备，有界完备)的拓扑线性空间 (L,τ) 中，闭集 A 是完备(点列完备，有界完备)的

引理 1　拓扑线性空间中的 Cauchy 点列是有界的．

证　设 $\{x_n\}$ 是拓扑线性空间 (L,τ) 中的 Cauchy 点列．对于 0 的邻域 O，取 0 的均衡邻域 W 使 $W+W\subset O$，于是有自然数 N 使当 $m,n\geqslant N$ 时，$x_m-x_n\in W$，故当 $m\geqslant N$ 时，$x_m-x_N\in W$．因为 W 是吸收集，有 $\varepsilon>0$（且 $\varepsilon<1$），使 $\varepsilon x_k\in W\,(k=1,2,\cdots,N)$．从而对任何自然数 n，$\varepsilon x_n\in O$，所以 $\{x_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 有界．证毕．

系　设 (L,τ) 是拓扑线性空间，如 (L,τ) 完备就必定有界完备，如 (L,τ) 有界完备就必定点列完备．

引理 2　设 (L,τ) 是拓扑线性空间，A 是 (L,τ) 中紧集，则 A 是 (L,τ) 的完备集．

证　设 $\{x_\alpha\}$ 是 A 中的 Cauchy 网．对足标 α，记 $B_\alpha=\{x_\beta\mid\alpha\prec\beta\}$，由于足标集是定向集，所以 $\{B_\alpha\}$ 是联族，又因 A 是紧集，$\bigcap\limits_\alpha(\bar{B}_\alpha\cap A)\neq\varnothing$，设 $y\in\bigcap\limits_\alpha(\bar{B}_\alpha\cap A)$．显然 $y\in A$，下面证明 $x_\alpha\to y$．

对 0 的邻域 O，取 0 的均衡邻域 W 使 $W+W\subset O$，由于 $\{x_\alpha\}$ 是 Cauchy 网，有 α_0，使得当 $\alpha_0\prec\alpha,\beta$ 时，$x_\alpha-x_\beta\in W$．又因 $y\in\bar{B}_{\alpha_0}$，$y+W$ 与 B_{α_0} 交集非空，故有 α_1 使 $\alpha_0\prec\alpha_1$ 且 $x_{\alpha_1}\in y+W$，所以当 $\alpha_0\prec\alpha$ 时，$x_\alpha-x_{\alpha_1}\in W$，$x_\alpha\in x_{\alpha_1}+W\subset y+W+W=W\subset y+O$，即知 $x_\alpha\to y(\tau)$，A 是 (L,τ) 的完备集．证毕．

定义　设 (L,τ) 是拓扑线性空间，F 是 L 的滤子，如果对 0 的任何邻域 O，有 $B\in F$ 使 $B-B\subset O$，则称 F 是 Cauchy 滤子．

定理 1　设 (L,τ) 是拓扑线性空间，A 是 L 的非空子集，则 A

是(L, τ)的完备集的充分必要条件是：(L, τ)的含有A的任何Cauchy滤子$\boldsymbol{F}$必定收敛于A中的某一点.

证 充分性 设$\{x_\alpha\}$是A中Cauchy网，对于足标α_0，记$B_{\alpha_0}=\{x_\alpha|\alpha_0\prec\alpha\}$，又令$\boldsymbol{F}=\{B|B\subset L$且有$\alpha_0$使$B\supset B_{\alpha_0}\}$易见$\boldsymbol{F}$是$L$的滤子且$A\in\boldsymbol{F}$. 又对0的邻域$O$,由$\{x_\alpha\}$是Cauchy网，有$\alpha_0$使当$\alpha_0\prec\alpha,\beta$时$x_\alpha-x_\beta\in O$,从而$B_{\alpha_0}-B_{\alpha_0}\subset O$，由$B_{\alpha_0}\in\boldsymbol{F}$知$\boldsymbol{F}$是Cauchy滤子. 由假设有$y\in A$使$\boldsymbol{F}\to y$. 即对于0的邻域$V$，$y+V\in\boldsymbol{F}$，所以有$\alpha_0$使$B_{\alpha_0}\subset y+V$，即当$\alpha_0\prec\alpha$时$x_\alpha\in y+V$，故$x_\alpha\to y$. 因而$A$是完备集.

必要性 设A是(L,τ)的完备集,$\boldsymbol{F}$是Cauchy滤子，且$A\in\boldsymbol{F}$. 作A中的网如下:以$\boldsymbol{F}$为足标集，在$\boldsymbol{F}$中以$\supset$为半序是定向集. 对于$B\in\boldsymbol{F}$,因为$A\cap B$在$\boldsymbol{F}$中,故$A\cap B$非空，取$x_B\in A\cap B$,这样作出的网$\{x_B\}$是A中的网. 对于0的邻域O，有$B_0\in\boldsymbol{F}$使$B_0-B_0\subset O$,从而当$B_0\prec B_1,B_0\prec B_2$(即$B_0\supset B_1,B_0\supset B_2$)时，$x_{B_1}-x_{B_2}\in B_1-B_2\subset B_0-B_0\subset O$,故$\{x_B\}$是$A$中Cauchy网，因$A$是完备集,有$y\in A$使$x_B\to y$. 下面证明$\boldsymbol{F}\to y$.

对0的邻域O,取0的邻域W使$W+W\subset O$. 又有$B_1\in\boldsymbol{F}$使$B_1-B_1\subset W$. 又因$x_B\to y$，故有$B_2\in\boldsymbol{F}$使当$B_2\prec B$时$x_B\in y+W$. 取$B=B_1\cap B_2(\in\boldsymbol{F})$，由$B_1-x_B\subset W$，$B_1\subset x_B+W\subset y+W+W\subset y+O$,由$\boldsymbol{F}$是滤子及$B_1\in\boldsymbol{F}$,故$y+O\in\boldsymbol{F}$,即$\boldsymbol{F}\to y$,证毕.

定理2 设(L,τ)是拓扑线性空间,$A\subset L$,则A是紧集的充分必要条件是:A是完全有界集且A是完备集.

证 必要性 由引理2及3.2.4的定理1即得.

充分性 用反证法. 如果A不是紧集，由3.1.5定理2及3.1.6定理1,有(A,τ_A)的超滤子$\boldsymbol{F}_1$并不收敛，而$\boldsymbol{F}_1$是L的联族,$\boldsymbol{F}_1$可以有包含它的极大联族$\boldsymbol{F}$,于是$\boldsymbol{F}$是L的超滤子，$A\in\boldsymbol{F}$且$\boldsymbol{F}$不会收敛于A中的元.

对 0 的邻域 O，取 0 的均衡邻域 W 使 $W+W\subset O$. 由 A 是 (L,τ) 中完全有界集，有 A 中有限个元 $x_1,\cdots,x_n$ 使 $A\subset\bigcup_{k=1}^{n}(x_k+W)$，从而 $A^c\supset\bigcap_{k=1}^{n}(x_k+W)^c$，由于 $A^c\overline{\in}F$，$(x_k+W)^c$ 不会都$\in F$，不妨设 $(x_1+W)^c\overline{\in}F$. 由 3.1.5 定理 1，$x_1+W\in F$，但 $(x_1+W)-(x_1+W)=W-W=W+W\subset O$，所以 F 是 (L,τ) 的 Cauchy 滤子，由定理 1，F 收敛于 A 中的点，与 F 的作法矛盾，所以 A 是紧集. 证毕.

定理 3　设 (L,τ) 是满足第一可列公理的拓扑线性空间，如果 (L,τ) 点列完备，则 (L,τ) 完备.

证　由 (L,τ) 满足第一可列公理，故有一列 0 的邻域 $\{O_n\}$ 是 τ 的局部基。从而可取一列 0 的邻域 $\{W_n\}$ 使 $\{W_n\}$ 是 τ 的局部基并具 $W_{n+1}+W_{n+1}\subset W_n(n=1,2,\cdots)$.

设 (L,τ) 点列完备，$\{x_\alpha\}$ 是 (L,τ) 中 Cauchy 网. 对于 $n=1,2,\cdots$ 有足标 α_n，使当 $\alpha_n\prec\alpha,\beta$ 时，$x_\alpha-x_\beta\in W_n$. 因足标集是定向集，在取 α_n 时可使 $\alpha_1\prec\alpha_2\prec\alpha_3\prec\cdots$. 记 x_{α_n} 为 y_n，于是对自然数 N，当 $m,n\geqslant N$ 时，$y_m-y_n\in W_N$，因而 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 点列. 由 (L,τ) 是点列完备的，有 $y\in L$ 使 $y_n\to y(\tau)$.

于是，对自然数 $l(\geqslant 2)$，有自然数 $n_0\geqslant l$，使 $y_{n_0}-y\in W_l$，而当足标 $\alpha\succ\alpha_{n_0}$ 时，$x_\alpha-y_{n_0}\in W_{n_0}\subset W_l$，从而 $x_\alpha-y\in W_l+W_l\subset W_{l-1}$，即 $x_\alpha\to y(\tau)$，所以 (L,τ) 中 Cauchy 网必收敛，(L,τ) 是完备的. 证毕.

系　设 (L,τ) 是满足第一可列公理的拓扑线性空间，$A\subset L$，如果 A 是点列完备的，则 A 是完备的.

定理 4　设 (L,τ) 是满足第一可列公理的拓扑线性空间且 (L,τ) 完备，则 L 是第二纲的.

证 由于(L,τ)满足第一可列公理，这时，有一列0的均衡邻域$\{O_n\}$是τ的局部基，并可使$O_{n+1}+O_{n+1}\subset O_n$ $(n=1,2,\cdots)$，易见这使$\overline{O_{n+1}}\subset O_n$. 设$\{A_n\}$是$(L,\tau)$中的一列闭集，$L=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，要证这列集中至少有一个有内点. 用反证法，设每个A_n都没有内点. 因$A_1\neq L$，A_1^c是非空开集，所以有x_1及自然数n使x_1+O_n与A_1不交，记$n_1=n+1$，则$x_1+\bar{O}_{n_1}$与A_1不交. 又因A_2没有内点，$x_1+O_{n_1}\not\subset A_2$，同样有$x_2$及$n_2$(可使$n_2>n_1$)，使$x_2+\bar{O}_{n_2}\subset x_1+O_{n_1}$且$x_2+\bar{O}_{n_2}$与$A_2$不交. 依次可有一列$\{x_k\}$及自然数的子列$\{n_k\}$，使得$x_{k+1}+\bar{O}_{n_{k+1}}\subset x_k+O_{n_k}$且$x_k+\bar{O}_{n_k}$与$A_k$不交$(k=1, 2, \cdots)$. 因为$\{O_{n_k}\}$ $(k=1,2,\cdots)$是τ的局部基，且当$l\geqslant k$时$x_l-x_k\in O_{n_k}$，所以$\{x_l\}$是Cauchy点列，因而由(L,τ)的完备性，有$y\in L$使$x_l\to y$. 而对于每个自然数k，$\{x_l\}(l\geqslant k)$是$x_k+O_{n_k}$中的网，故$y\in x_k+\bar{O}_{n_k}$. 这样$y\bar{\in}A_k$ $(k=1,2,\cdots)$，与$L=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$矛盾，所以$\{A_n\}$中至少有一个有内点，即$(L,\tau)$是第二纲的. 证毕.

系 设(L,τ)是满足第一可列公理的拓扑线性空间，且(L,τ)完备，如果一列集$\{A_n\}$使$L=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，则至少有一个$n$使得$\bar{A}_n$有内点.

3.2.7 线性度量空间

定义 设L是线性空间，ρ是L的距离，如果ρ所导出的拓扑τ_ρ是L的向量拓扑，则称(L,ρ)是**线性度量空间或线性距离空间**.

设ρ是线性空间L上的距离，如果ρ有下列性质：

(i) $\rho(\lambda x,0)\leqslant\rho(x,0)$ $(x\in L,\lambda\in\overline{K}(1))$;

(ii) $\rho(x-z,y-z)=\rho(x,y)$ $(x,y,z\in L)$;

则称 ρ 是 L 上的**均衡不变距离**.

引理 1　设 ρ 是线性空间 L 上的均衡不变距离，令映射 $p: L\to \mathbb{R}: x\longmapsto \rho(x,0)$，则 p 有下列性质：（i）$p(x)\geqslant 0$ 且 $p(x)=0$ 当且仅当 $x=0$ 成立 $(x\in L)$；（ii）$p(\lambda x)\leqslant p(x)$　$(x\in L,\ \ \lambda\in \overline{K}(1))$；（iii）$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$　$(x,\ y\in L)$．反之，如果 $p: L\to\mathbb{R}$ 有上面三条性质时，$\rho: L\to\mathbb{R}: (x,y)\longmapsto p(x-y)$ 是均衡不变距离.

证　p 的性质(i)由 ρ 是距离即得，p 的性质(ii)由 ρ 的性质(i)可得，而 p 的性质(iii)由

$$p(x+y)=\rho(x+y,0)\leqslant\rho(x+y,y)+\rho(y,0)$$
$$=\rho(x,0)+\rho(y,0)=p(x)+p(y)$$

而得．反过来，如果 p 有这三条性质且 $\rho(x,y)=p(x-y)$，由 p 的性质(i)即知 $\rho(x,y)\geqslant 0$ 且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$ 时成立，由 p 的性质(ii)，易见 $\rho(\lambda x,0)\leqslant\rho(x)$　$(x\in L, \lambda\in \overline{K}(1))$，而且当 $x\in L, \lambda\in\mathbb{K}$ 且 $|\lambda|=1$ 时，$p(\lambda x)=p(x)$，所以 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$．ρ 的性质(iii)显然并对于 $x,y,z\in L$，$\rho(x,z)=p(x-z)\leqslant p(x-y)+p(y-z)=\rho(x,y)+\rho(y,z)$，所以 ρ 是 L 的距离．证毕.

定义　设 L 是线性空间，$p: L\to\mathbb{R}$，如果 p 有引理 1 的三个性质，则称 p 是 L 的**准范数**.

定理 1　设拓扑线性空间 (L,τ) 是满足第一可列公理的 Hausdorff 空间，则有 L 的均衡不变距离 ρ 使得 ρ 导出的拓扑 $\tau_\rho=\tau$.

证　下面分几步来作符合定理要求的 ρ.

首先取一列 0 的邻域 $\{U_n\}$ 是 τ 的局部基．再依次取一列 0 的均衡邻域 $\{O_n\}$ 使得 $O_1\subset U_1$，$O_2+O_2\subset O_1\cap U_2, \cdots, O_{n+1}+O_{n+1}\subset O_n\cap U_{n+1}, \cdots$，这样得到的 $\{O_n\}$ 仍是 τ 的局部基，并令 $O_0=O_1+O_1$，$O_{-1}=O_0+O_0,\cdots,O_m=O_{m+1}+O_{m+1}$　$(m=0,\ \ 1,\ \ 2,\cdots)$．这样得

到的$\{O_n\}$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$是$\tau$的局部基，而且$\bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} O_n=\{0\}$，$\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} O_n=L$.

记分母为$2^k(k=1, 2, 3, \cdots)$的正有理数全体为A，对于$r\in A$，r在二进制下写成为$r=a_{-n}\cdots a_{-1}.a_0a_1\cdots a_m$，其中$a_k$为0或1，但不全为0，记$W_r=a_{-n}O_{-n}+\cdots+a_mO_m$. 这样作出的$W_r$是0的邻域，且每个$W_r$是均衡的. 由$O_{n+1}+O_{n+1}\subset O_n$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，当$r, s\in A$时，$W_r-W_s\subset W_{r+s}$.

对于$x\in L$，令$p(x)=\inf\{r\mid r\in A, \ x\in W_r\}$. 由于当$r=2^{-n}$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$时，$W_r=O_n$，所以$\bigcup\limits_{r\in A} W_r=L$，因而$p$在$L$上有确定意义. $p(x)\geqslant 0$（对$x\in L$）且$p(x)=0$当且仅当$x=0$成立. 由每个W_r是均衡集，$p(\lambda x)\leqslant p(x)$（当$x\in L$，$\lambda\in K(1)$时），且由$W_r+W_s\subset W_{r+s}$ $(r, s\in A)$，当x、$y\in L, p(x)=a, p(y)=b$时，对$\varepsilon>0$，取$r, s\in A$使$a<r<a+\varepsilon, b<s<b+\varepsilon$，则$x\in W_r, y\in W_s$，由此$x+y\in W_{r+s}$，故

$$p(x+y)\leqslant r+s<a+b+2\varepsilon=p(x)+p(y)+2\varepsilon,$$

因而$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，所以$p$是$L$上的准范数.

由引理1，$\rho: L\times L\to \mathbf{R}: (x, y)\longmapsto p(x-y)$是$L$上均衡不变距离，$\rho$导出的$L$的拓扑记为$\tau_\rho$. 对$x\in L$，$\varepsilon>0$，记$O(x; \varepsilon)=\{y\mid \rho(y, x)<\varepsilon\}$. 因为$O\left(0; \frac{1}{2^n}\right)\subset O_n\subset O\left(0; \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，并因ρ是不变距离，$O(x;\varepsilon)=x+O(0;\varepsilon)$，所以$x$的任一个$\tau_\rho$邻域中包含有$x$的$\tau$邻域，$x$的任一个$\tau$邻域中包含一个$x$的$\tau_\rho$邻域. 也即$\tau_\rho=\tau$. 证毕.

系 设(L, ρ)是线性度量空间，则必有L上均衡不变距离ρ_1使$\tau_\rho=\tau_{\rho_1}$.

要注意的是，当(L,ρ)是线性度量空间时，按照度量空间的完备概念与按照拓扑线性空间的完备概念并不一定是一样的.

§ 3.3 凸集与局部凸空间

线性连续泛函对于讨论拓扑线性空间是很有用的工具，但是拓扑线性空间可能只有一个线性连续泛函即零泛函. 本节讨论的局部凸空间是常用的而且是性质比较好的一种拓扑线性空间. 这种空间，一般说来，有足够多的线性连续泛函，并且它的拓扑可以用拟范数来刻划. 这节中对于局部凸空间，进一步具体讨论了对一般拓扑线性空间所引进的一些概念，并讨论了另一些性质.

3.3.1 凸集及凸集的分离定理

定义 设L是线性空间，$A\subset L$，

(i) 如果$x\in A$且对任何$y\in L$，有$\varepsilon>0$使对任何$t\in(0,\varepsilon)$，$x+ty\in A$，则称x是A的**内部点**(internal point)；

(ii) 如果对$t\in(0,1)$，成立$tA+(1-t)A\subset A$，则称A是**凸集**；

(iii) 如果$tA\subset A$(当$t>0$时)$A+A\subset A$且$A\cap(-A)\subset\{0\}$，则称A是**锥**.

容易看到，在内部点的定义中，$(0,\varepsilon)$可以改成$(-\varepsilon,\varepsilon)$，在凸集的定义中，$(0,1)$可以改成$[0,1]$. $\varnothing$也认为是凸集. 锥必是凸集. 内部点是代数概念，与内点不同，它与拓扑无关. 集A的内部点全体记作为$\mathrm{int}(A)$.

引理 1 设L是线性空间，$A,B\subset L$，$x\in L$，$\lambda\in\mathbb{K}$，那末

(i) 当$A\subset B$时，$\mathrm{int}(A)\subset\mathrm{int}(B)$，

(ii) $\mathrm{int}(A+x)=\mathrm{int}(A)+x$，

(iii) 如 $\lambda\neq 0$, $\lambda(\mathrm{int}(A))=\mathrm{int}(\lambda A)$.

证 (i) 是显然的.

(ii) 如果 $x_0\in\mathrm{int}(A)$, 则对 $y\in L$, 有 $\varepsilon>0$, 使 $x_0+ty\in A$ $(t\in(0,\varepsilon))$, 于是 $x_0+x+ty\in A+x$, 所以 $x_0+x\in\mathrm{int}(A+x)$, 由此 $\mathrm{int}(A)+x\subset\mathrm{int}(A+x)$. 用 $-x$, $A+x$ 分别代替 x, A, 于是 $\mathrm{int}(A+x)-x\subset\mathrm{int}(A)$, 从而 $\mathrm{int}(A+x)\subset\mathrm{int}(A)+x$, 所以(ii)式成立.

(iii) 如果 $x_0\in\mathrm{int}(A)$, $\lambda\neq 0$, 对于 $y\in L$, 有 $\varepsilon>0$, 使得 $x_0+t\left(\frac{y}{\lambda}\right)\in A$ $(t\in(0,\varepsilon))$, 从而 $\lambda x_0+ty\in\lambda A$, 因此 $\lambda x_0\in\mathrm{int}(\lambda A)$, 因而有 $\lambda\mathrm{int}(A)\subset\mathrm{int}(\lambda A)$. 用 $\frac{1}{\lambda}$ 及 λA 分别代替 λ 及 A, 同样又得到 $\frac{1}{\lambda}\mathrm{int}(\lambda A)\subset\mathrm{int}(A)$, 即 $\mathrm{int}(\lambda A)\subset\lambda\mathrm{int}(A)$, 所以 (iii) 式成立. 证毕.

定理1 设 L 是实线性空间, 如果 A 是 L 的非空凸集, 且 $0\notin A$, $\mathrm{int}(A)=A$, 则有 $f\in L'$ 使得 $f(x)>0$ (当 $x\in A$ 时).

证 作集类 $\boldsymbol{S}=\{B\mid B\supset A, B \text{ 是凸集}, 0\notin B, \mathrm{int}(B)=B\}$, 在$\boldsymbol{S}$中以$\subset$为半序, 由 zorn 引理 (zorn 引理的条件请自行验证), $(\boldsymbol{S},\subset)$有极大元. 设 A_0 是$(\boldsymbol{S},\subset)$中极大元.

下面证明 A_0 是锥: 由引理 1,

$$\mathrm{int}\left(\bigcup_{t>0}(tA_0)\right)\supset\bigcup_{t>0}\mathrm{int}(tA_0)=\bigcup_{t>0}(tA_0),\quad \text{故}.$$

$\mathrm{int}\left(\bigcup_{t>0}(tA_0)\right)=\bigcup_{t>0}(tA_0)$. 又当 $x,y\in A_0$, $t_1,t_2>0$ 时, $t_1x+t_2y=(t_1+t_2)\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}x+\frac{t_2}{t_1+t_2}y\right)\in\bigcup_{t>0}(tA_0)$, 所以 $\bigcup_{t>0}(tA_0)$ 中两个元的和在这集中, 且这集中元乘正数后仍在这集中, 故知

$\bigcup\limits_{t>0}(tA_0)$是凸集. 又 0 不在这集中, 可见 $\bigcup\limits_{t>0}(tA_0)\in S$, 由$A_0$是极大元, 所以 $\bigcup\limits_{t>0}(tA_0)=A_0$, 因而 $tA_0\subset A_0(t>0)$, $A_0+A_0\subset A_0$, 并因 $0\overline{\in}A_0$, A_0 是凸集, 可知 $A_0\cap(-A_0)=\varnothing$, 所以 A_0 是锥.

记 $L_0=\{x\,|\,x\overline{\in}A_0$ 且 $-x\overline{\in}A_0\}$. 下面证明 L_0 是 L 的线性子空间: 由 L_0 的定义, 易见 $0\in L_0$, 又 $x\in L_0$ 时 $-x\in L_0$, 且 $tx\in L_0$ $(t>0)$, 因此 $\mathbf{R}L_0\subset L_0$. 设 $x,y\in L_0$, 即 x, $-x$, y, $-y$ 都不属于 A_0, 现用反证法来证明 $x+y\overline{\in}A_0$. 如果 $x+y\in A_0$, 由 A_0 是锥, 易知 $x\neq y$, $x-y\overline{\in}A_0$, $y-x\overline{\in}A_0$. 所以$\{t(x-y)\,|\,t\in\mathbf{R}\}$与 A_0 不交. 集

$$A_0+\{t(x-y)\,|\,t\in\mathbf{R}\}$$

显然是凸集, 0 不在这集中并且这集中的点都是它的内部点, 由于它包含 A_0 而 A_0 是极大的, 所以作出的集就是 A_0, 从而$(x+y)+(x-y)\in A_0$, 即 $2x\in A_0$, $x\in A_0$, 这与反证法假设矛盾, 由此, 当 x, $y\in L_0$ 时, $x+y\overline{\in}A_0$, 并因$-x$, $-y\in L_0$, $-(x+y)\overline{\in}A_0$, 因而 $x+y\in L_0$, 即 L_0 对加法封闭. 这样, L_0 是 L 的线性子空间.

最后证明 L/L_0 是一维空间: 因为 $L_0\cap A_0=\varnothing$, 故 $L_0\neq L$, 所以只要证明对于 L 中两个元 x, y, 必有系数不全为零的线性组合在 L_0 中, 显然可设 $x,y\overline{\in}L_0$, 即在 x 与$-x$, y 与$-y$ 这两对元中各有一个在 A_0 中, 不妨设 $x\in A_0$, $-y\in A_0$, 考虑下面两个(实)数集

$$\{t\,|\,x+t(y-x)\in A_0\},\quad \{t\,|\,-x-t(y-x)\in A_0\},$$

由于 $A_0\cap(-A_0)=\varnothing$, 这两个数集不交. 又易见 0, 1 分别在这两个数集中. 再因 $A_0=\mathrm{int}(A_0)$, 故这两个都是 $\mathbf{R}$ 中的开集, 由于 $\mathbf{R}$ 是连通的, 这两个数集的和集不等于 $\mathbf{R}$, 故有 $t_0\in\mathbf{R}$, t_0 不在这两个集中, 即 $x+t_0(y-x)\overline{\in}A_0$, $-x-t_0(y-x)\overline{\in}A_0$, 从而 $x+t_0(y-x)\in L_0$, 所以 L/L_0 是一维空间.

取 $z_0\in A_0$, 可作 $f\in L'$ 使 f 在 L_0 上为 0 且 $f(z_0)=1$, f 的零空间即为 L_0, 因而 f 在 A_0 上不取值 0, 由 A_0 是锥, 易知 f 在 A_0 上

取值保持定号，由 $f(z_0)=1$ 可知对任何 $z\in A_0$，$f(z)>0$，但 $A_0\supset A$，故 f 满足要求．证毕．

系 设 L 是实线性空间，A,B 是 L 的两个非空凸集，$A\cap B=\varnothing$ 且 A 中的点都是 A 的内部点，则有 $f\in L'$ 使得

$$f(x)>f(y)\quad (x\in A, y\in B).$$

证 记 $C=A-B$，对于 C 使用定理 1 即可．证毕．

定义 设 L 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间，$p:L\to\mathbb{R}$，

(i) 如果对任何 $x,y\in L$ 及 $t\geqslant 0$ 成立 $p(tx)=tp(x)$，$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，则称 p 是 L 上**凸泛函**；

(ii) 如果对任何 $x,y\in L$ 及 $t\in\mathbb{R}$ 成立 $p(tx)=tp(x)$，$p(x+y)=p(x)+p(y)$，则称 p 是 L 上**实线性泛函**．

由定义可知，L 上实线性泛函是凸泛函，又 L 上拟范数也是凸泛函．另外，当 L 是实线性空间时，实线性泛函就是线性泛函．

定理 2 设 L 是实线性空间，p 是 L 上凸泛函，L_0 是 L 的线性子空间，f_0 是 L_0 上线性泛函，且 $f_0(y)\leqslant p(y)\,(y\in L_0)$，则有 $f\in L'$ 使得

(i) $f|_{L_0}=f_0$；

(ii) $f(x)\leqslant p(x)\quad (x\in L)$．

证 作 $M=\mathbb{R}\times L$，在通常的加法和数乘下 M 是实线性空间．令 $A=\{(r,x)\mid (r,x)\in M, r>p(x)\}$，$B=\{(f_0(y),y)\mid y\in L_0\}$，由作法即知 $A\cap B=\varnothing$，B 是 M 的线性子空间，因而是凸集．当 (r,x)，$(s,y)\in A$，$t\in(0,1)$ 时，$p(tx+(1-t)y)\leqslant p(tx)+p((1-t)y)=tp(x)+(1-t)p(y)<tr+(1-t)s$，即 $(tr+(1-t)s, tx+(1-t)y)\in A$，所以 A 是 M 中凸集．也易验证 $\mathrm{int}(A)=A$．由定理 1 的系，有 $\varphi\in M'$ 使

$$\varphi(u)>\varphi(v)\quad (u\in A, v\in B).$$

由于 B 是 M 的线性子空间，$\varphi(B)$ 是有上界的实数集，所以

$\varphi(v)=0\ (v\in B)$. 由$(1,0)\in A$, $\varphi((1,0))>0$, 适当乘一正数可设$\varphi((1,0))=1$. 现作$f\in L'$如下: 对$x\in L$, 令$f(x)=-\varphi((0,x))$.

对于$y\in L_0$, 由$\varphi((f_0(y),y))=0$, 即$f_0(y)+\varphi((0,y))=0$, 从而$f(y)=f_0(y)$, 所以$f|_{L_0}=f_0$.

如果$(r,x)\in A$, 即当$r>p(x)$时, $\varphi((r,x))>0$, 故$r+\varphi((0,x))>0$, 因此对$x\in L$, $r>p(x)$, $f(x)=-\varphi((0,x))<r$, 所以$f(x)\leqslant p(x)\ (x\in L)$, 即所作的$f$满足定理的要求. 证毕.

3.3.2 凸集的 Minkowski 泛函, 线性泛函的延拓

定义 设L是线性空间, A是L中凸集且$0\in\mathrm{int}(A)$, 则称映射 $p:L\to\mathbf{R}:x\longrightarrow\inf\left\{\frac{1}{t}\,\middle|\,t>0,tx\in A\right\}$为$A$的 **Minkowski 泛函**或$A$的**度规**(gauge).

定理 1 设L是线性空间, A是L的凸集且$0\in\mathrm{int}(A)$, 则A的 Minkowski 泛函p是L上的凸泛函, 且

$$\mathrm{int}(A)=\{x\,|\,p(x)<1\}\subset A\subset\{x\,|\,p(x)\leqslant 1\}.$$

证 由于$0\in\mathrm{int}(A)$, 对于$x\in L$, $\{t\,|\,t>0,tx\in A\}$是非空集, 记这集为A_x, 由A_x非空即知$p(x)$有意义. 由A是凸集及$0\in A$, 故当$y\in A$时, $ty\in A\ (t\in(0,1))$, 由此当$t\in A_x$时$(0,t)\subset A_x$, 所以A_x是个区间($(0,a)$或$(0,a]$或$(0,\infty)$). 而当$p(x)=c$时, 对于任何$\varepsilon>0$, $\frac{1}{c+\varepsilon}\in A_x$.

显然$p(x)\geqslant 0\ (x\in L)$, $p(0)=0$. 又对$x\in L$及$t>0$, 由定义即知$A_x=tA_{tx}$, 因而$p(tx)=tp(x)\ (x\in L, t>0)$. 又如果$p(x)=c$, $p(y)=d$, 则对$\varepsilon>0$, 有$\frac{1}{c+\varepsilon}x\in A$, $\frac{1}{d+\varepsilon}y\in A$. 因$A$是凸集, 所以$\frac{c+\varepsilon}{c+d+2\varepsilon}\cdot\frac{1}{c+\varepsilon}x+\frac{d+\varepsilon}{c+d+2\varepsilon}\cdot\frac{1}{d+\varepsilon}y\in A$, 即$\frac{1}{c+d+2\varepsilon}\in A_{x+y}$. 由

此可知

$$p(x+y)\leqslant c+d+2\varepsilon=p(x)+p(y)+2\varepsilon,$$

因而 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ $(x,y\in L)$，即 p 是 L 上凸泛函.

如果 $x\in L$ 使 $p(x)<1$，则 $1\in A_x$，故 $x\in A$. 又当 $x\in A$ 时 $1\in A_x$，故 $p(x)\leqslant 1$，所以

$$\{x\mid p(x)<1\}\subset A\subset\{x\mid p(x)\leqslant 1\}.$$

记 $A_1=\{x\mid p(x)<1\}$，当 $x_0\in A_1$ 时，对于 $y\in L$ 及 $t>0$，由于 $p(x_0+ty)\leqslant p(x_0)+p(ty)=p(x_0)+tp(y)$，因此当 $t\in\left(0,\dfrac{1-p(x_0)}{p(y)+1}\right)$ 时，$x_0+ty\in A_1$，即 $x_0\in\operatorname{int}(A_1)$，由此 $A_1=\operatorname{int}(A_1)\subset\operatorname{int}(A)$. 而当 $y_0\in L$ 使 $p(y_0)=1$ 时，对任何 $\varepsilon>0$，$p(y_0+\varepsilon y_0)=1+\varepsilon>1$，即 $y_0+\varepsilon y_0\notin A$，因此 y_0 不是 A 的内部点，因而 $\operatorname{int}(A)\subset A_1$，所以 $\operatorname{int}(A)=A_1$. 证毕.

系 1 设 L 是线性空间，A 是有内部点的凸集，则 (i) $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A))=\operatorname{int}(A)$; (ii) $\operatorname{int}(A)$ 是凸集; (iii) 对 $t\in(0,1)$，$t\operatorname{int}(A)+(1-t)A\subset\operatorname{int}(A)$.

证 如果 $0\in\operatorname{int}(A)$，记 A 的 Minkowski 泛函为 p，则 $\operatorname{int}(A)=\{x\mid p(x)<1\}$，(i) 已证. (ii)，(iii) 由 p 是凸泛函即得. 如果 $x_0\in\operatorname{int}(A)$，记 $B=A-x_0$，由 B 满足系中的性质及 $\operatorname{int}(A)=\operatorname{int}(B)+x_0$ 即知 A 也使这些结论成立. 证毕.

系 2 设 L 是线性空间，A 是 L 的均衡凸集且 $0\in\operatorname{int}(A)$，则 A 的 Minkowski 泛函 p 是拟范数.

证 由 A 是均衡集，对 $\lambda\in\mathbf{K}$，$|\lambda|=1$ 有 $\lambda A=A$，从而对于 $x\in L$ 及 $\lambda\in\mathbf{K}$，$|\lambda|=1$，$A_{\lambda x}=A_x$，故 $p(\lambda x)=p(x)$，由此 p 是拟范数. 证毕.

系 3 设 L 是实线性空间，A 是有内部点的凸集且 $0\notin A$，则有 $f\in L'$ 使得 f 非零且 $f(x)\geqslant 0$ $(x\in A)$.

证　记 $A_1=\text{int}(A)$，由系 1，A_1 是非空凸集，$\text{int}(A_1)=A_1$，$0\notin A_1$，由定理 1，有 $f\in L'$ 使 $f(x)>0$ $(x\in A_1)$. 显然 f 非零，取 $x_0\in A_1$，对于 $x\in A$ 及 $t\in(0,1)$，因 $tx_0+(1-t)x\in A_1$，故

$$f(tx_0+(1-t)x)>0$$

即 $tf(x_0)+(1-t)f(x)>0$，令 $t\to+0$ 即得 $f(x)\geqslant 0$ $(x\in A)$. 证毕.

系 4　设 L 是实线性空间，A,B 是 L 的非空凸集，且 $A\cap B=\varnothing$，A 有内部点（或 B 有内部点），则有 $f\in L'$ 使得 f 非零且 $f(x)\geqslant f(y)$ $(x\in A, y\in B)$.

证　对于 $A-B$ 使用系 3 即得. 证毕.

定理 2（Крейн）　设 L 是实线性空间，A 是 L 中的锥，L_0 是 L 的线性子空间且 $L_0\cap\text{int}(A)\neq\varnothing$. 如果 f_0 是 L_0 上线性泛函且 $f_0(y)\geqslant 0$ $(y\in L_0\cap A)$，则有 $f\in L'$ 使得

(i) $f|_{L_0}=f_0$;

(ii) $f(x)\geqslant 0$ $(x\in A)$.

证　取 $x_0\in L_0\cap\text{int}(A)$，记 $B=A-x_0$，并作 B 的 Minkowski 泛函 p. 当 $x\in A$ 时，对任何 $t>0$，由于 $x_0+tx\in A$，故 $tx\in B$，因而 $p(x)=0$，即 p 在 A 上取值为零.

对于 $y\in L_0$，记 $B_y=\{t\,|\,t>0, ty\in B\}$，这时，$p(y)=\inf\left\{\frac{1}{t}\,\middle|\, t\in B_y\right\}$. 对于 $t\in B_y$，由 $ty\in B$，$x_0+ty\in A$，故 $f_0(x_0+ty)\geqslant 0$，所以

$$-f_0(y)\leqslant\frac{1}{t}f_0(x_0)\quad(y\in L_0,\ t\in B_y),$$

从而 $-f_0(y)\leqslant f_0(x_0)p(y)$ $(y\in L_0)$. $f_0(x_0)p$ 是 L 上凸泛函，由 3.3.1 定理 2，把 $-f_0$ 延拓成 L' 中元，再乘上 -1 而记为 f，则 $f\in L'$ 且 $f|_{L_0}=f_0$，并有

$$-f(x)\leqslant f_0(x_0)p(x)\quad(x\in L).$$

由 p 在 A 上为 0，故 $f(x)=0$ $(x\in A)$. 证毕.

引理 1 设 L 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间，f 是 L 上实线性泛函，则有唯一的 $g\in L'$ 使得 $\mathrm{Re}g=f$.

证 显然只要对于复空间的情况来证明.

如果 $g\in L'$，对 $x\in L$，设 $g(x)=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$，于是 $g(ix)=-b+ai$，因而 $g(x)=\mathrm{Re}g(x)-i\mathrm{Re}g(ix)$，可见如果 $g\in L'$ 使 $\mathrm{Re}g=f$，则

$$g(x)=f(x)-if(ix)\quad(x\in L),$$

由此可见，g 由 f 所决定，这就说明了唯一性.

对于 L 上实线性泛函 f，令 $g:L\to\mathbb{C}:x\longmapsto f(x)-if(ix)$. 由 g 的作法显然 $\mathrm{Re}g=f$，且对于 $x,y\in L$ 及 $t\in\mathbb{R}$，

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\ g(tx)=tg(x),$$

并且 $g(ix)=f(ix)-if(iix)=f(ix)+if(x)=ig(x)$. 由此，即知

$$g(\lambda x)=\lambda g(x)\quad(x\in L,\lambda\in\mathbb{C})$$

即 $g\in L'$. 证毕.

系 设 L 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间，A,B 是 L 的两个非空凸集，$A\cap B=\varnothing$ 且 A 有内部点，则有 $f\in L'$ 使 f 非零且

$$\mathrm{Re}f(x)\geqslant\mathrm{Re}f(y)\quad(x\in A,y\in B).$$

证 实空间的情况已经证明过. 当 L 是复空间时，只考虑实数的数乘 L 是实空间，这时 A,B 仍是凸集，原条件仍满足，于是有看作实空间时的 L 上线性泛函 f_1，f_1 非零且 $f_1(x)\geqslant f_1(y)$ $(x\in A,y\in B)$，而 f_1 是复空间 L 上的实线性泛函，从而有 $f\in L'$ 使 $\mathrm{Re}f=f_1$，f 即合要求. 证毕.

定理 3(Hahn-Banach) 设 L 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间，p 是 L 上拟范数，L_0 是 L 的线性子空间，f_0 是 L_0 上线性泛函且 $|f_0(y)|\leqslant p(y)$ $(y\in L_0)$，则有 $f\in L'$ 使得

(i) $f|_{L_0}=f_0$;

(ii) $|f(x)|\leqslant p(x)\ \ (x\in L)$.

证 由于拟范数是凸泛函，当 L 是实空间时，由于从 $|f_0(y)|\leqslant p(y)\ \ (y\in L_0)$ 即得 $f_0(y)\leqslant p(y)\ \ (y\in L_0)$，由 3.3.1 定理 2，有 $f\in L'$ 使 $f|_{L_0}=f_0$ 且 $f(x)\leqslant p(x)\ \ (x\in L)$，这时，$f(-x)\leqslant p(-x)=p(x)$ 故 $|f(x)|\leqslant p(x)\ \ (x\in L)$. 实空间的情况证毕.

现设 L 是复线性空间. 这时可把 L 看成实空间，记 $g_0=\mathrm{Re}f_0$. g_0 是 L_0 上的实线性泛函，在看成实空间时，由上面可知，有实空间 L 上线性泛函 g 使 $g|_{L_0}=g_0$, $|g(x)|\leqslant p(x)(x\in L)$. g 是复空间 L 上的实线性泛函，由引理 1，有 $f\in L'$(f 是复空间 L 上线性泛函) 使得 $\mathrm{Re}f=g$.

在 L_0 上，$\mathrm{Re}f=g=g_0=\mathrm{Re}f_0$，由引理 1 的唯一性可知，在 L_0 上 $f=f_0$，即 $f|_{L_0}=f_0$，又对 $x\in L$, $|\mathrm{Re}f(x)|\leqslant p(x)$. 取 $\lambda\in\mathbf{C}$，使 $|\lambda|=1$ 且 $\lambda f(x)=|f(x)|$，于是 $|\mathrm{Re}f(\lambda x)|\leqslant p(\lambda x)=p(x)$，即

$$|f(x)|\leqslant p(x)\quad (x\in L),$$

故 f 合要求. 证毕.

系 设 L 是线性空间，p 是 L 上拟范数，则对 $x_0\in L$，有 $f\in L'$ 使得(i) $f(x_0)=p(x_0)$; (ii) $|f(x)|\leqslant p(x)\quad (x\in L)$.

证 在 $\mathrm{span}(\{x_0\})=\{\lambda x_0|\lambda\in\mathbf{K}\}$ 上，令 $f_0(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$，对 f_0 使用定理 3 即得. 证毕.

线性空间 L 中的 n 个元 $x_1,\cdots,x_n$，形为 $\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$ 的元(其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in[0,1]$ 且 $\sum_{k=1}^{n}a_k=1$) 称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的**凸组合**. 由凸集的定义及用数学归纳法易知，如果 A 是线性空间 L 的凸子集，则 A 中有限个元的凸组合仍在 A 中.

易见，任意个凸集的交集是凸集，因此，对于线性空间 L 的子

集 A，一切包含 A 的凸集的交集是包含 A 的最小凸集，称为 A 张成的凸集或 A 的**凸包**，记为 $\mathrm{co}A$.

引理 2 设 L 是线性空间，那末

(i) 对 $A\subset L$, $\mathrm{co}A=\{A$ 中有限个元的凸组合全体$\}$；

(ii) 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 L 的凸子集，则

$$\mathrm{co}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$$
$$=\left\{\sum_{k=1}^{n}a_kx_k \mid x_k\in A_k, a_k\in[0,1]\ (k=1,\cdots,n)\ 且\sum_{k=1}^{n}a_k=1\right\}$$

证 (i) 式中左端包含右端是显然的. 直接验证又可知右端是包含 A 的凸集，所以等式成立.

(ii) 同样左端包含了右端，又右端显然包含了 $A_1\cup\cdots\cup A_n$，因此只要验证右端是凸集. 设 x, y 分别是 $x=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$ 及 $y=\sum_{k=1}^{n}b_ky_k$ $(x_k, y_k\in A_k, a_k, b_k\in[0,1], (k=1,2,\cdots,n), \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k=1)$ 又 $t\in(0,1)$，于是 $tx+(1-t)y=\sum_{k=1}^{n}[ta_kx_k+(1-t)b_ky_k]$.

记 $c_k=ta_k+(1-t)b_k$ 并记 $z_k=\frac{1}{c_k}[ta_kx_k+(1-t)b_ky_k]$，(如果某个 k 使 $c_k=0$，即 $a_k=b_k=0$，就取 $z_k=x_k$)，这样，$z_k\in A_k$ 且 $\sum_{k=1}^{n}c_k=1$，而 $tx+(1-t)y$ 在(ii)中式子的右端，由此.

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}a_kx_k \mid x_k\in A_k, a_k\in[0,1]\ (k=1,2,\cdots,n), \sum_{k=1}^{n}a_k=1\right\}$$

是个凸集，所以这集就等于 $\mathrm{co}(A_1\cup A_2\cup\cdots A_n)$. 证毕.

引理 3 设 (L, τ) 是拓扑线性空间，则 L 中凸集的闭包是凸集.

证 设 A 是 L 中凸集. 对于 $t\in(0,1)$, $x\in A$, 由于映射 $y\longmapsto tx+(1-t)y$ 是同胚, 且 $tx+(1-t)A\subset A\subset\bar{A}$, 因而 $\bar{A}$ 在这映射下的原象是包含 A 的闭集, 所以 $tx+(1-t)\bar{A}\subset\bar{A}$. 同样, 对于 $s\in(0,1)$, $z\in\bar{A}$, 由 $sz+(1-s)A\subset\bar{A}$ 可知 $sz+(1-s)\bar{A}\subset\bar{A}$, 因而 $s\bar{A}+(1-s)\bar{A}\subset\bar{A}$, 即 $\bar{A}$ 是凸集. 证毕.

对于拓扑线性空间 (L,τ) 的子集 A, 包括 A 的最小凸闭集称为 A 张成的凸闭集或 A 的**凸闭包**. 记为 $\overline{\text{co}}A$.

引理 3 说明 $\overline{\text{co}}A=\overline{\text{co}A}$

引理 4 设 (L,τ) 是拓扑线性空间, A,B 是 (L,τ) 中凸紧集, 则 $\text{co}(A\cup B)$ 是 (L,τ) 中紧集.

证 由引理 2, $\text{co}(A\cup B)=\{tx+(1-t)y\mid t\in[0,1],x\in A,y\in B\}$, 作映射 $\mathbb{K}\times L\times L\to L:(t,x,y)\longmapsto tx+(1-t)y$, 这是个连续映射. 而 $\text{co}(A\cup B)$ 是紧集 $[0,1]\times A\times B$ 的象, 故 $\text{co}(A\cup B)$ 是紧集. 证毕.

用数学归纳法易知, 对于拓扑线性空间 (L,τ) 中有限个凸紧集 $A_1,\cdots,A_n$, $\text{co}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$ 是 (L,τ) 中紧集.

定理 4 设 (L,τ) 是拓扑线性空间, O 是 (L,τ) 的非空凸开集, $x_0\overline{\in}O$, 则有 $f\in(L,\tau)^*$ 使 $\text{Re}f(x)>\text{Re}f(x_0)\quad(x\in O)$.

证 由于 O 中的点都是 O 的内部点, 由 3.3.1 定理 1 的系, 在复空间时再用 3.3.2 的引理 1 (参见引理 1 的系) 可知有 $f\in L'$ 使得 $\text{Re}f(x)>\text{Re}f(x_0)\,(x\in O)$. 因为 $f(O)\neq\mathbb{K}$, 由 3.2.3 定理 1 即知 $f\in(L,\tau)^*$. 证毕.

系 设 (L,τ) 是拓扑线性空间, 且有凸开集 O 使得 $O\neq\varnothing$, $O\neq L$, 则 $(L,\tau)^*$ 中有非零元.

但是确实有拓扑线性空间 (L,τ) 使得 $(L,\tau)^*$ 仅有零元. (并且 τ 不是平凡拓扑).

例 设 L 是 $[0,1]$ 上 Lebesgue 可测函数全体, 几乎处处相等

的函数认为是同一个元. 对于 $x, y \in L$, 令

$$\rho(x,y)=\int_0^1 \frac{|x-y|}{1+|x-y|}dm, \text{(}m\text{ 是 Lebesgue 测度)}$$

这时, (L, ρ) 是线性度量空间.

设 $f \in L'$ 且 f 非零, 则有 $x_0 \in L$ 使 $f(x_0)=1$. 对于任何 $\varepsilon>0$, 取自然数 n 使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 记 $y_1, \cdots, y_n$ 分别是 $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ 上的特征函数, 又记 $z_k=nx_0y_k (k=1,2,\cdots,n)$. 易见

$$\rho(z_k, 0)=\int_0^1 \frac{|z_k|}{1+|z_k|}dm \leqslant \frac{1}{n}<\varepsilon,$$

但因 $z_1+z_2+\cdots+z_n=nx_0$, 故 $f(z_1)+\cdots+f(z_n)=n$, 所以至少有一个 k 使 $|f(z_k)|\geqslant 1$. 因而不会有 $\varepsilon>0$ 使

$$\{z \mid \rho(z,0)<\varepsilon\}\subset f^{-1}(K(1))$$

可见 f 在 0 点处不连续, 从而 $f \overline{\in} (L, \tau_\rho)^*$.

3.3.3 局部凸空间

引理 1 设 (L, τ) 是拓扑线性空间, A 是开集, 则 $\mathrm{co}A$ 是开集.

证 设 $y \in \mathrm{co}A$, $y=\sum_{k=1}^{n} t_k x_k$ (其中 n 是自然数, $x_1, \cdots, x_n \in A$, $t_1, \cdots, t_n>0$ 且 $\sum_{k=1}^{n} t_k=1$), 如果 $n=1$, 则 $y \in A$, 从而是 $\mathrm{co}A$ 的内点. 当 $n\geqslant 2$ 时, 因为 $t_1A+\sum_{k=2}^{n} t_k x_k$ 是 y 的邻域且这是 $\mathrm{co}A$ 的子集, 即 $\mathrm{co}A$ 中每个点是内点, 所以 $\mathrm{co}A$ 是开集. 证毕.

定义 设 (L, τ) 是拓扑线性空间, 如果有 τ 的局部基全由凸集所组成, 则称 (L, τ) 是**局部凸的拓扑线性空间**, 简称 (L, τ) 是**局部凸空间**.

定理 1 设(L,τ)是局部凸 Hausdorff 空间，则对L中的非零元x_0，有$f\in(L,\tau)^*$使$f(x_0)\neq 0$.

证 对L中非零元x_0，有0的凸邻域O使$x_0\overline{\in}O$. 由 3.3.2 定理 4，有$f\in(L,\tau)^*$使$\mathrm{Re}f(x)>\mathrm{Re}f(x_0)$ $(x\in O)$，易见这时$f(x_0)\neq 0$. 证毕.

定理 2 设(L,τ)是局部凸空间，A是非空凸闭集，又$x_0\overline{\in}A$，则有$f\in(L,\tau)^*$及$\varepsilon>0$，使得

$$\mathrm{Re}f(x)<\mathrm{Re}f(x_0)-\varepsilon \quad (x\in A).$$

证 由于$A-x_0$是非空凸闭集，$0\overline{\in}A-x_0$，故有0的凸邻域$O\subset(A-x_0)^c$，$O-(A-x_0)$是开集，它是凸集且不含0，因而有$f\in(L,\tau)$ 使$\mathrm{Re}f$在$O-(A-x_0)$上取值大于0，所以

$$\mathrm{Re}f(x)<\mathrm{Re}f(x_0)+\mathrm{Re}f(y) \quad (x\in A,y\in O).$$

由f非零，有$z_0\in L$使$f(z_0)=-1$，又有$\varepsilon>0$使$\varepsilon z_0\in O$，从而

$$\mathrm{Re}f(x)<\mathrm{Re}f(x_0)-\varepsilon \quad (x\in A).$$

证毕.

引理 2 设(L,τ)是局部凸空间，O是0的邻域，则有0的均衡凸邻域W使$W\subset O$.

证 由(L,τ)局部凸，故有0的凸邻域$U\subset O$，又有0的均衡邻域$V\subset U$. 记$W=\mathrm{co}V$，由引理 1，W是开集，又由 3.3.2 引理 2 及V是均衡集，易见W是均衡的，即W是0的均衡凸邻域且$W\subset U\subset O$. 证毕.

当L是线性空间，$x_0\in L$，$p_1,p_2,\cdots,p_n$是L上拟范数，$\varepsilon>0$时，我们引进下面的记号：

$$O(x_0;p_1,p_2,\cdots,p_n;\varepsilon)=\{x\mid p_k(x-x_0)<\varepsilon\ (k=1,2,\cdots,n)\}.$$

定理 3 设(L,τ)是局部凸空间，则必有一族L上的拟范数P，使得$\{O(0;p;1)\mid p\in P\}$是τ的局部基.

证 0的均衡凸邻域全体是τ的局部基. 对0的均衡凸邻域

W，作W的Minkowski泛函 p，则 $O(0;p;1)=\mathrm{int}(W)=W$. 把0的均衡凸邻域的 Minkowski 泛函全体记为 P，则 P 即合定理的要求. 证毕.

对于上述的 P，对于 P 中有限个元 $p_1,\cdots,p_n$ 及 $\varepsilon>0$，$O(0;p_1,\cdots,p_n;\varepsilon)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}O(0;p_k;\varepsilon)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}\varepsilon O(0;p_k;1)\in\tau$，

易见这时

$$\{O(0;p_1,\cdots,p_n;\varepsilon)\mid p_1,\cdots,p_n\in P,\varepsilon>0\}$$

是 τ 的局部基.

定理 4 设 L 是线性空间，P 是 L 上拟范数族，则

$$\{O(0;p_1,\cdots,p_n;\varepsilon)\mid p_1,\cdots,p_n\in P,\varepsilon>0\}$$

是 L 的局部凸拓扑 τ 的局部基.

在证明之前先作一个说明：τ 是 L 的局部凸拓扑是指 τ 是 L 的向量拓扑且使 (L,τ) 是局部凸空间.

证 对于 $p\in P$，由 3.2.2 引理 1，$\{O(x;p;\varepsilon)\mid x\in L,\varepsilon>0\}$ 是拓扑的基(记这拓扑为 τ_p)，τ_p 是向量拓扑，$\{O(0;p;\varepsilon)\mid\varepsilon>0\}$ 是 τ_p 的局部基，又 τ_p 是 L 的局部凸拓扑. 由 3.2.5 定理 2 系 1，比每个 $\tau_p(p\in P)$ 都强的最弱拓扑 τ 是 L 的向量拓扑，且$\{O(0;p;\varepsilon)\mid p\in P,\varepsilon>0\}$ 是 τ 在 0 的子基. 易见 τ 是 L 的局部凸拓扑，且

$$\{O(0;p_1,p_2,\cdots,p_n;\varepsilon)\mid p_1,p_2,\cdots,p_n\in P,\varepsilon>0\}$$

是 τ 的局部基. 证毕.

定义 设 L 是线性空间，P 是 L 上拟范数族，以

$$\{O(0;p_1,\cdots,p_n;\varepsilon)\mid p_1,\cdots,p_n\in P,\varepsilon>0\}$$

为局部基的向量拓扑 τ 称为由 P **所决定的拓扑**.

由定理 3 及定理 4，局部凸空间也就是拓扑是由拟范数族 P 决定的这种拓扑线性空间，但不同的拟范数族决定的拓扑可以相同.

设 L 是线性空间，$F\subset L'$，由 $\{|f|\,|f\in F\}$ 决定的拓扑称为由 F **导出的拓扑**，记为 $\sigma(L,F)$. 对于 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in L'$，$\varepsilon>0$，$x_0\in L$，记

$O(x_0;f_1,f_2,\cdots,f_n;\varepsilon)=\{x\,|\,x\in L,\ |f_k(x-x_0)|<\varepsilon\ (k=1,2,\cdots,n)\}$.

定理 5 设 $(L,\ \tau)$ 是局部凸空间，P 是决定拓扑 τ 的拟范数族，又 q 是 L 上拟范数，则下列各点等价：

(i) q 在 (L,τ) 上连续.

(ii) $O(0;q;1)$ 以 0 为内点.

(iii) 有 P 中有限个元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 及数 c 使得

$$q(x)\leqslant c\max(p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x))\quad (x\in L).$$

证 (i)→(ii) 显然.

(ii)⇒(iii) 如果 $O(0;q;1)$ 以 0 为内点，则有 $p_1,\cdots,p_n\in P$ 及 $\varepsilon>0$ 使 $O(0;\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n;\ \varepsilon)\subset O(0;\ q;\ 1)$. 对于 $x\in L$，记 $\max(p_1(x),\cdots,p_n(x))$ 为 $a(x)$，于是当 $a(x)<\varepsilon$ 时，$q(x)<1$. 如果 $x\in L$ 使 $a(x)=0$，这时对任何 $t>0$，$a(tx)=0$，从而 $q(tx)<1$，故 $q(x)=0$. 如果 $y\in L$ 使 $a(y)>0$，于是 $\frac{\varepsilon}{2a(y)}y$（记为 z）使 $a(z)<\varepsilon$，从而 $q(z)<1$，故 $q(y)<\frac{2}{\varepsilon}a(y)=\frac{2}{\varepsilon}\max(p_1(y),\cdots,p_n(y))$. 取 $c=\frac{2}{\varepsilon}$，易见对任何 L 中元 x 都成立 $q(x)\leqslant c\max(p_1(x),\cdots,p_n(x))$.

(iii)⇒(i) 设 P 中 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ 及数 c 使 $q(x)\leqslant c\max(p_1(x),\cdots,p_n(x))$. 对于 $x_0\in L$ 及 $\varepsilon>0$，记 $O=O\left(0;p_1,\ \cdots,p_n;\frac{\varepsilon}{c+1}\right)$，当 $x\in x_0+O$ 时，$x-x_0\in O$，所以 $p_k(x-x_0)<\frac{\varepsilon}{c+1}\ (k=1,2,\cdots,n)$. 从而 $q(x-x_0)<\varepsilon$. 由此得

$$|q(x)-q(x_0)|\leqslant q(x-x_0)<\varepsilon,$$

即 q 在 x_0 处连续. 所以 q 在 (L,τ) 上连续. 证毕.

系1 设L是线性空间，P_1，P_2是L上的两族拟范数，P_1，P_2决定的拓扑分别为τ_1，τ_2，则τ_2比τ_1强的充分必要条件是：对$q\in P_1$，有P_2中有限个元$p_1,\cdots,p_n$及数c使

$$q(x)\leqslant c\max(p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x))\quad(x\in L).$$

证 必要性 设τ_2比τ_1强. 由定理5，q是τ_1连续的，从而是τ_2连续的，故由定理5即得.

充分性 由定理5，P_1中的q都是τ_2连续的. 因而$O(0;q;1)=q^{-1}(K(1))$是τ_2开集，而τ_1的局部基中集$O(0;q_1,\cdots,q_n;e)$也都是τ_2开集. 所以τ_2比τ_1强. 证毕.

系2 设(L,τ)是局部凸空间，P是决定τ的拟范数族，$f\in L'$，则$f\in(L,\tau)^*$的充分必要条件是：有P中$p_1,\cdots,p_n$及数c使$|f(x)|\leqslant c\max(p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x))(x\in L)$.

证 必要性 如果$f\in(L,\tau)^*$. 则$f^{-1}(K(1))$是τ开集，从而$|f|$是(L,τ)的连续拟范数. 由定理5即得.

充分性 如成立这不等式，f在$O(0;p_1,\cdots,p_n;1)$上有界，由3.2.3定理1即知$f\in(L,\tau)^*$. 证毕.

易见当(L,τ)是局部凸空间时，(L,τ)上连续拟范数全体记为P，则P决定的拓扑就是τ.

定理6 设L是线性空间，$F\subset L'$，记F张成的线性子空间为F_1，则(i) $(L,\sigma(L,F))^*=F_1$；(ii) $\sigma(L,F)=\sigma(L,F_1)$.

证 由定理5系2易见$F_1\subset(L,\sigma(L,F))^*$. 反之，如$h\in(L,\sigma(L,F))^*$，由定理5系2，有$f_1,f_2,\cdots,f_n\in F$及数$c$使

$$|h(x)|\leqslant c\max(|f_1(x)|,|f_2(x)|,\cdots,|f_n(x)|)\quad(x\in L),$$

因而h在$f_1,\cdots,f_n$的公共零空间上取值为0，由3.2.1定理1的系，h是$f_1,\cdots,f_n$的线性组合，故$h\in F_1$，(i)证毕.

由$F\subset F_1$即知$\sigma(L,F)$比$\sigma(L,F_1)$弱. 由定理5的系1又可得知$\sigma(L,F_1)$比$\sigma(L,F)$弱，因而$\sigma(L,F)\stackrel{\perp}{=}\sigma(L,F_1)$. 证毕.

定理 7　设$(L,\ \tau)$是局部凸空间，P是决定拓扑τ的拟范数族，A是L的非空子集，则A是$(L,\ \tau)$中有界集的**充分必要条件**是：对任何$p\in P$，$\sup\limits_{x\in A}p(x)<+\infty$.

证　必要性　如果A是有界集，对于$p\in P$，有$\varepsilon>0$使$\varepsilon A\subset O(0;p;1)$，故对$x\in A$，$p(\varepsilon x)<1$，从而$\sup\limits_{x\in A}p(x)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}<+\infty$.

充分性　如对每个$p\in P$，$\sup\limits_{x\in A}p(x)<+\infty$，则对于$P$中有限个$p_1,\cdots,p_n$及$\varepsilon>0$，记$\sup\{p_k(x)\mid x\in A,k=1,2,\cdots,n\}$为$c$并令$\delta=\frac{\varepsilon}{c+1}$，易见$\delta A\subset O(0;p_1,p_2,\cdots,p_n;\varepsilon)$，所以$A$是有界集．证毕.

系　设(L,τ)是局部凸空间，A是$(L,\ \tau)$中有界集，则$\overline{\mathrm{co}}A$是(L,τ)中有界集.

证　只要对非空的A来证．取决定拓扑τ的拟范数族P．记$B=\overline{\mathrm{co}}A$．对于$p\in P$，由定理5，$p$是连续的．记$\sup\limits_{x\in A}p(x)$为$b$($b$与$p$有关)，则$\{y\mid p(y)\leqslant b\}=p^{-1}(\bar{k}(b))$是$(L,\ \tau)$的均衡凸闭集且包含$A$，所以$B\subset\{y\mid p(y)\leqslant b\}$，即$B$有界．证毕.

定义　设L是线性空间，P是L上的拟范数族，如果对L中任何非零元x，有$p\in P$使$p(x)\neq 0$，则称P**分离L的点**．同样，如$F\subset L'$且对L中任何非零元x有$f\in F$使$f(x)\neq 0$，则称F**分离L的点**.

容易看到，当P是线性空间L上的拟范数族时，由P决定的拓扑是Hausdorff拓扑的充分必要条件是P分离L的点，同样，当$F\subset L'$时，$\sigma(L,\ F)$是Hausdorff拓扑的充分必要条件是F分离L的点.

引理 3　设(L,τ)是局部凸空间，如果$(L,\ \tau)$有非空的有界开集，则τ可以由一个拟范数决定.

证　设O是(L,τ)的非空有界开集，$x_0\in O$，则$O-x_0$是有界

集，又有0的均衡凸邻域$W\subset O-x_0$，W是有界集. 记W的Minkowski泛函为p，由$\{p\}$决定的拓扑显然比τ弱，但因W是有界集，所以对0的τ邻域O，必有$\varepsilon>0$使$\varepsilon W\subset O$，即$O(0;p:\varepsilon)\subset O$，从而$\{p\}$决定的拓扑又比$\tau$强. 所以$\tau$就是由$\{p\}$所决定的拓扑. 证毕.

定理 8 (Колмогоров) 设(L,τ)是局部凸Hausdorff空间，且有非空的有界开集，则有L上范数$\|\cdot\|$，使得τ就是由$\|\cdot\|$所决定的拓扑.

证 由引理3，有L上拟范数p，τ就是$\{p\}$所决定的拓扑，但又由τ是Hausdorff拓扑，$\{p\}$分离L的点，故p是L上的范数. 证毕.

定理 9 设(L,τ)是局部凸空间，P是决定拓扑τ的拟范数族，$\{x_\alpha\}$是L中的网，则$x_\alpha\to 0(\tau)$的充分必要条件是：对任何$p\in P$，$p(x_\alpha)\to 0$.

证 **必要性** 由于P中的p是连续的，当$x_\alpha\to 0(\tau)$时当然$p(x_\alpha)\to p(0)=0$.

充分性 对于P中的$p_1,p_2,\cdots,p_n$及$\varepsilon>0$，由$p_k(x_\alpha)\to 0$，$(k=1,2,\cdots,n)$，故有α_k，使当$\alpha_k\prec\alpha$时，$p_k(x_\alpha)<\varepsilon$，由于足标集是定向集，可取$\alpha_0$在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$之后，于是当$\alpha_0\prec\alpha$时，$p_k(x_\alpha)<\varepsilon$对$k=1,2,\cdots,n$都成立，即$x_\alpha\in O(0;p_1,\cdots,p_n;\varepsilon)$，因而$x_\alpha\to 0(\tau)$. 证毕.

3.3.4 弱拓扑，商拓扑

定义 设(L,τ)是局部凸空间，由$(L,\tau)^*$所导出的L的拓扑称为τ的**弱拓扑**. τ的弱拓扑记为τ^W.

由3.3.3定理5的系1和系2，即知τ^W比τ弱. 由定义可知τ^W就是$\sigma(L,(L,\tau)^*)$，在不致混淆时也记为$\sigma(L,L^*)$.

当 τ 是由 $F\subset L'$ 导出的拓扑时，由 3.3.3 定理 6 可知 $\tau^W=\tau$.

弱拓扑是对于 L 的局部凸拓扑而言的. 当 L 有两个局部凸拓扑 τ_1, τ_2 时，如果 τ_2 比 τ_1 强，则 $(L,\tau_2)^*\supset(L,\tau_1)^*$，从而 τ_2^W 比 τ_1^W 强. 但是不同的拓扑可能弱拓扑是相同的.

定理 1 设 (L,τ) 是局部凸空间，A 是 (L,τ) 中凸闭集，则 A 是 (L,τ^W) 的闭集.

证 不妨设 $A\neq\varnothing$ 且 $A\neq L$. 对于 $x_0\overline{\in}A$，由 3.3.3 **定理 2**，有 $f\in(L,\tau)^*$ 及 $\varepsilon>0$，使得

$$\mathrm{Re}f(x)<\mathrm{Re}f(x_0)-\varepsilon \quad (x\in A).$$

记数集 $\left\{\lambda \mid \mathrm{Re}\lambda\leq \mathrm{Re}f(x_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$ 为 B，B 是 $\mathbb{K}$ 中闭集. 因为 f 是 τ^W 连续的，所以 $f^{-1}(B)$ 是 (L,τ^W) 中闭集. 易见 $A\subset f^{-1}(B)$，$x_0\overline{\in}f^{-1}(B)$，所以 $x_0\overline{\in}\overline{A}^{(\tau^W)}$. 因而 $A=\overline{A}^{(\tau^W)}$，即 A 是 τ^W 闭集. 证毕.

由于 τ^W 比 τ 弱，故 τ^W 闭集是 τ 闭的，定理 1 说明，(L,τ) 与 (L,τ^W) 有同样多的凸闭集.

系 设 (L,τ) 是局部凸空间，$A\subset L$，则在 (L,τ) 和 (L,τ^W) 中，A 的凸闭包相等，同样 A 的线性闭包也相等.

定理 2 设 (L,τ) 是局部凸空间，$A\subset L$，如果 A 是 (L,τ^W) 中有界集，则 A 是 (L,τ) 中有界集.

证 只要对非空集 A 来证. 设 P 是决定拓扑 τ 的拟范数族. 用反证法，即设对 $f\in(L,\tau)^*$，$\sup\limits_{x\in A}|f(x)|<+\infty$，而有 $p\in P$ 使 $\sup\limits_{x\in A}p(x)=+\infty$（见 3.3.3 定理 7）.

由 $\sup\limits_{x\in A}p(x)=+\infty$，有 $x_1\in A$ 使 $p(x_1)\geqslant 1$. 由 **Hahn-Banach** 定理（见 3.3.2 定理 3 的系），有 $f_1\in L'$ 使 $f_1(x_1)=p(x_1)$ 且 $|f_1(x)|\leqslant p(x)$ $(x\in L)$，而由 3.3.3 定理 5 系 2，$f_1\in(L,\tau)^*$. 记 a_1

$=\sup\limits_{x\in A}|f_1(x)|(<+\infty)$，又有 $x_2\in A$ 使 $p(x_2)\geqslant 4^2\cdot 2(2+a_1)$，同样有 $f_2\in(L,\tau)^\#$ 使 $f_2(x_2)=p(x_2)$ 且 $|f_2(x)|\leqslant p(x)\quad(x\in L)$，并记 $a_2=\sup\limits_{x\in A}|f_2(x)|$. 这样依次可取 $x_n\in A$ 使 $p(x_n)\geqslant 4^n\cdot 2(n+a_1+\cdots+a_{n-1})$，作 $f_n\in(L,\tau)^\#$ 使 $f_n(x_n)=p(x_n)$ 且 $|f_n(x)|\leqslant p(x)\quad(x\in L)$，记 $a_n=\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)|\quad(n=2,3,4,\cdots)$，令

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}f_k(x)\quad(x\in L).$$

由于 $|f_k(x)|\leqslant p(x)\quad(x\in L,k=1,2,\cdots)$，上述级数收敛，且 $|f(x)|\leqslant p(x)\quad(x\in L)$，又 f 是 L 上线性泛函，因而 $f\in L^\#$.

现考虑 f 在 x_n 上的值，设 $n_0\geqslant 2$，这时，由于

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty}f_k(x_{n_0})\right|\leqslant\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\right)p(x_{n_0})=\frac{1}{4^{n_0+1}}\cdot\frac{4}{3}p(x_{n_0})$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n_0}}p(x_{n_0})$$

又因 $f_{n_0}(x_{n_0})=p(x_{n_0})$，$\left|\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}f_k(x_{n_0})\right|\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_{n_0-1}$，所以

$$|f(x_{n_0})|\geqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4^{n_0}}p(x_{n_0})-(a_1+\cdots+a_{n_0-1})\geqslant n_0,$$

这与 $f\in(L,\tau)^\#$ 并由此 $\sup\limits_{x\in A}|f(x)|<+\infty$ 相矛盾，所以 A 是 (L,τ) 中的有界集. 证毕.

定理 2 说明：对于局部凸空间 (L,τ)，(L,τ) 与 (L,τ^W) 有同样多的有界集.

由弱拓扑的定义及 3.3.3 的定理 9，即知当 (L,τ) 是局部凸空间时，对于 L 中的网 $\{x_\alpha\}$，$x_\alpha\to 0(\tau^W)$ 的充分必要条件是：对任何 $f\in(L,\tau)^\#$，$f(x_\alpha)\to 0$.

定理 3 设(L,τ)是局部凸空间，L_0是L的线性子空间，Q是$L\to L/L_0$的商映射，τ_Q是L/L_0的商拓扑，则τ_Q是局部凸拓扑. 又如果P是L的决定τ的拟范数族，对于$p\in P$，作$\tilde{p}: L/L_0\to\mathbb{K}; \tilde{x}\longmapsto\inf\{p(y)\,|\,y\in\tilde{x}\}$，则$\{\tilde{p}\,|\,p\in P\}$是决定拓扑$\tau_Q$的拟范数族.

证 τ_Q是L/L_0的向量拓扑，且$\tau_Q=\{Q(V)\,|\,V\in\tau\}$. 因此$\tau$的局部基在$Q$下的象构成$\tau_Q$的局部基. 由于均衡凸的0的$\tau$邻域是$\tau$的局部基，而$Q$是线性算子，把均衡凸集映成均衡凸集，所以$\tau_Q$是局部凸的拓扑.

当P是决定τ的拟范数族时，$\{O(0;p;\ 1)\,|\,p\in P\}$的有限交的正数倍全体是$\tau$的局部基，所以$\{Q(O(0;p;\ 1))\,|\,p\in P\}$的有限交的正数倍全体也是$\tau_Q$的局部基，而这种集的 Minkowski 泛函就组成了决定τ_Q的拟范数族，记$Q(O(0;p;1))$的Minkowski 泛函为$\tilde{p}$，对于$\tilde{x}\in L/L_0$，数$t>0$使$t\tilde{x}\in Q(O(0;p;\ 1))$等价于有$z\in O\left(0;\ p;\ \frac{1}{t}\right)$使$Q(z)=\tilde{x}$. 因而$\tilde{p}(\tilde{x})=\inf\left\{\frac{1}{t}\,\middle|\,t>0,\ t\tilde{x}\in Q(O(0;p;1))\right\}=\inf\{p(z)\,|\,z\in\tilde{x}\}$所以$\{\tilde{p}\,|\,p\in P\}$是决定商拓扑$\tau_Q$的拟范数族.

引理 1 设(L_1,τ_1)，(L_2,τ_2)是局部凸空间，$T\in L(L_1\to L_2)$，则$T\in B(L_1\to L_2)$的充分必要条件是：对于$(L_2,\ \tau_2)$的连续拟范数q，$q\circ T$是(L_1,τ_1)的连续拟范数.

证 必要性 当q是L_2上拟范数，$T\in L(L_1\to L_2)$时，$q\circ T$是L_1上的拟范数. 而当T,q都连续时，$q\circ T$是连续的.

充分性 如果对(L_2,τ_2)的连续拟范数q，$q\circ T$都在(L_1,τ_1)上连续，则当L_1中网$\{x_\alpha\}$使$x_\alpha\to 0(\tau_1)$时，$q\circ T(x_\alpha)\to 0$，即$q(Tx_\alpha)\to 0$，故$Tx_\alpha\to 0(\tau_2)$即T在0处连续，从而$T\in B(L_1\to L_2)$. 证毕.

系 设$(L_\alpha,\ \tau_\alpha)$是一族局部凸空间，M是线性空间，又对每个α，$T_\alpha\in L(L_\alpha\to M)$，则

$\{q\,|\,q$是M上拟范数，对每个α，$q\circ T_\alpha$是(L_α,τ_α)上连续拟范数$\}$所决

定的 M 的拓扑是使每个 T_α 都连续的 M 的最强局部凸拓扑.

定理 4 设 (L_1, τ_1), (L_2, τ_2) 是局部凸空间, L_0 是 L_1 的线性子空间, τ_Q 是 L_1/L_0 的商拓扑, 那末

(i) 如果 $T\in L(L_1/L_0\to L_2)$, 则 $T\in B(L_1/L_0\to L_2)$ 的充分必要条件是 $T\circ Q\in B(L_1\to L_2)$.

(ii) 如果 $S\in B(L_1\to L_2)$ 且 L_0 在 S 的零空间中, 则有唯一的 $T\in B(L_1/L_0\to L_2)$ 使 $T\circ Q=S$.

证 (i) **必要性** 是显然的.

充分性 如 $T\circ Q$ 是连续的, 则对于 $O\in\tau_2$, $(T\circ Q)^{-1}(O)\in\tau_1$, 也即 $Q^{-1}(T^{-1}(O))\in\tau_1$, 由此 $T^{-1}(O)\in\tau_Q$, 可见 T 是连续的.

(ii) 如果 $S\in B(L_1\to L_2)$ 且 S 在 L_0 上为 0, 对于 L/L_0 中元 $\tilde{x}$, 令 $T\tilde{x}=Sx$. 由于 S 在 L_0 上为 0, 故当 $\tilde{x}=\tilde{y}$ 时, 即 $x-y\in L_0$, 有 $Sx=Sy$, 所以 T 的意义是确定的. 易见 T 是 $L_1/L_0\to L_2$ 的线性算子, 由作法即知 $T\circ Q=S$. 由 (i) 又知 T 是连续的. 而由 $T\circ Q=S$ 的要求即知 T 只能这样作, 唯一性是显然的. 证毕.

系 在定理 4 的条件下, $B(L_1/L_0\to L_2)\to B(L_1\to L_2)$ 的映射: $T\longmapsto T\circ Q$ 是线性算子, 并且是单射. 它的值域是

$$\{S\mid S\in B(L_1\to L_2), S \text{ 的零空间包含 } L_0\}.$$

3.3.5 弱*拓扑

当 (L,τ) 是局部凸空间时, $(L,\tau)^\#$ 是 L' 的线性子空间, 在 $(L,\tau)^\#$ 中也可以引进拓扑, 常用的是下面的拓扑.

定义 设 (L,τ) 是局部凸空间, 对于 $x\in L$, 作 $\hat{x}: L^\#\to\mathbf{K}: f\longmapsto f(x)$, 由 $\{\hat{x}\mid x\in L\}$ 导出的 $L^\#$ 的拓扑称为弱*拓扑.

$L^\#$ 的弱*拓扑有时也称为 τ 的弱*拓扑. 但是弱*拓扑与(τ 的)弱拓扑不同, 当线性空间 L 有不同的局部凸拓扑 τ_1, τ_2 时, 分别有 τ_1^w 及 τ_2^w, 它们都是 L 的局部凸拓扑. 而弱*拓扑与 L 的拓扑 τ 的

关系只是由 τ 而影响到 $(L,\ \tau)^*$ 这个线性子空间有多大．实际上，对于 L' 的任何一个线性子空间(仍记为 L^*)，把 $x\in L$ 固定而 $f(x)$ $(f\in L^*)$ 看作是 L^* 上的线性泛函，由这种线性泛函全体导出的拓扑就是 L^* 的弱*拓扑．记为 $\hat{x}$ 只是必要时表示区别而已．L^* 的弱*拓扑记为 $\sigma(L^*,L)$．

当 L^* 是 L' 的线性子空间时，由定义可知，对于 $f_0\in L^*,x_1,\cdots,x_n\in L,\varepsilon>0$，形为

$$\{f\mid f\in L^*,\ \ |f(x_k)-f_0(x_k)|<\varepsilon\quad(k=1,\ 2,\cdots,n)\}$$

的集全体是 $\sigma(L^*,L)$ 的基，上面的集记为 $O(f_0;x_1,\cdots,x_n;\ \varepsilon)$．而

$$\{O(0;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon)\mid x_1,\cdots,x_n\in L,\ \varepsilon>0\}$$

是 $\sigma(L^*,L)$ 的局部基．对于 L^* 中的网 $\{f_\alpha\}$，$f_\alpha\to 0(\sigma(L^*,\ L))$ 的充分必要条件是：对任何 $x\in L$，$f_\alpha(x)\to 0$．弱*拓扑也即是点点收敛的拓扑．

容易看到，$\sigma(L^*,L)$ 是 $\sigma(L',L)$ 在 L^* 上的诱导拓扑，而且因为 $\{\hat{x}\mid x\in L\}$ 分离 L^* 的点，所以 $\sigma(L^*,L)$ 是 Hausdorff 拓扑．

定理 1(Alaoglu-Bourbaki)　设 $(L,\ \tau)$ 是局部凸空间，p 是 (L,τ) 上的连续拟范数，则 $\{f\mid f\in L^*,|f(x)|\leqslant p(x)\ (x\in L)\}$ 是 $(L^*,\sigma(L^*,L))$ 中的紧集．

证　把 L 作为足标集，对于每个 $x\in L$，记 $K_x=\bar{K}(p(x))$，即 $K_x=\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{K},\ |\lambda|\leqslant p(x)\}$，在通常拓扑下，$K_x$ 是个紧空间．由 Тихонов 定理，乘积拓扑空间 $\bigtimes\limits_x K_x$ 是紧空间．而

$$\bigtimes_x K_x=\{\varphi\mid\varphi:L\to\mathbf{K},\ |\varphi(x)|\leqslant p(x)\ \ (x\in L)\}.$$

按乘积拓扑的定义，可知 $\bigtimes\limits_x K_x$ 中网 $\{\varphi_\alpha\}$ 及元 φ_0 使 $\varphi_\alpha\to\varphi_0$ 的充分必要条件是对任何 $x\in L,\varphi_\alpha(x)\to\varphi_0(x)$．

在 $(L^*,\ \sigma(L^*,L))$ 中，网 $\{f_\alpha\}$ 收敛于元 f_0 也是点点收敛．记

$$A=\{f \mid f\in L^{\#}, |f(x)|\leqslant p(x)\}=\{f \mid f\in L', |f(x)|\leqslant p(x)\}.$$

由此，A 是 $\bigtimes_x K_x$ 的子集，且 $\sigma(L^{\#}, L)$ 与 $\bigtimes_x K_x$ 的乘积拓扑在 A 上的诱导拓扑是相同的. 由 3.1.6定理1，要证明 A 是$(L^{\#}, \sigma(L^{\#}, L))$ 中紧集，只要证$(A, \sigma(L^{\#}, L)|_A)$是紧空间，因而也就只要证明 A 是乘积拓扑空间 $\bigtimes_x K_x$ 中的紧集. 下面证明 A 是 $\bigtimes_x K_x$ 中的闭集.

设 $\varphi_0\in \bigtimes_x K_x$ 是在$\bar{A}$ 中的元，则有 A 中网$\{f_\alpha\}$ 使 $f_\alpha\to\varphi_0$. 即对于任何 $x\in L, f_\alpha(x)\to\varphi_0(x)$，而 $A=\{\varphi \mid \varphi\in \bigtimes_x K_x, \varphi\in L'\}$. 对于 L 中的元 x, y，由于 $f_\alpha(x)\to\varphi_0(x)$，$f_\alpha(y)\to\varphi_0(y)$，$f_\alpha(x+y)\to\varphi_0(x+y)$且 $f_\alpha(x+y)=f_\alpha(x)+f_\alpha(y)$，易见 $\varphi_0(x+y)=\varphi_0(x)+\varphi_0(y)$. 同样对于 $x\in L$ 及 $\lambda\in\mathbb{K}$，由 $f_\alpha(x)\to\varphi_0(x)$，$f_\alpha(\lambda x)\to\varphi_0(\lambda x)$ 及 $f_\alpha(\lambda x)=\lambda f_\alpha(x)$可知 $\varphi_0(\lambda x)=\lambda\varphi_0(x)$. 从而 $\varphi_0\in L'$，即 $\varphi_0\in A$，故 A 是 $\bigtimes_x K_x$ 中闭集，因为 $\bigtimes_x K_x$ 是紧空间，由 3.1.4 定理 3，A 是 $\bigtimes_x K_x$ 中紧集. 证毕.

在 $L^{\#}$ 中还可引进其它的拓扑.

定义 设(L,τ)是局部凸空间，$L^{\#}=(L, \tau)^{\#}$. 对于(L,τ)中有界集A，令 $q_A:L^{\#}\to\mathbb{K}$: $f\longmapsto \sup\{|f(x)| \mid x\in A\}$，由$\{q_A \mid A$ 是(L,τ)中有界集$\}$所决定的拓扑称为 $L^{\#}$ 的**强拓扑**.

同样，对于线性空间 L 及 L' 的线性子空间(仍记为 $L^{\#}$)，这时有 L 的局部凸拓扑 τ 使$(L,\tau)^{\#}=L^{\#}$，最弱的是 $\sigma(L, L^{\#})=\tau^W$. 由 3.3.4 定理 2，(L,τ)中的有界集与$(L,\sigma(L, L^{\#}))$中的有界集是相同的概念. 因而对于线性空间 L 及 L' 的线性子空间 $L^{\#}$，就可定义 $L^{\#}$ 的强拓扑.

当 L 是线性空间，L' 是 L' 的线性子空间时，$L^{\#}$ 的强拓扑记为 $\beta(L^{\#},L)$. 显然 $\beta(L^{\#},L)$ 比 $\sigma(L^{\#}, L)$ 强. 而对于 $L^{\#}$ 中的网 $\{f_\alpha\}$, $f_\alpha\to 0(\beta(L^{\#},L))$ 的充分必要条件是：对于 $(L,\sigma(L, L^{\#}))$ 中的有界集 A, f_α 在 A 上一致收敛于 0.

3.3.6 端点，Крейн-Мильман 定理，不动点定理

定义 设 L 是线性空间，A 是 L 中凸集，如果 $x_0\in A$ 有下列性质：A 中元 y,z 及 $t\in(0, 1)$ 使 $x_0=ty+(1-t)z$ 时，必定 $y=z(=x_0)$，则称 x_0 是 A 的**端点**.

引理 1 设 L 是线性空间，A 是 L 中凸集，$x_0\in A$，则 x_0 是 A 的端点的充分必要条件是：对 L 中任何非零元 x，x_0+x 与 x_0-x 不会都在 A 中.

证 必要性是显然的.

充分性 用反证法，如果 $y, z\in A$, $t\in(0, 1)$ 使 $x_0=ty+(1-t)z$ 且 $y\neq z$，不妨设 $t\leqslant\frac{1}{2}$，这时 $2ty+(1-2t)z\in A$，记这元为 y_1，易见 $y_1+z=2x_0$，因为 $z\neq x_0$，记 $x=x_0-z$，于是 $x\neq 0$ 而 $x_0+x(=y_1)$, $x_0-x(=z)$ 都在 A 中，这与假设矛盾. 证毕.

下面是关于凸集端点的基本定理，它有很广泛的应用.

定理 1 (Крейн-Мильман) 设 (L,τ) 是局部凸 Hausdorff 空间，A 是 (L,τ) 的非空凸紧集，则 (i) A 必有端点；(ii) 记 A 的端点全体为 B，有 $\overline{\text{co}}\, B=A$.

在证明这定理之前，先引进一个概念. 如果 A 是局部凸 Hausdorff 空间中的非空凸紧集，又 B 是 A 的非空凸闭子集，如 B 有下列性质：当 $y,z\in A$, $t\in(0, 1)$ 使 $ty+(1-t)z\in B$ 时就必定 y, $z\in B$，则称 B 是 A 的**面**. 由定义，如果 B 是 A 的面，C 是 B 的面，那末当 $y,z\in A$, $t\in(0,1)$ 使 $ty+(1-t)z\in C$ 时，$y,z\in B$，进而又有 y,

$z\in C$，所以C是A的面。另外显然可见，单点集$\{x_0\}$是A的面就等价于x_0是A的端点。下面证明定理。

证 证明分两步。先证当A是多于一点的凸紧集时，必定有真子集是它的面。设A中有两个不同的元x_1,x_2，由于$(L,\ \tau)$是局部凸 Hausdorff 空间，故有$f\in(L,\tau)^*$使$\mathrm{Re}f(x_1)\neq\mathrm{Re}f(x_2)$，记$a=\max\{\mathrm{Re}f(x)\,|\,x\in A\}$并记$A_1=\{x\,|\,x\in A,\mathrm{Re}f(x)=a\}$。由于$\mathrm{Re}f$是连续的，$A$是紧集，故极大值可达，从而$A_1$非空。由$\mathrm{Re}f$的连续性及实线性，$A_1$是凸闭集。而当$y,z\in A$，$t\in(0,\ 1)$使得$ty+(1-t)z\in A_1$时，由

$$\mathrm{Re}f(y)\leqslant a,\mathrm{Re}f(z)\leqslant a,t\mathrm{Re}f(y)+(1-t)\mathrm{Re}f(z)=a,$$

即知$\mathrm{Re}f(y)=\mathrm{Re}f(z)=a$，即$y,z\in A_1$。又因$\mathrm{Re}f(x_1)\neq\mathrm{Re}f(x_2)$，所以$A_1\neq A$。因而$A_1$是$A$的真子集且$A_1$是$A$的面。

现证A有极小的面。记$\boldsymbol{B}=\{B\,|\,B$是A的面$\}$。在$\boldsymbol{B}$中用$\supset$为半序。对$\boldsymbol{B}$的全序子集$\boldsymbol{B}_1$，记$\bigcap\{B\,|\,B\in\boldsymbol{B}_1\}$为$B_1$，由于$\boldsymbol{B}_1$是全序的，所以$B_1$是联族，因$A$是紧集，$B_1$非空。又$B_1$是凸闭集，容易验证$B_1$是$A$的面，所以$B_1$是$\boldsymbol{B}_1$的上界。由 zorn 引理，$\boldsymbol{B}$有极大元$B_0$，$B_0$是$A$的极小的面。由前面所证，$B_0$必定是单点集。$B_0$中的那个元就是$A$的端点。

记A的端点全体为B，现在证明$\overline{\mathrm{co}}\,B=A$。易见$\overline{\mathrm{co}}\,B\subset A$。如果$\overline{\mathrm{co}}\,B\neq A$，则有$x_0\in A$而$x_0\overline{\in}\,\overline{\mathrm{co}}\,B$，由 3.3.3 定理 2，有$f_1\in(L,\tau)^*$及$\varepsilon>0$使$\mathrm{Re}f_1(x)<\mathrm{Re}f_1(x_0)-\varepsilon\ \ (x\in\overline{\mathrm{co}}\,B)$，如前记$b=\max\{\mathrm{Re}f_1(x)\,|\,x\in A\}$及作$(\mathrm{Re}f_1)^{-1}(\{b\})$，这是$A$的面且与$\overline{\mathrm{co}}\,B$不交，因而它有端点。这个端点不在$\overline{\mathrm{co}}\,B$中，与$B$是$A$的端点全体矛盾。可见$\overline{\mathrm{co}}\,B=A$。证毕

例 1 $\overline{K}(1)$的端点全体是$\{\lambda\,|\,\lambda\in\mathbf{K},\ |\lambda|=1\}$。

例 2 $l^1=\{(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},\cdots)\,|\,x^{(n)}\in\mathbf{K},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x^{(n)}|<+\infty\}$，

对 l^1 中元 $x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots)$，记 $\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}|x^{(n)}|$，又记 $A=\{x\mid x\in l^1,\|x\|\leqslant 1\}$，则 A 的端点全体是 $\{x\mid x\in A, x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots)$，有 n_0 使 $|x^{(n_0)}|=1\}$.

例 3 $c_0=\{(x^{(1)},x^{(2)},\cdots)\mid x^{(n)}\in\mathbf{K},\ x^{(n)}\to 0\}$，记 $A=\{x\mid x\in c_0,\ x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots),\sup_n|x^{(n)}|\leqslant 1\}$. 则 A 没有端点.

定理 2 设 (L,τ) 是局部凸 Hausdorff 空间，A 是 (L,τ) 中非空凸紧集，又 $B\subset A$，B 是闭集且 $\overline{\mathrm{co}}\,B=A$，则 A 的端点都在 B 中.

证 用反证法，设 x_0 是 A 的端点但 $x_0\notin B$. 因为 B 是闭集，所以有 0 的凸邻域 V 使 x_0-V 与 B 不交，取 0 的凸邻域 W 使 $W-W\subset V$，于是 $(x_0+W)\cap(B+W)=\varnothing$，因而 $x_0\notin(\overline{B+W})$.

由于 B 是紧集，$\{y+W\mid y\in B\}$ 是覆盖 B 的开集族，故有有限个 B 中元 $y_1,\cdots,y_n$ 使 $B\subset\bigcup_{k=1}^{n}(y_k+W)$，记 $A\cap(\overline{y_k-W})$ 为 A_k $(k=1,2,\cdots,n)$ A_k 是凸紧集，又因 $x_0\notin(\overline{y_k+W})$，故 $x_0\notin A_k$，且 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k\supset B$

由于 $\overline{\mathrm{co}}\,B=A$，故 $\overline{\mathrm{co}}\,(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=A$. 由 3.3.2 的引理4，$\overline{\mathrm{co}}\,(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\mathrm{co}\,(A_1\cup\cdots\cup A_n)$，又由 3.3.2 的引理2，可知有 $x_k\in A_k(k=1,2,\cdots n)$ 及 $a_k\in[0,1]$，$\sum_{k=1}^{n}a_k=1$，使得

$$x_0=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k,$$

由于 $x_0\notin A_k$，故 $x_0\neq x_k$ $(k=1,2,\cdots n)$，所以 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 至少有一个在 $(0,1)$ 中，不妨设 $a_1\in(0,1)$，于是

$$x_0=a_1x_1+\frac{1}{1-a_1}\left(\sum_{k=2}^{n}a_kx_k\right)(1-a_1)\text{，由于}\frac{1}{1-a_1}\sum_{k}a_kx_k\in A\text{，这}$$

与 x_0 是 A 的端点矛盾. 证毕.

系 设 (L,τ) 是局部凸 Hausdorff 空间, A 是 (L,τ) 的非空凸紧集, x_0 是 A 的端点, 则对于 A 的闭子集 B, 当 $x_0 \overline{\in} B$ 时, 必定 $\overline{\mathrm{co}}\, B \neq A$.

下面再证明几个常用的不动点定理.

定理 3 (Leray-Schauder) 设 (L,τ) 是局部凸 Hausdorff空间, A 是 (L,τ) 的凸紧集, φ 是 $A \to A$ 的连续映射, 则 φ 有不动点.

当 L 是有限维空间时, 定理 3 就是 Brouwer 定理. 在第五章中将在 Banach 空间情况下给出这一定理的证明. 为了在一般局部凸 Hausdorff 空间的情况进行证明, 要用到下列的特殊情况:

记 l^2 为 $\{x = x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \cdots) \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x^{(k)}|^2 < +\infty\}$ 并记

$$E = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots) \mid |x^{(k)}| \leqslant \frac{1}{k}, k = 1, 2, 3, \cdots\},$$

这时, E 是 l^2 中凸紧集. l^2 中元 $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots)$ 的范数用

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x^{(k)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

规定. 对 $E \to E$ 的连续映射 φ, φ 必有不动点. 同样, 对于 E 的非空凸闭子集 E_1 到自身中的连续映射, 也必定有不动点.

引理 2 设 (L,τ) 是局部凸 Hausdorff空间, A是 (L,τ) 中凸紧集, 且 A 至少有两个不同的点, 又 φ 是 $A \to A$的连续映射, 则必有 A 的非空凸闭子集 B 使 $B \neq A$ 且 $\varphi(B) \subset B$.

证 由于 τ^W 比 τ 弱, 而 τ^W 是 L 的 Hausdorff 拓扑, 因此 τ^W 和 τ 在 A 上的诱导拓扑是同一拓扑. 因而不妨设 $\tau = \tau^W$.

设 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ 是 L^*的子集, 如果对任何 $f \in \mathscr{F}_1$, 当 $x, y \in A$ 使得 $g(x) = g(y)$ 对每个 $g \in \mathscr{F}_2$ 成立时就必定 $f(\varphi(x)) = f(\varphi(y))$, 就

称 $\mathscr{F}_1$ 由 $\mathscr{F}_2$ 所决定或 $\mathscr{F}_2$ 决定 $\mathscr{F}_1$. 容易看到，当 $\mathscr{F}_2$ 决定 $\mathscr{F}_1$ 时，如果 $\mathscr{F}_2$ 中每个元乘上个非零数，所得的集仍决定 $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_1$ 中元都乘一非零数时，也仍被 $\mathscr{F}_2$ 决定.

现设 $f\in(L,\tau)^+$，由于 φ 在 A 上连续，A 是紧集，所以 φ 在 A 上是一致连续的，$f\circ\varphi$ 也是在 A 上一致连续的. 因而对 $\varepsilon>0$，有 0 的邻域 W，也即有有限个 $(L,\tau)^*$ 中元 $f_1,\cdots,\ f_n$ 及 $\delta>0$，当 $x,\ y$ 使得 $|f_k(x)-f_k(y)|<\delta(k=1,2,\cdots n)$ 且 $x,y\in A$ 时，$|(f\circ\varphi)(x)-(f\circ\varphi)(y)|<\varepsilon$，也即 $|f(\varphi(x))-f(\varphi(y))|<\varepsilon$. 对于 $\varepsilon=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$ 都有有限个 $(L,\tau)^*$ 中元，因而总共至多是一列元 $\{f_n\}$，这一列元 $\{f_n\}$ 显然有下列性质：当 $x,y\in A$ 使 $f_n(x)=f_n(y)$ 时 $(n=1,2,\cdots)$，$f(\varphi(x))=f(\varphi(y))$，即 f 可以由一列元所决定. 同样，$\{f_n\}$ 中每一个可由一列 $(L,\tau)^*$ 中元决定，因而又由一列 $(L,\tau)^*$ 中元 $\{g_n\}$ 使 $\{f_n\}$ 由 $\{g_n\}$ 所决定，依次又有一列元 $\{h_n\}$，使 $\{g_n\}$ 由 $\{h_n\}$ 所决定，等等. 记

$$\mathscr{F}=\{f\}\cup\{f_n\}\cup\{g_n\}\cup\{h_n\}\cup\cdots$$

则 $\mathscr{F}$ 仍是可列集，且 $\mathscr{F}$ 由 $\mathscr{F}$ 本身所决定，因此，任何 $f\in(L,\tau)^*$ 都有 $(L,\tau)^*$ 的可列集 $\mathscr{F}$，使得 $f\in\mathscr{F}$ 且 $\mathscr{F}$ 由 $\mathscr{F}$ 决定.

由假设，A 至少有两个不同的点 $x_0,\ y_0$，从而有 $f_0\in(L,\tau)^*$ 使 $f_0(x_0)\neq f_0(y_0)$. 于是有 $(L,\tau)^*$ 中一个可列集 $\mathscr{F}$，使 $f_0\in\mathscr{F}$ 且 $\mathscr{F}$ 由 $\mathscr{F}$ 决定. 记 $\mathscr{F}=\{f_1,f_2,f_3,\cdots\}$.

由于 f_n 在 A 上有界，故可在每个 f_n 上乘一非零数，不妨设即为 f_n 本身使得 $|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots,\ x\in A)$.

令 $T:A\to E:x\to(f_1(x),f_2(x),f_3(x),\cdots)$

映射 $T:A\to E$ 有下列性质：(i) $T(A)$ 是凸集；(ii) 当 $x,\ y\in A$ 使 $Tx=Ty$ 时，$T(\varphi(x))=T(\varphi(y))$；(iii) T 是连续的. 现证明 T 的这些性质. 对于 $T(A)$ 中元 $Tx,Ty(x,y\in A)$ 及 $t\in(0,1)$，由 $tx+(1-$

$t)y\in A$ 且 $T(tx+(1-t)y)=tTx+(1-t)Ty$，即知 $T(A)$ 是凸集。又因为 $\{f_n\}$ 由自身决定，因而当 $x, y\in A$ 使 $Tx=Ty$ 时，即 $f_n(x)=f_n(y)(n=1,2,\cdots)$，从而 $f_n(\varphi(x))=f_n(\varphi(y))(n=1,2,\cdots)$，故 $T(\varphi(x))=T(\varphi(y))$。最后，对于 $x_0\in A$ 及 $\varepsilon>0$，有 N 使 $\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\varepsilon$，记 $\delta=\sqrt{\frac{\varepsilon}{N}}$，当 $x\in A$ 且 $x\in O(x_0; f_1,\cdots,f_N;\delta)$ 时，

$$\|Tx-Tx_0\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)-f_k(x_0)|^2<N\cdot\delta^2+4\varepsilon=5\varepsilon.$$

由此即知 T 是 $A\to E$ 的连续映射，从而 $T(A)$ 是 E 中凸紧集。

作映射 $\Psi: T(A)\to T(A)$ 如下：对于 $z\in T(A)$，$z=Tx(x\in A)$，令 $\Psi(z)=T(\varphi(x))$。由上面的(ii)，Ψ 的定义是确定的。同样对于 $z_0\in T(A)$ 及 $\varepsilon>0$，先取 N 使 $\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\varepsilon$，并记 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $z\in T(A)$ 且 $\|z-z_0\|<\delta$ 时，取 A 中元 x_0, x 使 $Tx_0=z_0, Tx=z$，则

$$\begin{aligned}
&\|\Psi(z)-\Psi(z_0)\|^2\\
&=\|T(\varphi(x))-T(\varphi(x_0))\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(\varphi(x))-f_k(\varphi(x_0))|^2\\
&=\sum_{k=1}^{N}|f_k(\varphi(x))-f_k(\varphi(x_0))|^2+\sum_{k=N+1}^{\infty}|f_k(\varphi(x))-f_k(\varphi(x_0)|^2\\
&<\|z-z_0\|^2+4\varepsilon=5\varepsilon.
\end{aligned}$$

所以 Ψ 是 $T(A)\to T(A)$ 的连续映射。由于 $T(A)$ 是 E 的凸紧子集，故 Ψ 有不动点 $\bar{z}$。记 $B=T^{-1}(\bar{z})=\{x\mid x\in A,\ Tx=\bar{z}\}$。因为 $\bar{z}$ 是 Ψ 的不动点，故由 Ψ 的定义即知 $\varphi(B)\subset B$，B 是凸集，且由 T 的连续性，B 是闭集。又因 $\{f_n\}$ 中有一个是 f_0 的非零倍数，故 T 的值域至少有两个不同的点，故 $B\neq A$。B 符合要求。证毕。

定理 3 的证明 设 A 是局部凸 Hausdorff 空间 (L,τ) 的非空

凸紧集，φ 是 $A\to A$ 的连续映射，如果 B 是 A 的非空凸闭子集且 $\varphi(B)\subset B$，就称 B 是 φ 的不变子集. 在 A 的不变子集全体中以 $\supset$ 为半序，类似于 Крейн-Мильман 定理的证明，可知这时 Zorn 引理可以应用，从而有极小的 φ 的不变子集. 但由引理 2，极小的不变子集必定是单点集. 这个点就是 φ 的不动点. 故 φ 必定有不动点. 证毕.

定理 3 是对于局部凸 Hausdorff 空间的非空凸紧集到自身的连续映射都成立的，对于映射 φ 没有线性的要求.

定理 4（Марков-Kakutani） 设 (L,τ) 是局部凸 Hausdorff 空间，A 是 (L,τ) 的非空凸紧集，又 $\mathscr{T}\subset B(L\to L)$，且对于 $T,S\in\mathscr{T}$，成立 $TS=ST$. 如果（对任何 $T\in\mathscr{T}$）$T(A)\subset A$，则必有 $x\in A$，（对任何 $T\in\mathscr{T}$）$Tx=x$.

证 首先说明定理的意思. 这个定理是说，如果 $\mathscr{T}$ 是局部凸 Hausdorff 空间 (L,τ) 到自身的一族两两可交换的线性连续算子，又 (L,τ) 的非空凸紧集 A 是关于每个 $T\in\mathscr{T}$ 的不变集. 则 A 中必有元 x 是所有 $T\in\mathscr{T}$ 的不动点.

对于 $T\in\mathscr{T}$，由于 $T(A)\subset A$，故 T 限制在 A 上是 $A\to A$ 的连续映射，因而由定理 3，T 在 A 中有不动点. 记 $A_T=\{x\mid x\in A, Tx=x\}$. 易见 A_T 是 A 的非空凸闭子集. 又对于 $S\in\mathscr{T}$，当 $x\in A_T$ 时，由于 $Sx\in A$ 且 $TSx=STx=Sx$，所以 $Sx\in A_T$，因此 A_T 是 S 的不变集，同样由于 A_T 是凸紧集，故有 $y\in A_T$ 使 $Sy=y$，因此，$y\in A_T\cap A_S$. 用归纳法易证，对于 $\mathscr{T}$ 中有限个 $T_1, T_2,\cdots,T_n$，$A_{T_1}\cap A_{T_2}\cap\cdots\cap A_{T_n}$ 是非空的，于是 $\{A_T\mid T\in\mathscr{T}\}$ 有有限交性质，由于 A 是紧的，$\bigcap\limits_{T\in\mathscr{T}}A_T$ 非空，从而有 $x\in\bigcap\limits_{T\in\mathscr{T}}A_T$，即 $Tx=x$ $(T\in\mathscr{T})$ 这个 x 就是 $\mathscr{T}$ 中元的公共不动点. 证毕.

§3.4 几种局部凸空间

前节中讨论了局部凸空间，这就是拓扑是由一族拟范数决定的拓扑线性空间。拟范数也就是均衡凸开集的 Minkowski 泛函。本节要讨论几种有某些特性的局部凸空间及构造局部凸拓扑的常用方法。

3.4.1 囿空间

定义 设(L,τ)是局部凸空间，如果在(L,τ)的有界集上取值总有界的拟范数都在(L,τ)上连续，则称(L,τ)是**有界型的**，或称(L,τ)是**囿空间**(bornological space)。

定理 1 设(L,τ)是局部凸空间，则下列各点等价：

(i) (L,τ)是囿空间。

(ii) 吸收每个有界集的均衡凸集都以 0 为内点。

(iii) 对任何局部凸空间(L_1,τ_1)，把(L,τ)的有界集映射成(L_1,τ_1)中有界集的线性算子T都是连续的。

证 (i)⇒(ii) 设(L,τ)是囿空间，又W是(L,τ)中吸收每个有界集的均衡凸集。记W的 Minkowski 泛函为p，对(L,τ)的有界集A，有$\varepsilon>0$使$\varepsilon A\subset W$，故$p(\varepsilon x)\leqslant 1\ (x\in A)$。因而$p(x)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$ $(x\in A)$，即p在有界集上是有界的。由(L,τ)是囿空间，p是连续的，由 3.3.3 定理 5，$O(0;p;1)\in\tau$。又由 3.3.2 定理 1，$O(0;p;1)\subset W$，故 0 是W的内点。

(ii)⇒(iii) 设(L_1,τ_1)是局部凸空间，$T\in L(L\to L_1)$且T把(L,τ)的有界集映射成(L_1,τ_1)的有界集。于是对(L_1,τ_1)的均衡凸的 0 的邻域O及(L,τ)的有界集A，有$\varepsilon>0$使$\varepsilon T(A)\subset O$，从而

$\varepsilon A\subset T^{-1}(O)$. 所以$T^{-1}(O)$吸收$(L,\tau)$的有界集，又$T^{-1}(O)$显然是均衡凸集，因而$T^{-1}(O)$以 0 为内点，故$T$在 0 点连续，由 3.2.3 引理 1，$T$是连续的.

(iii)⇒(i) 用反证法. 设有L上拟范数p，p在有界集上有界但不连续. 设P是决定拓扑τ的L的拟范数族，记$P_1=P\cup\{p\}$，由P_1决定的拓扑记为τ_1，由 3.3.3 定理 7，在(L,τ)与(L,τ_1)中有同样多的有界集，但$\tau_1\supset\tau$而$\tau_1\neq\tau$，从而$T:(L,\tau)\to(L,\tau_1)$: $x\longmapsto x$不连续而且把有界集变成有界集，与假设矛盾. 证毕.

由 3.2.4 引理 2 的系，线性连续算子把有界集映射成有界集，而定理 1 说明，囿空间是这样的局部凸空间：从它到任一局部凸空间的线性算子，“有界性”(即把有界集映射成有界集的性质)与连续性是等价的.

定理 2 满足第一可列公理的局部凸空间是囿空间.

证 设(L,τ)是满足第一可列公理的局部凸空间，这时可取一列 0 的均衡凸邻域$\{O_n\}$是τ的局部基，并且可使这列邻域$O_1\supset O_2\supset O_3\supset\cdots$. 记$O_n$ Minkowski泛函为p_n，$\{p_n\}$是决定τ的拟范数族且$p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant p_3(x)\leqslant\cdots(x\in L)$. 如$p$是在有界集上有界的拟范数，要证$p$是连续的. 用反证法，由 3.3.3 定理 5，对任何自然数n，有$x_n\in L$使$p(x_n)>np_n(x_n)$，适当乘正数后，可以设$p_n(x_n)<1$而$p(x_n)>n$，这样得到的一列元$\{x_n\}$所成的集是有界集(因对任何k，$\sup p_k(x_n)<+\infty$)，但p在这集上无界，这与假设矛盾. 证毕.

系 设(L,τ)是局部凸空间且$\tau^W\neq\tau$，则(L,τ^W)不满足第一可列公理.

证 由于 $T:(L,\tau^W)\to(L,\tau):x\longmapsto x$ 是把有界集变成有界集的线性算子但不连续，由定理 1，(L,τ^W)不是囿空间，故(L,τ^W)不满足第一可列公理. 证毕.

设(L,τ)是局部凸空间，记$P=\{p\mid p$是L上拟范数，p在(L,τ)

的有界集上有界). 由这样的P所决定的拓扑(它与τ有关)记为$\tilde{\tau}$，易见$\tilde{\tau}$比τ强，但$(L,\tilde{\tau})$的有界集与$(L,\ \tau)$的有界集是同样多的.

定理 3 设(L,τ)是局部凸空间,则

(i) $\widetilde{\tau^W}=\tilde{\tau}=\widetilde{(\tilde{\tau})}$;

(ii) (L,τ)是囿空间的充分必要条件是$\tilde{\tau}=\tau$.

证 (i)由$\tilde{\tau}$的作法,可知$\tilde{\tau}$仅与τ的有界集全体有关，由于$\tau^W,\tau,\tilde{\tau}$的有界集都同样多，即知$\widetilde{\tau^W}=\tilde{\tau}=\widetilde{(\tilde{\tau})}$.

(ii) 如果(L,τ)是囿空间，则决定拓扑$\tilde{\tau}$的拟范数族P中的每个p都是(L,τ)连续的，所以$\tilde{\tau}$比τ弱，从而$\tilde{\tau}=\tau$. 反之如果$\tilde{\tau}=\tau$,由于上述P中的p当然是$(L,\tilde{\tau})$上连续的，从而在(L,τ)上连续. 所以(L,τ)是囿空间. 证毕.

系 设(L,τ)是局部凸空间,则$(L,\tilde{\tau})$是囿空间.

易见$\tilde{\tau}$是使得(L,τ)的有界集不减少的条件下的最强局部凸拓扑.

对于线性空间L,任取L'的线性子空间F,作L的拓扑$\sigma(L,F)$,再作$\widetilde{\sigma(L,F)}$,就得到使L成为囿空间的拓扑. 而每个使L成为囿空间的局部凸拓扑τ都可这样得到(取F为$(L,\tau)^*$即可). 但L'的两个不同的线性子空间F_1与F_2,可能会使$\widetilde{\sigma(L,F_1)}=\widetilde{\sigma(L,F_2)}$.

3.4.2 桶式空间

定义 局部凸空间(L,τ)中的均衡凸闭吸收集称为(L,τ)中的桶(barrel). 在局部凸空间(L,τ)中,如果每个桶都以0为内点,则称(L,τ)是**桶式空间**(barreled space).

完备的可度量化的局部凸空间称为 **Frechet 空间**. 完备的赋范线性空间称为 **Banach 空间**.

定义 设φ是拓扑空间(X,τ)上的实值函数，如果对任何$a\in\mathbb{R}$，$\{x|\varphi(x)\leqslant a\}$是闭集，则称$\varphi$在$(X,\tau)$上是**下半连续函数**．类似地，如果对任何$a\in\mathbb{R}$，$\{x|\varphi(x)\geqslant a\}$是闭集，则称$\varphi$是$(X,\tau)$上的**上半连续函数**．

易见对于(X,τ)上的实值函数φ，φ在(X,τ)上连续的充分必要条件是：φ是上半连续且是下半连续的．

引理 1 设(L,τ)是局部凸空间，p是L上的拟范数，那末

(i) $\{x|p(x)\leqslant 1\}$是桶的充分必要条件是p下半连续；

(ii) (L,τ)中桶A的 Minkowski 泛函p是下半连续的，而且$A=\{x|p(x)\leqslant 1\}$．

证 (i)对于(L,τ)的拟范数p，$\{x|p(x)\leqslant 1\}$是均衡凸吸收集．因而当p下半连续时，$\{x|p(x)\leqslant 1\}$是桶，反过来，如$\{x|p(x)\leqslant 1\}$是桶，即这是闭集时，对任何$a>0$，$\{x|p(x)\leqslant a\}=a\{x|p(x)\leqslant 1\}$是闭集，而$\{x|p(x)\leqslant 0\}=\bigcap\limits_{a>0}\{x|p(x)\leqslant a\}$，故也是闭集．当$a<0$时，$\{x|p(x)\leqslant a\}$是$\varnothing$，所以$p$是下半连续的．

(ii)如果A是(L,τ)的桶，p是A的 Minkowski 泛函，由于$A\subset\{x|p(x)\leqslant 1\}$，而对于使$p(y)=1$的元$y$，$\dfrac{n}{n+1}y\in A(n=1,2,\cdots)$．由$A$是闭集，$\dfrac{n}{n+1}y\to y$，所以$y\in A$，因而$A=\{x|p(x)\leqslant 1\}$．由(i) p是下半连续的．证毕．

定理 1 设(L,τ)是局部凸空间，则(L,τ)是桶式空间的充分必要条件是：(L,τ)的下半连续拟范数都是连续的．

证 由引理 1 及 3.3.3 定理 5 即得．证毕．

定理 2 Frechet 空间是桶式空间．

证 设(L,τ)是 Frechet 空间，A是(L,τ)的桶．由于A是吸

收集，$\bigcup_{n=1}^{\infty} nA=L$. 每个 nA 是闭集，由 3.2.6 定理 4，故有 n_0 使得 n_0A 有内点(设为 x_0)，于是有 0 的邻域 O 使得 $x_0+O\subset n_0A$，从而 $O\subset n_0A-x_0\subset 2n_0A$，$\frac{1}{2n_0}O\subset A$，，故 A 以 0 为内点，(L,τ) 是桶式空间. 证毕.

定义 设 (L_1,τ_1)，(L_2,τ_2) 是局部凸空间. $\mathscr{T}\subset B(L_1\to L_2)$ (即 $\mathscr{T}$ 是一族 $L_1\to L_2$ 的线性连续算子)，如果对 0 的任何 τ_2 邻域 O，有 0 的 τ_1 邻域 V 使 $\mathscr{T}(V)=\{Tx\,|\,T\in\mathscr{T},x\in V\}\subset O$，则称 $\mathscr{T}$ 是**等度连续的**.

定理 3 设 (L_1,τ_1) 是桶式空间，(L_2,τ_2) 是局部凸空间，又 $\mathscr{T}\subset B(L_1\to L_2)$，如果对任何 $x\in L_1$，$\{Tx\,|\,T\in\mathscr{T}\}$ 是 (L_2,τ_2) 中有界集，则 $\mathscr{T}$ 是等度连续的.

证 对于 0 的均衡凸的 τ_2 邻域 O，记 $O_1=\frac{1}{2}O$，由于 $O_1+O_1\subset O$，故 $\bar{O}_1\subset O$，$\bar{O}_1$ 是 (L_2,τ_2) 的均衡凸闭集. 对于 $T\in\mathscr{T}$，$T^{-1}(\bar{O}_1)$ 是 (L_1,τ_1) 中的均衡凸闭集，记 $W=\bigcap_{T\in\mathscr{T}} T^{-1}(\bar{O}_1)$，$W$ 是 (L_1,τ_1) 中的均衡凸闭集. 对任何 $x\in L_1$，由于 $\{Tx\,|\,T\in\mathscr{T}\}$ 是 (L_2,τ_2) 中有界集，故有 $\varepsilon>0$ 使 $\varepsilon\{Tx\,|\,T\in\mathscr{T}\}\subset O_1$，从而 $\varepsilon x\in W$，所以 W 是 (L_1,τ_1) 中吸收集，即 W 是桶. 从而有 (L_1,τ_1) 的 0 的邻域 $V\subset W$，于是 $\mathscr{T}(V)\subset\bar{O}_1\subset O$，即 $\mathscr{T}$ 是等度连续的. 证毕.

系(一致有界定理) 设 (L_1,τ_1) 是桶式空间，(L_2,τ_2) 是局部凸空间，$\mathscr{T}\subset B(L_1\to L_2)$，如果对任何 $x\in L_1$，$\{Tx\,|\,T\in\mathscr{T}\}$ 是 (L_2,τ_2) 中有界集，则对 (L_1,τ_1) 中有界集 A，$\mathscr{T}(A)$ 是有界集.

证 设 A 是 (L_1,τ_1) 中有界集. 对于 0 的 τ_2 邻域 O，有 0 的 τ_1 邻域 V 使 $\mathscr{T}(V)\subset O$，从而有 $\varepsilon>0$ 使 $\varepsilon A\subset V$，于是 $\varepsilon\mathscr{T}(A)\subset\mathscr{T}(V)\subset O$，故 $\mathscr{T}(A)$ 是 (L_2,τ_2) 中的有界集. 证毕.

定理 4　设(L,τ)是局部凸空间，$F\subset(L,\tau)^*$，则F是等度连续的充分必要条件是：对任何$x\in L$，$\sup\{|f(x)|\,|f\in F\}<+\infty$，且$\sup\{|f(x)|\,|f\in F\}$是$(L,\tau)$上的连续拟范数.

证　必要性　设F是等度连续的一族线性连续泛函，则有0的邻域V使$F(V)\subset K\left(\frac{1}{2}\right)$. 对任何$x\in L$，有$\varepsilon>0$使得$\varepsilon x\in V$，因而$|f(x)|<\frac{1}{2\varepsilon}(f\in F)$，故$\sup\{|f(x)|\,|f\in F\}\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}<+\infty$. 易见$\sup\{|f(x)|\,|f\in F\}$是$L$上拟范数，记它为$p$，则$V\subset O(0;p;1)$，由3.3.3定理5即知$p$是$(L,\tau)$上的连续拟范数.

充分性　如果$\sup\{|f(x)|\,|f\in F\}$是连续的(拟范数)，记它为p，则$O(0;p;1)\in\tau$. 记$O(0;p;1)$为W，则$F(W)\subset K(1)$，因而对任何$\varepsilon>0$，$F(\varepsilon W)\subset K(\varepsilon)$，即$F$是等度连续的. 证毕.

系　设(L,τ)是局部凸空间，对于$(L,\tau)^*$的等度连续的F，记$p_F(x)=\sup\{|f(x)|\,|f\in F\}$则由$\{p_F|F\subset(L,\tau)^*,F$等度连续$\}$决定的$L$的拓扑等于$\tau$.

证　因为当$F\subset(L,\tau)^*$且F等度连续时，p_F是连续的，故$\{p_F|F\subset(L,\tau)^*,F$等度连续$\}$决定的拓扑比$\tau$弱. 另一方面，对于$(L,\tau)$上的连续拟范数$p$，记$F=\{f|f\in L',\ |f(x)|\leqslant p(x)(x\in L)\}$则$F\subset(L,\tau)^*$，且由Hahn-Banach定理，可知$p_F=p$. 由定理4，$F$是等度连续的，可见$(L,\tau)$的每个连续拟范数在$\{p_F\}$中，从而这族拟范数即$(L,\tau)$的连续拟范数全体，故它决定的拓扑就是$\tau$. 证毕.

3.4.3　Mackey 空间

定义　设(L,τ)是局部凸空间，如果对于比τ强而不等于τ的L的局部凸拓扑τ_1，必定$(L,\tau_1)^*\neq(L,\tau)^*$，就称$(L,\tau)$是**Mackey 空间**.

由定义，(L,τ)是Mackey空间是指：τ是L的局部凸拓扑，而且在$\{\tau_1 | \tau_1$是L的局部凸拓扑，$(L,\tau_1)^{\#}=(L,\tau)^{\#}\}$中，也即与$\tau$有相同的#（线性连续泛函全体）的局部凸拓扑中，$\tau$是“极强”的.

引理 1 囿空间是 Mackey 空间.

证 设(L,τ)是囿空间，如果τ_1是比τ强的局部凸拓扑且有$(L,\tau_1)^{\#}=(L,\tau)^{\#}$，从而$\tau_1^{w}=\tau^{w}$，故$(L,\tau_1)$与$(L,\tau)$有同样多的有界集，所以$T:(L,\tau)\to(L,\tau_1): x\mapsto x$把有界集映射成有界集，因为$(L,\tau)$是囿空间，由3.4.1定理1，$T$是连续的. 所以当$V\in\tau_1$时，$T^{-1}(V)=V$是$\tau$开集，即$\tau_1\subset\tau$. 从而$\tau_1=\tau$. 因此比$\tau$强而与$(L,\tau)$有相同#的局部凸拓扑必定是$\tau$，即$(L,\tau)$是 Mackey 空间. 证毕.

定义 设(L,τ)是局部凸空间，如果τ_1是L的局部凸拓扑且$(L,\tau_1)^{\#}=(L,\tau)^{\#}$，则称$\tau_1$是$\tau$的**相容拓扑**.

易见相容拓扑的概念是对称的. τ的最弱相容拓扑是τ^{w}，τ的相容拓扑也即τ^{w}的相容拓扑.

对于局部凸空间(L,τ)，记$L^{\#}=(L,\tau)^{\#}$，下面再引进一些记号及$L^{\#}$的一些拓扑. (L,τ)的非空有界集全体记为$B(L,\tau)$. 对于$A\in B(L,\tau)$，记$q_A(f)=\sup\{|f(x)|\,|x\in A\}$ $(f\in L^{\#})$. 易见q_A是$L^{\#}$上的拟范数. 当$\mathbf{A}$是一族(L,τ)的非空有界集时，由

$$\{q_A | A\in\mathbf{A}\}$$

决定的$L^{\#}$的拓扑称为$L^{\#}$的**$\mathbf{A}$一致收敛拓扑**.

当取$\mathbf{A}$是L的单元集全体时，$L^{\#}$的$\mathbf{A}$一致收敛拓扑就是$L^{\#}$的弱*拓扑$\sigma(L^{\#},L)$. 当取$\mathbf{A}=B(L,\tau)$时，$L^{\#}$的$\mathbf{A}$一致收敛拓扑就是$L^{\#}$的强拓扑$\beta(L^{\#},L)$（见3.3.5）.

由3.3.3定理9，对于$L^{\#}$中的网$\{f_\alpha\}$，在$\mathbf{A}$一致收敛拓扑下的$f_\alpha\to 0$等价于对任何$A\in\mathbf{A}$，$q_A(f_\alpha)\to 0$，也即

$$\sup\{|f_\alpha(x)|\,|x\in A\}\to 0.$$

所以这就是在任何 $A\in\mathbf{A}$ 上，f_α 是一致收敛于 0 的.

与 L^* 的弱*拓扑类似，L 的 $\mathbf{A}$ 一致收敛拓扑与 L 的拓扑 τ 的关系并不太密切，τ 只是对 L^* 这个集的大小有影响，因而对于线性空间 L 及 L' 的线性子空间（仍记为 L^*），就可以定义 L^* 的 $\mathbf{A}$一致收敛拓扑.

类似地，如 L 是线性空间，F 是一族 L 上线性泛函，当 F 在 L 上点点有界，即 $\sup\{|f(x)|\,|f\in F\}<+\infty$（对任何 $x\in L$），也就是当 F 是 $(L',\sigma(L',L))$ 中非空有界集时，记

$$p_F(x)=\sup\{|f(x)|\,|f\in F\}\ (x\in L)$$

p_F 是 L 上拟范数. 而当 $\mathbf{F}$ 是一族 $(L',\sigma(L',L))$ 的（非空）有界集时，由 $\{p_F|F\in\mathbf{F}\}$ 决定的 L 的拓扑称为 L 的 **$\mathbf{F}$ 一致收敛拓扑.**

引理 2 设 (L,τ) 是局部凸空间，$F\subset(L,\tau)^*$，F 是 $(L^*,\sigma(L^*,L))$ 的均衡凸闭集，又 $f_0\in(L,\tau)^*$ 使 $|f_0(x)|\leqslant\sup\{|f(x)|\,|f\in F\}$ $(x\in L)$，则 $f_0\in F$.

证 用反证法. 如果 $f_0\overline{\in}F$，于是有 $\psi_0\in(L^*,\sigma(L^*,L))^*$，$e>0$ 使 $\quad\mathrm{Re}\psi_0(f)<\mathrm{Re}\psi_0(f_0)-e\quad(f\in F)$.
由 $\sigma(L^*,L)$ 是由线性泛函族导出的拓扑，故有 $x_0\in L$ 使得 $\psi_0(f)=f(x_0)\ (f\in L^*)$. 从而

$$\mathrm{Re}\{f(x_0)\}<\mathrm{Re}f_0(x_0)-e\quad(f\in F).$$

由 F 是均衡集，即得 $|f(x_0)|<\mathrm{Re}f_0(x_0)-e\,(f\in F)$. 所以

$$\sup\{|f(x_0)|\,|f\in F\}\leqslant\mathrm{Re}f_0(x_0)-e\leqslant|f_0(x_0)|-e,$$

与假设矛盾，故 $f_0\in F$. 证毕.

定理 1（Mackey-Arens） 设 (L,τ) 是局部凸空间，记 $\mathbf{F}_1$ 是 $(L^*,\sigma(L^*,L))$ 中均衡凸紧集全体，并记 L 的 $\mathbf{F}_1$ 一致收敛拓扑为 τ_1，τ_2 是 L 的局部凸拓扑. 则 τ_2 是 τ 的相容拓扑的充分必要条件是 $\tau^w\subset\tau_2\subset\tau_1$.

证 **必要性** 设 τ_2 是 τ 的相容拓扑，显然 $\tau^w\subset\tau_2$. 如 p 是 $(L,$

τ_2)的连续拟范数，记$F=\{f\mid f\in L', |f(x)|\leq p(x)(x\in L)\}$，由Hahn-Banach 定理(3.3.2 定理 3 的系)，$p(x)=\sup\{|f(x)|\mid f\in F\}(x\in L)$，显然$F$是均衡凸集，且$F\subset(L,\tau_2)^*=(L,\tau)^*(=L^*)$。由Alaoglu-Bourbaki 定理(3.3.5 定理1)，F是$((L,\tau_2)^*, \sigma((L,\tau_2)^*,L)$中紧集，即$F$是$(L^*,\sigma(L^*,L))$中紧集，所以$F\in\mathbf{F}_1$，由$p=p_F$，故$(L,\tau_2)$的连续拟范数都在决定拓扑$\tau_1$的拟范数族中，因而$\tau_2\subset\tau_1$。

充分性 如果$\tau^W\subset\tau_2\subset\tau_1$，则$(L,\tau^W)^*\subset(L,\tau_2)^*\subset(L,\tau_1)^*$，只要证明$(L,\tau_1)^*=(L,\tau^W)^*(=L^*)$。如果$f_0\in(L,\tau_1)^*$，则有$\mathbf{F}_1$中有限个$F_1,F_2,\cdots,F_n$及数$C$使得

$$|f_0(x)|\leqslant C\max(p_{F_1}(x),\cdots,p_{F_n}(x))\quad(x\in L).$$

记$F=C(F_1+F_2+\cdots+F_n)$，由于两紧集相加仍是紧集，因而$F\in\mathbf{F}_1$，且显然$|f_0(x)|\leqslant p_F(x)(x\in L)$。由引理 2，$f_0\in F$因而$f_0\in L^*$，即$(L,\tau_1)^*\subset L^*$，因此$(L,\tau_1)^*=L^*$。证毕。

定义 设(L,τ)是局部凸空间，记$(L^*,\sigma(L^*,L))$中均衡凸紧集全体为$\mathbf{F}_1$，则称L的$\mathbf{F}_1$一致收敛拓扑为τ的 **Mackey 拓扑**。τ的 Mackey 拓扑记为$\tau(L,L^*)$。

由Mackey-Arens 定理，$\tau(L,L^*)$是最强的τ的相容拓扑。

系 设(L,τ)是局部凸空间，则(L,τ)是 Mackey 空间的充分必要条件是$\tau=\tau(L,L^*)$。

显然，τ的 Mackey 拓扑仅与$(L,\tau)^*$有关。

如果L是线性空间，对于$x\in L$，令$\hat{x}(f)=f(x)(f\in L')$，这时$\hat{x}\in(L')'$，映射$x\longmapsto\hat{x}$称为**嵌入映射**，嵌入映射记为θ。易见θ是$L\to(L')'$的线性算子。通常在使用时，往往把$\hat{x}$只看成在L'的一部分上定义的函数。例如对局部凸空间(L,τ)，把$\hat{x}$看作在L^*上的线性泛函。但仍把$\hat{x}$记为θx。L^*的弱*拓扑就是由$\theta(L)$导出的拓扑，L^*中网$\{f_\alpha\}$的弱*拓扑下的收敛就是在L上的点点收敛。

引理 3　设(L,τ)是局部凸空间，在$(L^{*},\sigma(L^{*},L))^{*}$中有弱*拓扑，则嵌入映射$\theta$是$(L,\tau^{W})\to(L^{*},\sigma(L^{*},L))^{*}$的连续开映射(即$\theta$把开集映射成开集)，又当$(L,\tau)$是 Hausdorff 空间时，$\theta$是同胚映射.

证　由于$\sigma(L^{*},L)$是由$\theta(L)$导出的拓扑，故$(L^{*},\sigma(L^{*},L))^{*}=\theta(L)$，所以$\theta$是满射. 对于$L$中的网$\{x_\alpha\}$，$x_\alpha\to 0(\tau^{W})$等价于对任何$f\in L^{*}$成立$f(x_\alpha)\to 0$，这时$(\theta x_\alpha)(f)\to 0$，故$\theta x_\alpha\to 0$(在$(L^{*},\sigma(L^{*},L))^{*}$的弱*拓扑下)，所以$\theta$是连续的.

对于$f_1,\cdots,f_n\in L^{*}$，$\varepsilon>0$，记$O=\{x\mid x\in L,\ |f_k(x)|<\varepsilon(k=1,2,\cdots,n)\}$，又记$W=\{\varphi\mid\varphi\in\theta(L),\ |\varphi(f_k)|<\varepsilon(k=1,2,\cdots,n)\}$，由于对$x\in L$及$f\in L^{*}$，成立$(\theta x)(f)=f(x)$，所以$\theta(O)=W$. 因为$\theta$把$(L,\tau^{W})$的局部基中集映射成开集，故$\theta$是个开映射.

当(L,τ)是 Hausdorff 空间时，对于L中不同的元x,y，有$f\in L^{*}$使$f(x)\neq f(y)$，从而$\theta x\neq\theta y$，故θ是单射，由θ是开映射，故θ^{-1}是连续的，所以θ是同胚映射. 证毕.

定理 2　设(L,τ)是局部凸空间，记(L,τ^{W})的均衡凸紧集全体为$\mathbf{A}_1$，则L^{*}的$\mathbf{A}_1$一致收敛拓扑就是$\sigma(L^{*},L)$的Mackey拓扑.

证　$\sigma(L^{*},L)$的 Mackey 拓扑是$(Q(L),\sigma(Q(L),L^{*}))$的均衡凸紧集全体所相应的$L^{*}$上的拟范数族决定的拓扑. 当$A\in\mathbf{A}_1$时，$\theta(A)$是$(\theta(L),\sigma(\theta(L),L^{*}))$的均衡凸紧集. 另一方面，如果$F$是$(\theta(L),\sigma(\theta(L),L^{*}))$的均衡凸紧集，记$B=\theta^{-1}(F)$. 显然$B$是均衡凸集且$\theta(B)=F$. 如果$(L,\tau^{W})$的开集族$\{O_\alpha\}$覆盖$F$，作集族$\{V\mid V$是$(L,\tau^{W})$中开集，有足标$\alpha_0$使$\theta^{-1}(\theta(V))\subset O_{\alpha_0}\}$. 这样的$V$的和集等于$\bigcup\limits_{\alpha}O_\alpha$，$\{V\}$覆盖$B$，$\{\theta(V)\}$是覆盖$F$的开集族，由$F$的紧性，有有限个$\theta(V_1),\cdots,\theta(V_n)$覆盖$F$，从而$\theta^{-1}(\theta(V_1)),\cdots,\theta^{-1}(\theta)V_n))$覆盖$B$，可见$\{O_\alpha\}$中可取出有限个覆盖$B$，因此$B$是紧

集. 由此即知$\{\theta(A)\mid A\in\mathbf{A}_1\}$是$(\theta(L),\ \sigma(\theta(L),L^*)$的均衡凸紧集全体. 显然由$A(\in\mathbf{A}_1)$及$\theta(A)$作出的$L^*$的拟范数是相等的，故$\sigma(L^*,L)$的 Mackey 拓扑等于$L^*$的$\mathbf{A}_1$一致收敛拓扑. 证毕.

当(L,τ)是局部凸空间时，前面对L^*引进了弱*拓扑$\sigma(L^*,L)$，强拓扑$\beta(L^*,L)$以及一般的$\mathbf{A}$一致收敛拓扑($\mathbf{A}$是$B(L,\tau)$的子类). $\sigma(L^*,L)$的 Mackey 拓扑是$\mathbf{A}$一致收敛拓扑的一种. 对于L，在τ的基础上，引进了$\tau^W(=\sigma(L,L^*))$，τ的 Mackey 拓扑(等于τ^W的 Mackey 拓扑)以及一般的$\mathbf{F}$一致收敛拓扑($\mathbf{F}$是$B(L^*,\ \sigma(L^*,L))$的子类)，这些L的拓扑其实只与$(L,\tau)^*$有关. L的$B(L^*,\sigma(L^*,L))$一致收敛拓扑记作为$\beta(L,L^*)$，对于$(L^*,\sigma(L^*,L))$中的有界集F，记$p_F(x)=\sup\{|f(x)|\mid f\in F\}$，$\beta(L,L^*)$，就是由$\{p_F\mid F$是$(L^*,\sigma(L^*,L))$中有界集$\}$所决定的拓扑.

定理 3 设(L,τ)是局部凸空间，则下列各点等价:

(i) (L,τ)是桶式空间.

(ii) $(L^*,\sigma(L^*,L))$中的有界集是在(L,τ)上等度连续的.

(iii) $\tau=\beta(L,L^*)$.

证 (i)⇒(ii) $(L^*,\ \sigma(L^*,L))$中有界集F是在L上点点有界的，由3.4.2 定理 3 即知F在(L,τ)上等度连续.

(ii)⇒(iii) 由于(L,τ)上等度连续的$F(\subset L^*)$是$(L^*,\sigma(L^*,L))$中有界集，由 3.4.2 定理 4 即知$\tau=\beta(L,L^*)$.

(iii)⇒(i) 设A是(L,τ)中的桶. 记$F=\{f\mid f\in L^*,\ |f(x)|\leqslant 1\ (x\in A)\}$，$F$在$A$上有界. 由$A$是吸收集，故$F$在$L$上点点有界. 由(iii)，$p_F$在$(L,\tau)$上连续. 由于$A$是均衡凸闭集，如果$x_0\overline{\in}A$，则有$f_0\in(L,\tau)^*$及$\varepsilon>0$，使得

$$\mathrm{Re}f_0(x)<\mathrm{Re}f_0(x_0)-\varepsilon\quad(x\in A),$$

从而$|f_0(x)|<|f_0(x_0)|-\varepsilon\ (x\in A)$. 适当取正数$\lambda_0$并记$h_0=\lambda_0 f_0$，可使$|h_0(x)|<1<h_0(x_0)\ \ (x\in A)$. 这样，$h_0\in F$，$p_F(x_0)>1$，因而

$O(0;p_F;1)\subset A$. 由 $O(0;p_F;1)\in\tau$, A 以 0 为内点，所以(L,τ)是桶式空间. 证毕.

要注意的是，当(L,τ)是局部凸空间时，$(L,\tau(L,L^*))$是 Mackey 空间，但$(L,\beta(L,L^*)$并不一定是桶式空间.

系　设(L,τ)是局部凸空间，如果 $\tau(L,L^*)=\beta(L,L^*)$，则$(L,\beta(L,L^*))$是桶式空间.

证　记 $\tau_1=\beta(L,L^*,)$，由于$(L,\tau_1)^*=(L,\tau)^*$，由定理 3 中条件(iii)即知(L,τ_1)是桶式空间.

定义　设(L,τ)是局部凸空间，如果$(L^*,\sigma(L^*,L))^*=(L^*,\beta(L^*,L))^*$，则称$(L,\tau)$是**半自反的**.

由定义，(L,τ)半自反是指嵌入映射 $x\longrightarrow\hat{x}$ 是到$(L^*,\beta(L^*,L))^*$上的. 由于 $\beta(L^*,L)$比 $\tau(L^*,L)$强，所以只有 $\beta(L^*,L)=\tau(L^*,L)$时才使(L,τ)半自反，又显然这也充分了. 因而(L,τ)半自反等价于 L^*的强拓扑等于弱 * 拓扑的 Mackey 拓扑.

定理 4　设(L,τ)是局部凸空间，则(L,τ)半自反的充分必要条件是：(L,τ^W)中的有界闭集是紧集.

证　**充分性** 记(L,τ^W)的均衡凸紧集全体为 $\mathbf{A}_1$，均衡凸有界闭集全体为$\mathbf{A}$，由于(L,τ^W)中有界集的均衡凸闭包是有界集，所以 L^*的$(B(L,\tau)$一致收敛拓扑等于$\mathbf{A}$一致收敛拓扑，由假设 $\mathbf{A}\subset\mathbf{A}_1$，故 $\beta(L^*,L)$比 $\tau(L^*,L)$ 弱，所以 $\beta(L^*,L)=\tau(L^*,L)$。

必要性　如 A 是(L,τ^W)中有界集，记 $q_A(f)=\sup\{|f(x)|\mid x\in A\}$，$q_A$ 是 $\beta(L^*,L)$连续，由假设 q_A 是 $\tau(L^*,L)$连续的，所以有(L,τ^W)的均衡凸紧集$A_1,\cdots,A_n$及数 C 使得 $q_A(f)\leqslant C\max(q_{A_1}(f),\cdots,q_{A_n}(f))$ $(f\in L^*)$，记 $B=C(A_1+\cdots+A_n)$，B 仍是均衡凸紧集，且 $q_A(f)\leqslant q_B(f)$.

把在 $L\to(L^*,\sigma(L^*,L))^*$的嵌入映射下$B$的象的原象记为$B_1$，$B$的象是紧集且是闭集(因为$(L^*,\sigma(L^*,L))^*$在弱 * 拓扑下是个

Hausdorff 空间)，而B_1由嵌入映射为开映射是紧集且是闭集．显然$B_1\supset B$而$q_A(f)\leqslant q_{B_1}(f)$ $(f\in L^*)$．类似于定理3中(iii)⇒(i)部分，如$x_0\overline{\in}B_1$，有$f_0\in L^*$及$\varepsilon>0$，使$\mathrm{Re}f_0(x)<\mathrm{Re}f_0(x_0)-\varepsilon$ $(x\in B_1)$，因而

$$|f_0(x)|<|f_0(x_0)|-\varepsilon \quad (x\in B_1),$$

所以$x_0\overline{\in}A$，即$A\subset B_1$．于是(L,τ^W)中有界集必是紧集的子集，从而，有界闭集必是紧集的闭子集，因而是紧集．证毕．

由此可见，局部凸空间(L,τ)的半自反的概念实际上仅与τ^W有关．

定义 设(L,τ)是局部凸Hausdorff空间，如果(L,τ)及$(L^*,\sigma(L^*,L))$都是半自反的，并且$\tau=\beta(L,L^*)$，则称(L,τ)是自反的．

当(L,τ)是局部凸Hausdorff空间时，L和L^*的地位更为对称．嵌入映射是同胚映射．而(L,τ)自反的意思是：$\beta(L,L^*)$与$\beta(L^*,L)$分别是$\sigma(L,L^*)$与$\sigma(L^*,L)$的Mackey拓扑，而且$\tau^\circ=\beta(L,L^*)$．由定理3的系，可知自反空间必定是桶式空间．

但是有这样的局部凸Hausdorff空间，$(L,\sigma(L,L^*))$与$(L^*,\sigma(L^*,L))$中，有一个是半自反的而另一个并不半自反．

例 设考虑的线性空间是l^1和c_0，c_0中元是收敛于0的数列全体，l^1中元$x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots)$是使$\sum_{n=1}^{\infty}|x^{(n)}|<+\infty$的数列全体．对于$c_0$中元$y=(y^{(1)},y^{(2)},\cdots)$，作$l^1$上线性泛函为：

$$f_y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{(n)}y^{(n)} \quad (x\in l^1,\ x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots))$$

易见$f_y\in(l^1)'$，记$L=l^1$，$L^*=\{f_y\mid y\in c_0\}$．

局部凸空间$(L,\sigma(L,L^*))$是半自反的．但是$(L^*,\sigma(L^*,L))$并不半自反．$\beta(L,L^*)$就是由通常的l^1中范数$\|\cdot\|$所决定的拓扑．

它不是 $\sigma(L,L^{\#})$ 的相容拓扑，但是 $\beta(L^{*},L)$ 是 $\sigma(L^{*},L)$ 的 Mackey 拓扑。

3.4.4 赋范线性空间

下面讨论赋范线性空间及 Banach 空间，这是一类特殊的拓扑线性空间，它有广泛的应用并且性质很好。拓扑线性空间的一般概念和理论是赋范线性空间理论的发展，由 3.3.3 定理 8，有非空有界开集的局部凸 Hausdorff 空间，拓扑就是可以用一个范数 $\|\cdot\|$ 来决定的。决定拓扑的范数可以有多种取法，但这样的范数是拓扑等价的。所有拓扑的概念与范数的取法无关。在赋范线性空间中，$\|\cdot\|$ 就用以表示由这范数决定的拓扑，而 $\|\cdot\|^{W}$ 也就表示范数拓扑的弱拓扑。

当 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间时，$\{x\mid\|x\|\leqslant1\}$，$\{x\mid\|x\|<1\}$，$\{x\mid\|x\|=1\}$ 分别称为 $(X,\|\cdot\|)$ 的**单位闭球，单位开球**及**单位球面**。这是与范数有关的。由于 $\|\cdot\|$ 是 $(X,\|\cdot\|)$ 上的连续函数，$(X,\|\cdot\|)$ 的单位开球是开集，单位闭球和单位球面都是闭集。

引理 1 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是无限维的赋范线性空间，A 是 $(X,\|\cdot\|)$ 的单位球面，则 $0\in\bar{A}^{(\|\cdot\|^{W})}$。

证 对于 0 的 $\|\cdot\|^{W}$ 邻域 $O(0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)$ $(f_1,\cdots,f_n\in(X,\|\cdot\|)^{*},\varepsilon>0)$，记 $X_0=\{x\mid x\in X,f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_n(x)=0\}$，由于 X/X_0 是有限维空间，显然 X_0 中有非零元 y。适当乘一个正数可设 $\|y\|=1$，而易见 $y\in O(0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)$，因而 $O(0;f_1,\cdots,f_n,\varepsilon)\cap A$ 非空，所以 $0\in\bar{A}^{(\|\cdot\|^{W})}$。证毕。

系 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是无限维赋范线性空间，则 $\|\cdot\|^{W}\neq\|\cdot\|$，从而 $(X,\|\cdot\|^{W})$ 不满足第一可列公理。

例 $(l^1,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，对于 l^1 中点列 $\{x_n\}$ 及元 x_0，由 $x_n\to x_0(\|\cdot\|^{W})$ 可得 $x_n\to x_0(\|\cdot\|)$。记 $(l^1,\|\cdot\|)$ 的单位球面为 A，

那末

(i) $0\in\bar{A}^{(\|\cdot\|^W)}$,但 A 中不会有点列 $\{x_n\}$ 使 $x_n\to 0(\|\cdot\|^W)$;

(ii) 在 $(l^1,\|\cdot\|^W)$ 及 $(l^1,\|\cdot\|)$ 中,当点列 $\{x_n\}$ 按前一拓扑收敛于 x_0 时,也按后一拓扑收敛,但 $\|\cdot\|^W$ 不比 $\|\cdot\|$ 强;

(iii) $\varphi:(l^1,\|\cdot\|^W)\to(l^1,\|\cdot\|):x\mapsto x$ 是"点列连续"的,但 φ 不是连续映射.

这是说明 3.1.3 中所讲的网不能改成点列的例子.

定理 1 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, A 是 $(X,\|\cdot\|)$ 的单位球面,记 $q_A(f)=\sup\{|f(x)|\,|x\in A\}(f\in X^*)$,则

(i) X^* 的强拓扑 $\beta(X^*, X)$ 是可赋范的, 且 q_A 是决定 $\beta(X^*,X)$ 的范数.

(ii) (X^*,q_A) 的单位闭球是 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 中紧集.

(iii) (X^*,q_A) 是 Banach 空间.

证 (i) $\beta(X^*,X)$ 是由 $\{q_B|B$ 是 $(X,\|\cdot\|)$ 中有界集$\}$ 决定的拓扑. 对于 $(X,\|\cdot\|)$ 中有界集 B, 有数 c 使 $\|x\|\leqslant c(x\in B)$, 从而 $q_B\leqslant cq_A$. 因而 $\{q_A\}$ 所决定的拓扑即为 $\beta(X^*,X)$. 由于 $\beta(X^*,X)$ 是 Hausdorff 拓扑,所以 q_A 是范数.

(ii) 由于 $\{f|f\in X^*, \ q_A(f)\leqslant 1\}=\{f|f\in X^*, \ |f(x)|\leqslant\|x\|(x\in X)\}$, 由 Alaoglu-Bourbaki 定理, (X^*,q_A) 的单位闭球是 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 中的紧集.

(iii) 因为 (X^*, q_A) 是赋范线性空间, 只要证明点列完备即可. 设 $\{f_n\}$ 是 (X^*,q_A) 的基本点列, 这时 $\{f_n\}$ 是有界的. 不妨设 $\|f_n\|\leqslant 1$. 由于 $\{f_n\}$ 是 $\beta(X^*,X)$ 基本的,故是 $\sigma(X^*, X)$ 基本的. 由(ii)及 3.2.6 引理 2,有 $f_0\in X^*$ 使 $f_n\to f_0(\sigma(X^*,X))$.

对 $\varepsilon>0$,有 N 使当 $n,m\geqslant N$ 时, $q_A(f_n-f_m)<\varepsilon$,即

$$\sup_{x\in A}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

固定 $n(\geqslant N)$, $x\in A$, 令 $m\to\infty$, 得 $|f_n(x)-f_0(x)|\leqslant\varepsilon$, 即当 $n\geqslant N$

时，$q_A(f_n-f_0)<\varepsilon$，所以 $f_n\to f_0(q_A)$. 证毕.

定理 2 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，$F\subset X^*$，则 F 是 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 中紧集的充分必要条件是：F 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭且是 $\beta(X^*,X)$ 有界的.

证 必要性 如果 F 是 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 中紧集，由于 $\sigma(X^*,X)$ 是 Hausdorff 拓扑，且由 3.2.4 定理 1，F 是 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 的有界闭集. 又由 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，故是桶式空间，由 F 是 $\sigma(X^*,X)$ 的有界集，F 在有界集上有界，故 F 是 $\beta(X^*,X)$ 有界的.

充分性 如果 F 是 $\beta(X^*,X)$ 有界的，则有数 c 使得 $q_A(f)\leqslant c(f\in F)$，但因 $\{f\mid f\in X^*,\ q_A(f)\leqslant c\}=c\{f\mid f\in X^*,\ q_A(f)\leqslant 1\}$ 是 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 中的紧集，因而 F 是 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 中紧集的子集. 如果 F 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭集，则 F 是紧集的闭子集，从而 F 是 $\sigma(X^*,X)$ 紧集. 证毕.

定理 2 中 $(X,\|\cdot\|)$ 的完备性仅用于必要性的证明. 对赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$，$(X^*,\sigma(X^*,X))$ 中紧集可以不是 $\beta(X^*,X)$ 有界的.

例 设 X 是只有有限项不为 0 的数列全体，对 X 中元 $x=(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},\cdots)$，令 $\|x\|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x^{(k)}|$. 又对于自然数 n，设 f_n 是如下的 X 上线性泛函：$f_n(x)=nx^{(n)}$（当 $x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots)\in X$）并设 f_0 是恒等于 0 的泛函. 记 $F=\{f_n|n=0,1,2,\cdots\}$，易见 $F\subset(X,\|\cdot\|)^*$，但 F 不是 $\beta(X^*,X)$ 有界的.

当 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 的一族开集覆盖 F 时，其中有一个 V 含有 $f_0(=0)$，从而有 $x_1,\cdots,x_n\in X$，$\varepsilon>0$ 使 $O(0;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon)\subset V$，于是有 N 使得当 $l>N$ 时 $x_1,\cdots,x_n$ 的第 l 分量都是 0，由此当 $l>N$ 时，$f_l\in V$. 因此 $F\backslash V$ 是有限集，可见在这族集中可取有限个覆盖

F,所以F是$(X^{\#},\sigma(X^{\#},X))$中紧集.

定义 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间,记$(X,\|\cdot\|)^{\#}$为X^{*},对于$f\in X^{*}$,令$\|f\|=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in x,\ \|x\|=1\}$,称$(X^{*},\ \|\cdot\|)$为$(X,\|\cdot\|)$的**共轭空间**,$(X,\|\cdot\|)$的共轭空间也记为$X^{*}$.

由定义,$(X,\|\cdot\|)$的共轭空间$X^{*}=(X^{*},\ \|\cdot\|)$是Banach空间,$X^{*}$的范数决定的拓扑也就是$\beta(X^{\#},X)$,这拓扑也以$\|\cdot\|$表示,$X^{*}$的范数与$X$的范数$\|\cdot\|$有关.由定义当$f\in X^{\#},x\in X$时,显然$|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|$.由于$X^{*}$是Banach空间,同样又有$(X^{*})^{*}$等等.

当$(X,\ \|\cdot\|)$是赋范线性空间时,由于X^{*}的范数拓扑比$\sigma(X^{\#},X)$强,因而对$x\in X,\theta x\in(X^{*})^{\#}$($\theta$是嵌入映射).

引理2 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间,则θ是$(X,\ \|\cdot\|)\to(X^{*})^{*}$的保范映射,即对$x\in X$,$\|\theta x\|=\|x\|$.

证 对$x\in X$,$f\in X^{*}$,由于$|\hat{x}(f)|\leqslant\|f\|\|x\|$,所以$\|\hat{x}\|=\sup\{|\hat{x}(f)|\,|\,f\in X^{*},\ \|f\|=1\}\leqslant\|x\|$.又由Hahn-Banach定理,有$f_0\in X^{*}$使$f_0(x)=\|x\|$且$\|f_0\|=1$,而$|\hat{x}(f_0)|=\|x\|$,故$\|\hat{x}\|\geqslant\|x\|$.证毕.

引理3 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间,则$\theta(X)=(X^{*})^{*}$的充分必要条件是:$(X,\|\cdot\|)$的单位闭球A是$\sigma(X,X^{*})$紧集.

证 $\theta(X)=(X^{*})^{*}$即指$(X,\|\cdot\|)$半自反,由3.4.3定理4.这等价于$(X,\sigma(X,X^{*}))$中有界闭集是紧集,也等价于$(X,\ \sigma(X,X^{*}))$的均衡凸有界闭集是紧集,故必要性显然.

充分性 如果$(X,\|\cdot\|)$的单位闭球A是$\sigma(X,X^{*})$紧集,则对$c\geqslant0$,cA是$(X,\sigma(X,X^{*}))$中的紧集.但$(X,\sigma(X,\ X^{*}))$的均衡凸有界闭集是$(X,\|\cdot\|)$的有界闭集.所以$(X,\ \|\cdot\|)$的均衡凸有界闭集必是cA形式的集,所以$(X^{*},\|\cdot\|)^{*}=\theta(X)$.证毕.

定理3 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间,则$(X,\|\cdot\|)$自反的充分

必要条件是：$(X,\|\cdot\|)$的单位闭球 A 是$(X,\sigma(X,X^{\#}))$中紧集.

证　必要性是显然的.

充分性　由引理 3，$(X,\|\cdot\|)$半自反，$(X^{\#},\|\cdot\|)^{\#}=\theta(X)$，因而在 $X^{*}=(X^{\#},\|\cdot\|)$中，$\|\cdot\|^{W}$ 就是 $X^{\#}$ 的弱 * 拓扑. 而 X^{*} 的单位闭球是$(X^{\#},\sigma(X^{\#},X))$中紧集，也即是$(X^{\#},\|\cdot\|^{W})$中紧集，由引理 3，$X^{*}$ 是半自反. 又因$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间，从而是桶空间，所以$\|\cdot\|$就等于 $\beta(X,X^{\#})$，所以$(X,\|\cdot\|)$是自反空间. 证毕.

系 1　如果$(X,\|\cdot\|)$自反，则 X^{*} 是自反的.

系 2　自反空间$(X,\|\cdot\|)$的闭子空间是自反的.

证　设$(X,\|\cdot\|)$是自反空间，X_0 是 X 的闭子空间，记$(X,\|\cdot\|)$及$(x_0\|\cdot\|)$的单位闭球为A及A_0，由Hahn-Banach定理，$(X_0,\|\cdot\|)^{*}$中的f_0可以延拓成$(X,\|\cdot\|)^{\#}$中的f，所以$(X_0,\sigma(X_0,X_0^{*}))$是$(X,\|\cdot\|^{W})$的子空间. 由于$(X,\|\cdot\|)$自反，$A$ 是$(X,\|\cdot\|^{W})$中紧集，而 $A_0=A\cap X_0$ 是$(X,\|\cdot\|)$中凸闭集，所以 A_0 是$(X,\|\cdot\|^{W})$的凸闭集，从而 A_0 是$\|\cdot\|^{W}$ 紧集，由此，A_0 是$(X_0,\sigma(X_0,X_0^{*}))$中紧集，由定理1可知$(X_0,\|\cdot\|)$是自反空间. 证毕.

一般对于赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$，是以 $\theta(X)=(X^{*})^{*}$ 作为自反的定义的. 由引理 3 及定理 1，可知这是等价的定义. 由于 θ 是$(X,\|\cdot\|)\to(X^{*})^{*}$ 的保范映射，且$(X^{*})^{*}$ 是 Banach 空间，所以自反空间一定是 Banach 空间. 容易看到，有限维的赋范线性空间必定是自反的.

引理 4　设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1$ 及 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数，如果 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 决定的拓扑相同，则$(X,\|\cdot\|_1)$自反与$(X,\|\cdot\|_2)$自反是等价的.

证　由于$(X,\|\cdot\|_1)^{\#}=(X,\|\cdot\|_2)^{\#}$，记为 $X^{\#}$，则 $X^{\#}$ 的强拓扑 $\beta(X^{\#},X)$相同，因此$((X,\|\cdot\|_1)^{*})^{\#}=((X,\|\cdot\|_2)^{*})^{\#}$，从而$(X,\|\cdot\|_1)$的半自反等价于$(X,\|\cdot\|_2)$的半自反. 由于自反与半自反是

相同的，所以$(X, \|\cdot\|_1)$ 的自反性与$(X, \|\cdot\|_2)$ 的自反性等价. 证毕.

定义 设$(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$是两个赋范线性空间，$X_1 \to X_2$ 的保范的线性双射称为线性保范同构. 存在线性保范同构的两个赋范线性空间称为**线性保范同构的**.

引理 5 设$(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$是线性保范同构的两个赋范线性空间，如果$(X_1, \|\cdot\|_1)$是自反的，则$(X_2, \|\cdot\|_2)$也是自反的.

证 设T是$X_1 \to X_2$的线性保范同构，当$f \in (X_2, \|\cdot\|_2)^*$时，$f \circ T$是$(X_1, \|\cdot\|_1)^*$中元，因而当$X_1$中网$\{x_\alpha\}$使$x_\alpha \to 0$ $(\|\cdot\|_1^w)$时，对任何$f \in (X_1, \|\cdot\|_1)^*$, $(f \circ T)(x_\alpha) \to 0$(即$f(Tx_\alpha) \to 0$)，即$Tx_\alpha \to 0$ $(\|\cdot\|_2^w)$，所以T是$(X_1, \|\cdot\|_1^w) \to (X_2, \|\cdot\|_2^w)$的连续映射. 同理$T^{-1}$是$(X_2, \|\cdot\|_2^w) \to (X_1, \|\cdot\|_1^w)$的连续映射. 因此，$T$是$(X_1, \|\cdot\|_1^w) \to (X_2, \|\cdot\|_2^w)$的同胚. 由$(X_1, \|\cdot\|_1)$的单位闭球$A$是$(X_1, \|\cdot\|_1^w)$中紧集，$T(A)$是$(X_2, \|\cdot\|_2^w)$中紧集，又$T(A)$即$(X_2, \|\cdot\|_2)$的单位闭球，所以$(X_2, \|\cdot\|_2)$是自反的. 证毕.

系 1 设$(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$是赋范线性空间，T是$X_1 \to X_2$的线性双射，且$T \in B(X_1 \to X_2)$, $T^{-1} \in B(X_2 \to X_1)$，如果$(X_1, \|\cdot\|_1)$自反，则$(X_2, \|\cdot\|_2)$是自反的.

证 在X_2上作另一个范数$\|\cdot\|$如下：对$y \in X_2$，令$\|y\| = \|T^{-1}y\|_1$，于是T是$(X_1, \|\cdot\|_1) \to (X_2, \|\cdot\|)$的线性保范同构，又$X_2$的范数$\|\cdot\|_2$与$\|\cdot\|$决定的拓扑相同. 由引理 5，$(X_2, \|\cdot\|)$自反. 又由引理 4，$(X_2, \|\cdot\|_2)$自反. 证毕.

系 2 设$(X, \|\cdot\|)$是 Banach 空间，如果X^*自反，则$(X, \|\cdot\|)$是自反的.

证 当X^*自反时，$(X^*)^*$自反. 又嵌入映射θ是线性保范算子，由$(X, \|\cdot\|)$是 Banach 空间，$\theta(X)$是$(X^*)^*$的闭子空间. 由定理 3 系 2，$\theta(x)$是自反的，再由引理 5 系 1，即知$(X, \|\cdot\|)$是自

反的. 证毕.

引理 6 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间, X_0是$(X,\|\cdot\|)$的闭子空间, 在商空间 X/X_0 中, 对于元 $\tilde{x}=x+X_0$, 令 $\|\tilde{x}\|=\inf\{\|y\| \mid y\in\tilde{x}\}$, 则$(X/X_0,\|\cdot\|)^*\to(X,\|\cdot\|)^*$ 的映射 $g\longmapsto g\circ Q$ 是保范的(Q 是商映射).

证 由 3.3.4 定理 3 及定理 4, 商空间 X/X_0 中的 $\|\cdot\|$ 决定的拓扑是商拓扑, 且 $g\longmapsto g\circ Q$ 是$(X/X_0,\|\cdot\|)^*\to(X,\|\cdot\|)^*$ 的映射, 这映射的值域为$\{f\mid f\in(X,\|\cdot\|)^*, f$ 在 X_0 上为 $0\}$.

设 $g\in(X/X_0,\|\cdot\|)^*$, 记 $g\circ Q$ 为 f, 于是 $f(x)=g(\tilde{x})$ $(x\in X)$. 因为 $\|\tilde{x}\|\leqslant\|x\|$, 所以 $\|f\|\leqslant\|g\|$. 又对 $\varepsilon>0$, 有 $\tilde{x}\in X/X_0$ 使 $\|\tilde{x}\|<1$ 且 $|g(\tilde{x})|>\|g\|-\varepsilon$, 从而有 $y\in\tilde{x}$ 使 $\|y\|<1$, 于是 $|f(y)|=|g(\tilde{x})|>\|g\|-\varepsilon$, 即 $\|f\|>\|g\|-\varepsilon$, 因 ε 是任意的正数, 故 $\|f\|\geqslant\|g\|$, 因而 $\|f\|=\|g\|$. 证毕.

当$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间, X_0 是$(X,\|\cdot\|)$的闭子空间时, 在商空间 X/X_0 中总用引理 6 中的范数, $(X/X_0,\|\cdot\|)$仍简称为$(X,\|\cdot\|)$**关于 X_0 的商空间**.

定理 4 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间, 记$(X,\|\cdot\|)$及$(X^*)^*$的单位闭球分别为 A 及 B, 又在$(X^*)^\#$ 中用弱*拓扑, 则 $\overline{\theta(A)}=B$.

证 在$(X^*)^\#$ 的弱*拓扑下, B 是紧集, 从而是闭集, 因 θ 是保范的, $\theta(A)\subset B$, 所以 $\overline{\theta(A)}\subset B$.

设 $\psi\in(X^*)^*$ 且 $\|\psi\|<1$. 下面证明 $\psi\in\overline{\theta(A)}$. 对于 X^* 中元 $f_1,f_2,\cdots,f_n$, 记 $f_1,\cdots,f_n$ 张成的线性子空间为 F, 记 F 中元的公共零空间$\{x\mid x\in X, f_1(x)=\cdots=f_n(x)=0\}$为 X_0, 由 3.2.1 定理 1, X/X_0 是有限维空间, 维数与 F 的维数相同. 由引理 6, $(X/X_0,\|\cdot\|)^*\to(X,\|\cdot\|)^*$ 的映射 $g\longmapsto g\circ Q$ 是保范的. 这映射的值域即为 F. 记 $\psi|_F$ 为 φ, 显然 $\|\varphi\|\leqslant\|\psi\|<1$. 利用$(X/X_0,\|\cdot\|)^*\to F$ 的线性保范同构 $g\longmapsto g\circ Q$ 及 F 上的线性连续泛函 φ, 作$(X/X_0,$

$\|\cdot\|)^*$ 上的线性连续泛函 φ_1 如下：对 $g\in(X/X_0,\|\cdot\|)^*$，令 $\varphi_1(g)=\varphi(g\circ Q)$. 由 $g\longmapsto g\circ Q$ 是保范的，即知 $\|\varphi_1\|=\|\varphi\|$，因 $\varphi_1\in((X/X_0,\|\cdot\|)^*)^\#$，又由 $(X/X_0,\|\cdot\|)$ 是有限维的赋范线性空间，它是自反的，即有 $\tilde{x}\in X/X_0$ 使得 $\varphi_1=\theta(\tilde{x})$，且 $\|\tilde{x}\|=\|\varphi_1\|<1$. 由 $\tilde{x}$ 范数的定义，有 $y\in X$ 使 $y\in\tilde{x}$ 且 $\|y\|<1$. 于是对任何 $g\in(X/X_0,\|\cdot\|)^*$，$\varphi_1(g)=g(\tilde{x})=g(\tilde{y})$，即 $\varphi(g\circ Q)=(g\circ Q)(y)$. 因为 $\{g\circ Q\mid g\in(X/X_0,\|\cdot\|)^*\}=F$，所以对于 $f\in F$，$\varphi(f)=f(y)$.

由上所证，当 $\psi\in(X^*)^*$ 且 $\|\psi\|<1$ 时，对于 X^* 中有限个元 $f_1,\cdots,f_n$，有 $y\in X$ 使得 $\|y\|<1$ 且 $\psi(f)=f(y)$ 对每个 $f\in\mathrm{span}\{f_1,\cdots,f_n\}$ 成立. 易见 $\theta(y)\in O(\psi;f_1,f_2,\cdots,f_n;\varepsilon)$，所以 ψ 的任何 $\sigma((X^*)^\#,X^*)$ 邻域与 $\theta(A)$ 交集非空，即 $\psi\in\overline{\theta(A)}$. 由此可见 $(X^*)^*$ 的单位开球在 $\overline{\theta(A)}$ 中，当 $\psi\in(X^*)^*$ 且 $\|\psi\|=1$ 时，$\frac{n}{n+1}\psi\in\overline{\theta(A)}$，又 $\frac{n}{n+1}\psi\to\psi$，所以 $\psi\in\overline{\theta(A)}$，即 $B\subset\overline{\theta(A)}$. 从而 $\overline{\theta(A)}=B$. 证毕.

赋范线性空间及 Banach 空间是常见的一类空间. 例如 c_0，$l^p(p\geqslant1)$，l^∞，$L^p(X,S,\mu)(p\geqslant1)$，$L^\infty(X,S,\mu)$ 等都是 Banach 空间. 当 $p>1$ 时，l^p 及 $L^p(X,S,\mu)$ 是自反空间，c_0，l^1，l^∞ 等不是自反的.

当 $(X,\|\cdot\|)$ 是自反空间时，θ 是 $(X,\|\cdot\|)\to(X^*)^*$ 的线性保范同构. 但是如果赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 与 $(X^*)^*$ 线性保范同构，并不能保证 $(X,\|\cdot\|)$ 的自反性.

前面把 $(X,\|\cdot\|)$ 的共轭空间记为 X^*，X^* 是指带有特定范数的 $X^\#$. 在不致混淆的情况下，实际上也用 X^* 代表 $X^\#$. 一般从上下文中可以明白记号的意义. 例如，X^* 的弱 * 拓扑 $(X^*,\sigma(X^*,X))$，在定理 2 中也可说成 $(X^*)^*$ 中用弱 * 拓扑. 又如，

X^* 的弱拓扑的意思很清楚，是指$(X^\#, \|\cdot\|)$中范数拓扑的弱拓扑，X^* 中用弱拓扑即指$(X^\#, \sigma(X^\#, (X^*)^\#))$，通常也写成为$(X^*, \sigma(X^*, X^{**}))$，这时，$X^\#$ 的弱拓扑或$(X^\#)^\#$等的含义是不清楚的. 容易看到，当$(X, \|\cdot\|)$自反时，X^* 的弱拓扑等于 X^* 的弱 * 拓扑，而当$(X, \|\cdot\|)$不自反时，X^* 的弱拓扑 $\sigma(X^*, X^{**})$比 X^* 的弱 * 拓扑 $\sigma(X^*, X)$强并且不相等.

作为 Alaoglu-Bourbaki 定理的应用，再证明一个事实.

定义 设 $f\in(l^\infty, \|\cdot\|)^*$，如果 f 有下列性质：

(i) 对于 l^∞ 中元 $x=(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots)$ 是收敛数列时，

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}$；

(ii) 对 $x\in l^\infty, x=(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \cdots)$，记 $y=(x^{(2)}, x^{(3)}, \cdots)$，则 $f(x)=f(y)$；

(iii) 当 $x\in l^\infty, x=(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots)$是非负数列时，$f(x)\geqslant 0$，

则称 f 是个 Banach 极限.

定理 5 Banach 极限是存在的.

证 对自然数 n，作 f_n 如下：对 $x\in l^\infty, x=(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots)$，令 $f_n(x)=\frac{1}{n}(x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(n)})$. 易见 $f_n\in(l^\infty, \|\cdot\|)^*$ 且 $\|f_n\|=1$ $(n=1, 2, \cdots)$. 记

$$A_k=\{f_n \mid n\geqslant k\} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

在$(l^\infty, \|\cdot\|)^*$中用弱 * 拓扑，单位闭球是紧集. 记 $B_k=\overline{A_k}$，由于$\{A_k\}$是$(l^\infty, \|\cdot\|)^*$ 的单位闭球的子集，所以$\{B_k\}$也是单位闭球的子集，因为$\{A_k\}$是联族，所以$\{B_k\}$又是联族. 由于$\{B_k\}$是紧集的闭子集所成的联族，所以$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ 非空. 设 $f\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$，下面证明 f 是 Banach 极限.

由于 $f\in\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$，故 $f\in A_k(k=1,2,\cdots)$，因而对 f 的任何弱 * 邻域 O 及任何自然数 k，$O\cap A_k$ 非空. 从而对任何 $x\in l^{\infty}$，$\varepsilon>0$ 及自然数 k，有 $n\geqslant k$ 使 $f_n\in O(f;x;\varepsilon)$，也即 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

于是，如果 l^{∞} 中元 x_0 使 $f_n(x_0)\to a(n\to\infty$ 时)，对于 $\varepsilon>0$，可取 K_0，使当 $n\geqslant k_0$ 时，$|f_n(x_0)-a|<\varepsilon$，但又有 $n\geqslant K_0$，使 $|f(x_0)-f_n(x)|<\varepsilon$，可见 $|f(x_0)-a|<2\varepsilon$，由 ε 的任意性，即知 $f(x_0)=a$.

当 l^{∞} 中元 $x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots)$ 使 $x^{(k)}\to a$ 时，易知 $f_n(x)\to a$，从而 $f(x)=a$，即当 $x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots)$ 是收敛数列时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}$.

对于 $x\in l^{\infty}$，$x=(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},\cdots)$，记 $y=(x^{(2)},x^{(3)},\cdots)$，则 $f_n(x-y)=f_n(x)-f_n(y)=\frac{1}{n}(x^{(1)}-x^{(n+1)})\to 0$，故 $f(x-y)=0$，即 $f(x)=f(y)$.

又如 $x\in l^{\infty}$ 是非负数列，则 $f_n(x)\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，由此对 $\varepsilon>0$，$f(x)$ 必与某非负数之差的绝对值 $<\varepsilon$，可见 $f(x)\geqslant 0$.

所以 f 是 Banach 极限. 证毕.

设 Ω 是非空集，记 Ω 上有界函数全体为 $B(\Omega)$，两函数的加法及函数的数乘按通常定义，这时 $B(\Omega)$ 是线性空间. 对于 $x\in B(\Omega)$，令 $\|x\|=\sup\{|x(t)|\,|\,t\in\Omega\}$，这时，$(B(\Omega),\ \|\cdot\|)$ 是个 Banach 空间.

又如 (Ω,τ) 是个紧 Hausdorff 空间，记 $(\Omega,\ \tau)$ 上的连续函数全体为 $C(\Omega,\tau)$（或简记为 $C(\Omega)$），同样规定 $C(\Omega)$ 中的加法及数乘，并也用 $\sup\{|x(t)|\,|\,t\in\Omega\}$ 作为 $x\in C(\Omega)$ 的范数，这时 $(C(\Omega),\ \|\cdot\|)$ 也是 Banach 空间.

在 $B(\Omega)$，$C(\Omega)$ 中，所考虑的可以是实值或复值的函数. Ω 上实值有界函数全体也记为 $B_r(\Omega)$，类似地，(Ω,τ) 上实值连续函数全体记为 $C_r(\Omega)$.

当 x,y 是 Ω 上实值函数时，如果 $x(t)\leq y(t)(t\in\Omega)$，就记为 $x\leqslant y$，易见 $\leqslant$ 是 $B_r(\Omega)$ 或 $C_r(\Omega)$ 中的半序.

定理 6　设 (Ω,τ) 是紧 Hausdorff 空间，$C_r(\Omega)$ 是 (Ω,τ) 上实值连续函数全体，如果 $(C_r(\Omega),\|\cdot\|)$ 中的任何(非空)有界集 A，都在 $(C_r(\Omega),\leqslant)$ 中有上确界，则 (Ω,τ) 的任何开集 O，$\overline{O}^{(\tau)}$ 是 τ 开集.

证　设 O 是 (Ω,τ) 中开集，要证 $\overline{O}^{(\tau)}$ 是开集，不妨设 $O\neq\varnothing$ 且 $\overline{O}^{(\tau)}\neq\Omega$(否则已不必证). 记 $A=\{x\,|\,x\in C_r(\Omega),\ x(t)=0$ (当 $t\overline{\in}O$ 时)，且 $0\leqslant x(t)\leqslant 1(t\in\Omega)\}$. 由假设，$A$ 有上确界 y. 由于在 Ω 上恒等于 1 的函数是 A 的上界，所以 $y\leqslant 1$，又因恒等于 0 的函数属于 A，所以 $0\leqslant y$，即 $0\leqslant y(t)\leqslant 1(t\in\Omega)$.

对于 $t_0\in O$，由 3.1.3 定理 3(Урысон 引理)，有 (Ω,τ) 上实值连续函数 x_0 使得 $x_0(t_0)=1$，$x_0(t)=0(t\in O^c)$，且 $0\leqslant x_0(t)\leqslant 1$ $(t\in\Omega)$. 所以 $x_0\in A$，由 $x_0\leqslant y$，即知 $y(t_0)=1$，由此，y 在 O 上取值为 1. 又如 $t_1\overline{\in}\overline{O}^{(\tau)}$，由 Урысон 引理，有 $y_0\in C_r(\Omega)$，使 y_0 在 $\overline{O}^{(\tau)}$ 上取值为 1，$y_0(t_1)=0$，且 $0\leqslant y_0(t)\leqslant 1$. 易见 y_0 是 A 的上界，所以 $y\leqslant y_0$，故 $y(t_1)=0$，由此 y 在 $(\overline{O}^{(\tau)})^c$ 上为 0.

由于 $y\in C_r(\Omega)$，因 y 在 O 上取值为 1，$y^{-1}(\{1\})$ 是 τ 闭集，可见 y 在 $\overline{O}^{(\tau)}$ 上取值为 1，又 y 在 $\overline{O}^{(\tau)}$ 的余集上取值为 0，故 y 就是 $\overline{O}^{(\tau)}$ 的特征函数，由于 $\left\{t\in\Omega\,|\,y(t)>\frac{1}{2}\right\}$ 是 τ 开集，即 $\overline{O}^{(\tau)}$ 是开集. 证毕.

通常，如果一个拓扑空间的任何开集的闭包总是开集，就称这个拓扑空间是极度不连通的(extremely disconnected). 具有这种性质的紧 Hausdorff 空间很难想象. 有限集(在离散拓扑下)是一个例子.

在赋范线性空间的讨论中，要弄清楚的一个问题是线性连续

泛函的一般形式. 例如, $(c_0)^*=l^1$, $(l^1)^*=l^\infty$ 等. 这里的等式其实是指 $(c_0)^*$ 与 l^1 是线性保范同构的. 但并非每个 Banach 空间都能与某个 Banach 空间的共轭空间线性保范同构. 例如 c_0 就没有这种可能. 因为 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的共轭空间 X^* 的单位闭球是弱 * 紧的, 由 Крейн-Мильман 定理, X^* 的单位闭球必有端点, 但 c_0 的单位闭球是没有端点的. 由此也可知道, c_0 不会是自反的, 并因而 $(c_0)^*$ 及 l^1 也不自反, l^∞ 也不自反等等.

定理 7 (开映射定理) 设 $(X_1,\|\cdot\|_1)$, $(X_2,\|\cdot\|_2)$ 是两个 Banach 空间, $T\in B(X_1\to X_2)$, 如果 T 是满射, 则 T 是开映射.

证 记 $(X_1,\|\cdot\|_1)$ 中的单位闭球为 A, 因为 T 是满射, 所以 $X_2=\bigcup_{n=1}^{\infty}T(nA)=\bigcup_{n=1}^{\infty}nT(A)$. 由于 X_2 是 Banach 空间, 是第二纲的, 从而有 n_0 使得 $\overline{n_0T(A)}^{(\|\cdot\|_2)}$ 包含非空开集, 设为 $O(y_0;\varepsilon_0)$, 于是 $\overline{2n_0T(A)}^{(\|\cdot\|_2)}\supset O(0;\varepsilon_0)=\{z\in X_2\mid \|z\|<\varepsilon_0\}$. 又由 T 的线性, 对于任何 $a>0$, $\overline{\left(\frac{2n_0}{a}T(A)\right)}^{(\|\cdot\|)_2}\supset O\left(0;\frac{\varepsilon_0}{a}\right)$. 下面证明 $4n_0T(A)\supset O(0;\varepsilon_0)$.

设 $z_0\in O(0;\varepsilon_0)$, 于是有 $x_1\in X_1$, 使 $\|x_1\|_1\leqslant 2n_0$, $\|z_0-Tx_1\|<\frac{\varepsilon_0}{2}$, 同样有 $x_2\in X_1$, $\|x_2\|_1\leqslant n_0$ 使 $\|(z_0-Tx_1)-Tx_2\|_2<\frac{\varepsilon_0}{4}$, 依次可得 X_1 中点列 $\{x_n\}$, 使得 $\|x_n\|_1\leqslant\frac{1}{2^n}\cdot 4n_0$ 且 $\|z_0-Tx_1-Tx_2-\cdots-Tx_n\|_2<\frac{1}{2^n}\varepsilon_0$, 于是 $\left\{\sum_{k=1}^{n}x_k\right\}$ 是 $(X_1,\|\cdot\|_1)$ 中 Cauchy 点列, 记 $x_0=\lim_n\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$ 由于 $\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|\leqslant 4n_0(n=1,2,\cdots)$, 所以 $\|x_0\|\leqslant 4n_0$, 而 $Tx_0=\lim_n\left(\sum_{k=1}^{n}Tx_k\right)=z_0$, 因此, $4n_0(T(A))\supset O(0;\varepsilon_0)$. 由 T 是线性

算子，即知T把开集映射成开集．证毕．

系 1（逆算子定理）　设$(X_1, \|\cdot\|_1)$，$(X_2, \|\cdot\|_2)$是 Banach 空间，$T\in B(X_1\to X_2)$且T是双射，则T^{-1}也是连续的．

系 2（双范数定理）　设$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$是线性空间X的两个范数，如果$(X, \|\cdot\|_1)$，$(X, \|\cdot\|_2)$都是 Banach 空间且数C使得$\|x\|_1\leqslant C\|x\|_2 (x\in X)$，则有数$C_1$使$\|x\|_2\leqslant C_1\|x\|_1$．

赋范线性空间及 Banach 空间的重要特例是内积空间及 Hilbert 空间．线性空间H上如果二元映射：$H\times H\to \mathbb{K}$具有下列性质（对于H中两个元x, y，这映射的取值记作为(x, y)）：(i) $(x, y)=\overline{(y, x)} (x, y\in H)$；(ii) 对于第一个变元是线性的；(iii) $(x, x)\geqslant 0 (x\in H)$；(iv) $(x, x)=0$只有当$x=0$时成立．则$(\cdot, \cdot)$称为H上的**内积**．

内积是H上的二元泛函，它关于第一个变元是线性而关于第二个变元是共轭线性的，这样的泛函称为一个半线性的(Sesquilinear)．具有上面性质(i)，(ii)，(iii)的泛函成立

$$|(x, y)|^2\leqslant (x, x)(y, y) \quad (x, y\in H),$$

这不等式称为Schwarz 不等式．当H给有内积$(\cdot, \cdot)$时，称H（或$(H, (\cdot, \cdot))$）是**内积空间**．在内积空间H中，对$x\in H$，令

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

则$\|\cdot\|$是H的范数．当$(H, \|\cdot\|)$完备时，就称H是 **Hilbert 空间**．

如果H是 Hilbert 空间，则H^*中元即H上线性连续泛函，它的形式特别简单．对于$f\in H^*$，必有$y\in H$使得$f(x)=(x, y) (x\in H)$．这样，H^*与H可以建立双射．以$f(x)=(x, y) (x\in H)$所作的$H^*\to H: f\longmapsto y$是保范的，即$\|f\|=\|y\|$，但不是线性的，加法是保持的，但数乘不能保持．一般说来，如果$f\in H^*$对应于元$y\in H$，则λf对应于元$\bar{\lambda}y$．当H是实空间时，这是个线性保范映射，但对于复空间，则是个共轭线性的映射．

对于 Hilbert 空间 H，记 $\bar{H}=H$（是同一个集），在 $\bar{H}$ 中规定加法与 H 中相同，但对于 $\lambda\in\mathbb{K}$，$x\in H$，以 $\bar{\lambda}x$（H 中的数乘）作为 $\bar{H}$ 中的 λ 与 x 的乘法，并以 (y,x) 作为 $\bar{H}$ 中 x 与 y 的内积，这样的 $\bar{H}$ 也是个 Hilbert 空间，称为 H 的共轭 Hilbert 空间.

当 $(X_1,\|\cdot\|_1)$，$(X_2,\|\cdot\|_2)$ 是两个赋范线性空间，又 $T\in B(X_1\to X_2)$ 时，对于 $f\in X_2^*$，$f\circ T\in X_1^*$. 于是对于 $T\in B(X_1\to X_2)$，映射

$$X_2^*\to X_1^*: f\longmapsto f\circ T$$

记为 T^*，T^* 是 $X_2^*\to X_1^*$ 的线性连续算子.

对于赋范线性空间 X_1 及 X_2，由于 X_1 是囿空间，连续与有界是等价的. $\sup\{\|Tx\|\,|x\in X_1,\|x\|\leqslant 1\}$ 称为 $T(\in B(X_1\to X_2))$ 的范数，记为 $\|T\|$，$\|\cdot\|$ 是 $B(X_1\to X_2)$ 中的范数. 当 X_2 是 Banach 空间时，$(B(X_1\to X_2),\|\cdot\|)$ 也是 Banach 空间. 而映射 $T\longmapsto T^*$（这时 $(B(X_1\to X_2),\|\cdot\|)\to(B(X_2^*\to X_1^*),\|\cdot\|)$ 的映射）是个线性保范算子.

特别当 H 是 Hilbert 空间时，对于 $T\in B(H\to H)$，也可以作 T^* 是 $H^*\to H^*$ 的线性有界算子. 但由于 H^* 与 H 不完全相同，（数乘与内积有些差别），在这情况下，（复）Hilbert 空间 H 的 $B(H\to H)$ 中的 T，T^* 的规定与 Banach 空间的情况稍有不同：对于 $y\in H$，(Tx,y)（作为 x 的函数）是 H^* 中元. 从而有 $z\in H$ 使 $(Tx,y)=(x,z)\,(x\in H)$，就规定 T^*: $y\longmapsto z$ 作为 T 的共轭算子的定义，于是当 $T\in B(H\to H)$ 时，$T^*\in B(H\to H)$.

下面对于 $(X,\|\cdot\|)$ 的弱拓扑及共轭空间 X^* 的弱 * 拓扑进一步讨论.

引理 7 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，X^* 的单位闭球记为 B，则在 $\sigma(X^*,X)$ 下 B 是可度量化的充分必要条件是：$(X,\|\cdot\|)$ 是可分的.

证 充分性 如果 $(X,\|\cdot\|)$ 可分，则有一列 X 中元 $\{x_n\}$ 使

$\overline{\{x_n\}}^{\|\cdot\|}=X$. 记$\{\theta x_n|n=1,2,\cdots\}$为$\Psi$，这是$X^*$上的一列线性泛函，由于$\{x_n\}$在$(X,\|\cdot\|)$中稠密，故$\Psi$分离$X^*$的点，$\sigma(X^*,\Psi)$是Hausdorff拓扑. 由于$B$是$(X^*,\sigma(X^*,X))$中紧集，$\sigma(X^*,\Psi)$比$\sigma(X^*,X)$弱但是是Hausdorff的，因而$\sigma(X^*,\Psi)$与$\sigma(X^*,X)$在$B$上的诱导拓扑相同，而因为$(X^*,\sigma(X^*,\Psi))$是由一列拟范数决定的拓扑，因而满足第一可列公理，是可度量化的，所以在$\sigma(X^*,X)$下，B可度量化.

必要性 如果B在$\sigma(X^*,X)$下可度量化，则有一列0的邻域的交集为$\{0\}$，由诱导拓扑的定义，有$(X^*,\sigma(X^*,X))$中0的一列领域V_n，使$\bigcap_{n=1}^{\infty}(V_n\cap B)=\{0\}$. 不妨设$V_n$都是$(X^*,\sigma(X^*,X))$中的局部基中的邻域，即相应有$X$的有限子集$A_n$及$\varepsilon_n>0$使

$$V_n=\{f\,|\,|f(x)|<\varepsilon_n(x\in A_n)\}.$$

记$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$A$是$(X,\|\cdot\|)$中至多可列集，易见如果$f\in X^*$在$A$上为0，则必定$f=0$. 所以$A$在$(X,\|\cdot\|)$中的线性闭包即为$X$，故$A$中元以有理数为系数的线性组合全体在$(X,\|\cdot\|)$中稠密，所以$(X,\|\cdot\|)$是可分的. 证毕.

引理8 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间，$(X,\|\cdot\|)$的单位闭球记为A，则在$\|\cdot\|^w$下A是可度量化的充分必要条件是：$(X^*,\|\cdot\|)$是可分的.

证 充分性 如果$(X^*,\|\cdot\|)$可分，则X^{**}的单位闭球在$\sigma(X^{**},X^*)$下可度量化，从而$\theta(A)$在$\sigma(X^{**},X^*)$下可度量化. 由于θ是$A\to\theta(A)$（A及$\theta(A)$分别用$\sigma(X,X^*)$及$\sigma(X^{**},X^*)$的诱导拓扑）的同胚映射，所以A在$\sigma(X,X^*)(=\|\cdot\|^w)$下是可度量化的.

必要性 设$(X,\|\cdot\|)$的单位闭球A在$\|\cdot\|^w$下是可度量化的，

则有一列$(X, \|\cdot\|^w)$的0的邻域V_n使$V_n\cap A$是A在$\|\cdot\|^w$下的0点的基，不妨设$\{V_n\}$中每个都在$(X, \|\cdot\|^w)$的局部基中，即有X^*中有限集B_n及$\varepsilon_n>0$使$V_n=\{x \mid |f(x)|<\varepsilon_n \ (f\in B_n)\}$. 因为$\{V_n\cap A\}$是$A$在$\|\cdot\|^w$下0处的基，所以对于$(X, \|\cdot\|^w)$中0的领域$V$，有自然数$n_0$使$V\cap A\supset V_{n_0}\cap A$. 记$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$为$\mathscr{F}$. 由此，当$x\in X$使得$f(x)=0 (f\in\mathscr{F})$时，$x\in V_n (n=1, 2, \cdots)$，由于$\bigcap_{n=1}^{\infty}(V_n\cap A)=\{0\}$，所以$x=0$. 显然，只要证明$\mathscr{F}$在$(X^*, \|\cdot\|)$的线性闭包等于$X^*$即可.

用反证法. 如果$\mathscr{F}$在$(X^*, \|\cdot\|)$的线性闭包不等于X^*，由Hahn-Banach定理，有$\psi\in X^{**}$，ψ在$\mathscr{F}$上为0而$\psi\neq 0$，不妨设$\|\psi\|=1$. 从而有$g\in X^*$使$\|g\|<1$且$\psi(g)>\frac{1}{2}$. 对于$\mathscr{F}$在$(X^*, \|\cdot\|)$的线性闭包中的元f，因为$\psi(f)=0$，所以

$$\frac{1}{2}<\psi(g)=\psi(g)-\psi(f)\leqslant\|\psi\|\cdot\|g-f\|=\|g-f\|.$$

令$V=O\left(0; g; \frac{1}{4}\right)=\left\{x \mid x\in X, \ |g(x)|<\frac{1}{4}\right\}$，$V$是$(X, \|\cdot\|^w)$的0的邻域，故有$n_0$使$V\cap A\supset V_{n_0}\cap A$. 设$B_{n_0}=\{f_1, f_2, \cdots, f_l\}$.

记$\delta=\min\left(\varepsilon_{n_0}, \frac{1}{4}\right)$，对于$\psi$的$\sigma(X^{**}, X^*)$邻域

$$O(\psi; f_1, \cdots, f_l, g; \delta),$$

由于$\overline{\theta(A)}^{\sigma(X^{**}, X^*)}$等于$X^{**}$的单位闭球，故有$y_0\in A$使

$$\theta(y_0)\in O(\psi; f_1, \cdots, f_l; g; \delta),$$

由此$|f_k(y_0)-\psi(f_k)|<\delta\leqslant\varepsilon_{n_0} (k=1, 2, \cdots, l)$，因为$\psi(f_k)=0$，故$|f_k(y_0)|<\varepsilon_{n_0}$，所以$y_0\in V_{n_0}$. 又$|g(y_0)-\psi(g)|<\delta\leqslant\frac{1}{4}$，由于

$\psi(g)>\frac{1}{2}$，所以 $|g(y_0)|>\frac{1}{4}$. 这与 $|g(y_0)|<\delta<\frac{1}{4}$ 矛盾.

这样 $\mathscr{F}$ 张成的闭子空间等于 X^*. 由 $\mathscr{F}$ 是可列集，故 $(X^*, \|\cdot\|)$ 是可分的. 证毕.

对于 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的共轭空间 X^*，再引进一个拓扑. X^* 中的单位闭球仍记为 B.

定义 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，使得对任何 $a>0$，在 aB 上的诱导拓扑都等于 $\sigma(X^*, X)$ 的 X^* 的最强拓扑 τ 称为 X^* 的**有界弱 * 拓扑.**

在这定义中，在 aB 上的诱导拓扑等于 $\sigma(X^*, X)$ 是指等于 $\sigma(X^*,X)$ 在 aB 上的诱导拓扑。如果 τ 是 X^* 的拓扑，且 $\tau|_{aB}$ 等于 $\sigma(X^*,X)|_{aB}(a>0)$，因此 τ 开集 V 使得 $V\cap aB$ 是 aB 在 $\sigma(X^*, X)$ 的诱导拓扑下的开集. 同样，τ 闭集 F 使得 $F\cap aB$ 是 aB 在 $\sigma(X^*, X)$ 的诱导拓扑下的闭集. 由于 aB 是 $\sigma(X^*, X)$ 闭集，所以诱导拓扑的闭集即是 $\sigma(X^*,X)$ 闭集. 因此，τ 闭集 F 使得 $F\cap aB$ 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭集. 而

$$\{F|F\subset X^*, F\cap aB \text{ 是}(X^*,\sigma(X^*,X))\text{闭集}(a>0)\}$$

这个 X^* 的集类满足闭集全体所需要的性质(3.1.1 定理 1)，以这集类为闭集全体的 X^* 的拓扑 τ 就是 X^* 的有界弱 * 拓扑. 由此，X^* 的有界弱 * 拓扑 τ 有确定的意义. 对于 X^* 的子集 W，$W\in\tau$ 的充分必要条件是对任何 $a>0$，$W^c\cap aB$ 是 $\sigma(X^*, X)$ 闭集.

定理 8 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，τ 是 X^* 的有界弱 * 拓扑，取 $(X,\|\cdot\|)$ 中收敛于 0 的点列 $\{x_n\}$，记

$$\{f|f\in X^*, |f(x_n)|<1 \quad (n=1,2,\cdots)\}$$

为 $W(\{x_n\})$，则当取各种收敛于 0 的点列 $\{x_n\}$ 时，$W(\{x_n\})$ 是 τ 在 0 点的基.

证 对于 $(X,\|\cdot\|)$ 中收敛于 0 的点列 $\{x_n\}$，先证 $W(\{x_n\})$ 是

0 的 τ 邻域. 对 $a>0$, 记 $A_1=\left\{x_n \mid \|x_n\|\geq\frac{1}{a}\right\}$, A_1 是 X 中有限集,

$$W(\{x_n\})\cap aB=\{f \mid |f(y)|<1(y\in A_1)\}\cap aB,$$

故 $W(\{x_n\})\cap aB$ 是 $\sigma(X^*, X)$ 的诱导拓扑下 aB 的开集, 因而 $W(\{x_n\})$ 是 τ 开集, 即是 0 的 τ 邻域.

设 W 是 0 的 τ 邻域, 现要证明有 X 中收敛于 0 的点列 $\{x_n\}$, 使得 $W\supset W(\{x_n\})$. 先引入一个记号: 对于 X 的子集 A, 记 $A^\circ=\{f \mid f\in X^*, |f(x)|\leqslant 1(x\in A)\}$ (易见 A° 是 $(X^*, \sigma(X^*, X))$ 中闭集, 且 A 越大, A° 就越小). 对于 X 的有限子集 A, A° 包含了 $(X^*, \sigma(X^*, X))$ 的 0 的邻域, 而 $(X^*, \sigma(X^*, X))$ 的任一 0 的邻域 V 中如 $V\supset O(0; y_1, y_2, \cdots, y_l; \varepsilon)$ 记 $A=\left\{\frac{2y_1}{\varepsilon}, \cdots, \frac{2y_n}{\varepsilon}\right\}$ 时, $V\supset A^\circ$.

由于 W 是 0 的 τ 邻域, 对任何自然数 n, $W\cap nB$ 等于 $(X^*, \sigma(X^*, X))$ 中 0 的邻域 V 与 nB 的交. 从而有有限集 A 使得 $W\supset A^\circ\cap nB$, 集 A 的取法是与 n 有关的. 先取 A_1 为 X 的有限子集且 $W\supset A^\circ\cap B$, 当取了 X 的有限子集 A_n 使 $W\supset A_n^\circ\cap nB$ 后, 可以取 X 的有限子集 $\tilde{A}_n$ 使得 (i) $\tilde{A}_n$ 中元 x 使 $\|x\|\leqslant\frac{1}{n}$; (ii) 记 $A_{n+1}=A_n\cup\tilde{A}_n$ 时, $W\supset A_{n+1}^\circ\cap(n+1)B$.

用反证法. 设 $W\supset A_n^\circ\cap(nB)$, 但不存在 $\frac{1}{n}\tilde{A}$ ($\tilde{A}$ 表示 $(X, \|\cdot\|)$ 的单位闭球) 的有限子集 $\tilde{A}_n$ 使 $W\supset(A_n\cup\tilde{A}_n)^\circ\cap(n+1)B$. 于是

$$(A_n\cup A)^\circ\cap(n+1)B\cap W^c \quad \left(A\text{ 是}\frac{1}{n}\tilde{A}\text{ 的有限子集}\right)$$

是 $(X^*, \sigma(X^*, X))$ 中闭集, 非空. 因而当 A 取 $\frac{1}{n}\tilde{A}$ 的各个有限子集时, 这成为联族, 由 Alaoglu 定理, $(n+1)B$ 是 $(X^*, \sigma(X^*, X))$ 中紧集. 由上面的集是 $(n+1)B$ 的闭子集所成的联族. 故这种形式的集全体的交集非空. 设 $g\in(A_n\cup A)^\circ\cap(n+1)B\cap W^c$ (对任何

$\frac{1}{n}\tilde{A}$ 的有限子集 A). 于是 $g\in A_n$, $g\in W$, 且对任何 $y\in\frac{1}{n}\tilde{A}$, $|g(y)|\leq 1$ 所以 $\|g\|\leq n$, 即 $g\in nB$, 这与 $A_n^{\circ}\cap nB\subset W$ 相矛盾.

由此, 可依次得 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 使得 $W\supset A_n^{\circ}\cap nB(n=1,2,\cdots)$, A_{n+1} 是 A_n 与某些 $\frac{1}{n}\tilde{A}$ 中元的和集, 而每个 A_n 是有限集, 不妨认为 A_{n+1} 确比 A_n 大, 把 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的元依次排成一列, 设为 $\{x_m\}$, 易见 $\|x_m\|\to 0$, 而 $W(\{x_m\})\subset A_n^{\circ}(n=1,2,\cdots)$, 由 $W\supset A_n^{\circ}\cap nB(n=1,2,3,\cdots)$ 即知 $W(\{x_m\})\subset W$. 由此, 形为 $W(\{x_m\})$ 的集是 τ 在 0 点的基. 证毕.

系　设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, τ 是 X^* 的有界弱 * 拓扑, 则 (X^*,τ) 是局部凸空间.

证　对于 X^* 中元 f_0, 作映射 $\varphi: X^*\to X^*: f\mapsto f+f_0$, 记 $\psi=\varphi^{-1}$. 于是当 F 是 (X^*,τ) 中闭集时, $\varphi(F)\cap aB=\varphi(F\cap\psi(aB))$.

因为取 $a_1=a+\|f_0\|$ 时, $F\cap\psi(aB)=F\cap\psi(aB)\cap a_1B=F\cap a_1B\cap\psi(aB)$, 故由 $F\cap a_1B$ 是 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 闭集, $\psi(aB)$ 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭集, 因而 $\varphi(F)\cap aB$ 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭集 $(a>0)$. 由此 $\varphi(F)$ 是 τ 闭集. 所以 φ 及 ψ 都是 $(X^*,\tau)\to(x^*,\tau)$ 的同胚.

对于 $(X,\|\cdot\|)$ 中收敛于 0 的点列 $\{x_n\}$, 记 $p_{\{x_n\}}: X^*\to\mathbb{K}$; $f\longmapsto\sup\{|f(x_n)|\}$, 则 τ 就是由 $\{p_{\{x_n\}}\}$ 所决定的拓扑. 证毕.

定理 9　设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, τ 是 X^* 的有界弱 * 拓扑, 则 $(X^*,\tau)^*=(X^*,\sigma(X^*,X))^*(=\theta(X))$.

证　由于 τ 比 $\sigma(X^*,X)$ 强, 故 $(X^*,\tau)^*\supset(X^*,\sigma(X^*,X))^*$. 反过来, 如果 $h\in(X^*,\tau)^*$, 这时有 $(X,\|\cdot\|)$ 中收敛于 0 的点列 $\{y_n\}$ 使得

$$|h(f)|\leq p_{\{y_n\}}(f)=\sup_n(|f(y_n)|)\,(f\in X^*),\tag{1}$$

这里, 由 3.3.3 定理 5 的系, 应是相应地有有限个收敛于 0 的

$(X,\|\cdot\|)$中点列及数c使不等式成立，但可以并成为一个收敛于0的点列$\{y_n\}$而使(1)式成立.

令$T:(X^*,\|\cdot\|)\to c_0: f\to(f(y_1),f(y_2),\cdots,f(y_n),\cdots)$. 易见$T$是个线性连续算子. 对于$T(X^*)$中元$(f(y_1),f(y_2),\cdots)(f\in X^*)$，记$h_1((f(y_1),f(y_2),\cdots))=h(f)$，虽然$T$不一定是单射，但当$f_1,f_2\in X^*$且$Tf_1=Tf_2$时，由(1)式$h(f_1)=h(f_2)$，故$h_1$的意义确定. h_1是在c_0的线性子空间$T(X^*)$上定义的线性泛函，且

$$|h_1(z)|\leq\|z\|\quad(z\in T(X^*))$$

其中$\|z\|$是c_0中的范数. 由 Hahn-Banach 定理，h_1可延拓成为c_0上的线性有界泛函，而由c_0上线性有界泛函的一般形式，有l^1中的$(b_1,b_2,b_3,\cdots)$，使得对任何$f\in X^*$，

$$h(f)=h_1((f(y_1),f(y_2),\cdots))=\sum_{k=1}^{\infty}b_kf(y_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_kf(y_k).$$

由于$\|y_k\|\to 0$，$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|<+\infty$，因而$\left\{\sum_{k=1}^{n}b_ky_k\right\}$是$(X,\|\cdot\|)$中基本点列，故有$X_0\in X$使$\sum_{k=1}^{n}b_ky_k\to x_0(\|\cdot\|)$，从而

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{k=1}^{n}b_ky_k\right)=f(X_0)\quad(f\in X^*),$$

即$h=\theta(X_0)$，故$h\in(X^*,\sigma(X^*,X))^*$. 证毕.

注 有界弱*拓扑也可对赋范线性空间定义. 为简单起见而设$(X,\|\cdot\|)$是 Banach 空间来讨论. 在定理 9 的证明中用到了c_0的线性连续泛函的一般形式，即相当于l^1中的元. 实际上，对于$(X,\|\cdot\|)$中收敛于0的点列$\{x_n\}$，把$\{x_n\}$所成的集记为A，而对于$(X,\|\cdot\|)$的子集A，记q_A为如下的X^*上拟范数:

$$q_A(f)=\sup\{|f(X)|\mid X\in A\}\quad(f\in X^*).$$

X^*的有界弱 * 拓扑就是由$\{q_A|A$是$(X,\|\cdot\|)$中收敛于0的点列所成的集$\}$所决定的拓扑. 记A在$(X,\|\cdot\|)$中的凸闭包为B, 易见$q_A\leqslant q_B$, 又由$(X,\|\cdot\|)$中收敛于0的点列$\{X_n\}$所成的集显然是$(X,\|\cdot\|)$中紧集. 下面的引理9说明$\overline{\mathrm{co}}A$是$(X,\|\cdot\|)$中紧集, 因而$\overline{\mathrm{co}}A$是$(X,\|\cdot\|^F)$中凸紧集, 可见X^*的有界弱 * 拓扑比$\sigma(X^*,X)$的 Mackey 拓扑弱, 也可得到定理9.

引理9　Banach 空间$(X,\|\cdot\|)$中紧集的凸闭包是紧集.

证　设A是Banach空间$(X,\|\cdot\|)$中紧集, $B=\overline{\mathrm{co}}A$. 由于$B$是完备集, 由3.2.6定理, 只要证$B$是完全有界集. 又不妨设$\|x\|\leqslant 1(x\in A)$.

对于$\varepsilon\in(0,1)$, 由A是紧集, 所以A是完全有界集, 从而有A中有限个元$x_1,\cdots,x_n$使$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}O(x_k;\varepsilon)$. 记 span $\{x_1,\cdots,x_n\}$为X_0, 由于$\mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}$是有限维赋范线性空间$(X_0,\|\cdot\|)$中的有界集, 因而是完全有界集, 所以又有$X_0$中有限个元$y_1,\cdots,y_l$使得$\mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}\subset\bigcup_{j=1}^{l}O(y_j;\varepsilon)$. 由3.3.2引理2, 有

$$\mathrm{co}A\subset\mathrm{co}\left(\bigcup_{k=1}^{n}O(x_k;\ \varepsilon)\right)=\left\{\sum_{k=1}^{n}a_kz_k\,\middle|\,a_k\geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n}a_k=1,\ z_k\in O(x_k;\varepsilon)\right\}$$

但对于$z_k\in O(x_k;\varepsilon)$, $a_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{k=1}^{n}a_k=1$, 因为

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}a_kz_k-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\varepsilon=\varepsilon,$$

由此对于$\mathrm{co}A$中元z, 有$\mathrm{co}(\{x_1,\cdots,x_n\})$中元$x$使$\|z-x\|<\varepsilon$, 从而有某个$j(1\leqslant j\leqslant l)$使$\|z-y_j\|\leqslant\|z-x\|+\|x-y_j\|<2\varepsilon$, 故

$$\mathrm{co}A\subset\bigcup_{j=1}^{l}O(y_j;2\varepsilon).$$

易见 $\mathrm{co}A\subset\bigcup_{j=1}^{l}O(y_j;3\varepsilon)$. 于是,对 $\varepsilon\in(0,1)$,有有限个元 y_1, $\cdots$, y_l 使 $B\subset\bigcup_{j=1}^{l}O(y_j,3\varepsilon)$, 这就说明 B 是完全有界集. 由 3.2.6 定理 2, B 是 $(X,\|\cdot\|)$ 中紧集. 证毕.

系 赋范线性空间中完全有界集的凸闭包是完全有界集. Banach 空间中完全有界集的凸闭包是紧集.

定理 10(Крейн-Шмульян) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, X^* 中凸集 B_1 是 $\sigma(X^*, X)$ 闭集的充分必要条件是: 对任何 $a>0$, $B_1\cap aB$ 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭集(其中 B 是 $(X^*,\|\cdot\|)$ 中单位闭球).

证 记 X^* 的有界弱 * 拓扑为 τ, 则 $\tau^W=\sigma(X^* X)$. 当 B_1 是 X^* 中凸集时, B_1 是 τ 闭集与 B_1 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭集等价. 而 B_1 是 τ 闭集即等价于对任何 $a>0$, $B_1\cap aB$ 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭集. 证毕.

系 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, L 是 X^* 中的闭子空间, 则 L 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭集的充分必要条件是: $L\cap B$ 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭集.

证 必要性显然. 又对于 $a>0$, $L\cap aB=aL\cap aB=a(L\cap B)$ 如果 $L\cap B$ 是 $\sigma(X^*,X)$ 闭的, $L\cap aB$ 也是 $\sigma(X^*,X)$ 闭的, 故 L 也是闭集. 证毕.

3.4.5 B(H→H)的各种拓扑

在线性空间 L 上给定一族拟范数就决定了 L 的一个局部凸拓扑. 下面设 H 是个 Hilbert 空间, $B(H\to H)$ 表示 $H\to H$ 的线性连续算子全体. $\|\cdot\|$ 是算子范数, T^* 表示 T 的共轭算子, 以下是 $B(H\to H)$ 的几种比较常用的拓扑.

(1) 范数拓扑 即用算子的范数决定的拓扑. $\|\cdot\|$ 是 $B(H\to H)$ 的范数, $(B(H\to H)\|\cdot\|)$ 是个 Banach 空间. 范数拓扑也记为 $\|\cdot\|$.

(2) 弱算子拓扑　对于 H 中任间两个元 x, y, 作映射 $T\mapsto(Tx,y)$ $(T\in B(H\to H))$. 由这种形式的线性泛函全体所导出的 $B(H\to H)$ 的拓扑称为 $B(H\to H)$ 的**弱算子拓扑**, 记为 WOT.

(3) 强算子拓扑　对于 H 中的元 x, 映射 $T\longmapsto\|Tx\|$ $(T\in B(H\to H))$ 是拟范数, 由这种形式的拟范数全体所决定的拓扑称为 $B(H\to H)$ 的**强算子拓扑**, 记作为 SOT.

(4) σ-弱算子拓扑　对于 H 中两列元 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 要求满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|^2+\|y_n\|^2)<+\infty$, 作 $B(H\to H)$ 上的线性泛函 $T\longmapsto\sum\limits_{n=1}^{\infty}(Tx_n,y_n)$, 由这种形式的线性泛函全体导出的拓扑称为 **$\sigma$-弱算子拓扑**, 记为 σ-WOT.

(5) σ-强算子拓扑　对于 H 中满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<+\infty$ 的点列 $\{x_n\}$, $T\longmapsto\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\|^2}$ 是 $B(H\to H)$ 上的拟范数, 由这种拟范数全体所决定的拓扑称为 **σ-强算子拓扑**, 记为 σ-SOT.

(6) 强 * 算子拓扑　对 H 中元 x, $T\mapsto\sqrt{\|Tx\|^2+\|T^*x\|^2}$ 是拟范数, 由这种拟范数全体所决定的拓扑称为**强 * 算子拓扑**, 记为 S^*OT.

(7) σ-强 * 算子拓扑　对于 H 中使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<+\infty$ 的点列 $\{x_n\}$, 作映射 $T\longmapsto\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\|Tx_n\|^2+\|T^*x_n\|^2)}$, 由这种拟范数全体所决定的拓扑称为 **$\sigma$-强 * 算子拓扑**, 记为 σ-S^*OT.

这些拓扑都使 $B(H\to H)$ 成为局部凸 Hausdorff 空间. 当 H 是有限维空间时, 这些拓扑都是相同的, 所以主要是在 H 是无限维的情况下来进行讨论.

引理 1 $S^*OT\supset SOT\supset WOT$, $\sigma\text{-}S^*OT\supset\sigma\text{-}SOT\supset\sigma\text{-}WOT$ $\sigma\text{-}S^*OT\supset S^*OT$, $\sigma\text{-}SOT\supset SOT$, $\sigma\text{-}WOT\supset WOT$, $\|\cdot\|\supset\sigma\text{-}S^*OT$.

证 由 3.3.3 定理 5 系 1，只要比较决定有关拓扑的拟范数族即可. 由 $|(Tx,y)|\leqslant\|Tx\|\cdot\|y\|$ $(T\in B(H\to H),x,y\in H)$ 以及 $\|Tx\|\leqslant\sqrt{\|Tx\|^2+\|T^*x\|^2}$, 即知 $S^*OT\supset SOT\supset WOT$ 类似地，对于 H 中使 $\sum_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|^2+\|y_n\|^2)<+\infty$ 的两个点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 由

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(Tx_n,\ y_n)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\|\cdot\|y_n\|$$
$$\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^2}$$

即知 $\sigma\text{-}SOT\supset\sigma\text{-}WOT$, 而 $\sigma\text{-}S^*OT\supset\sigma\text{-}SOT$ 是显然的.

接下来的三个强弱关系是明显的. 最后，由

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(\|Tx_n\|^2+\|T^*x_n\|^2)}\leqslant2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2}\cdot\|T\|$$

即知 $\|\cdot\|\supset\sigma\text{-}S^*OT$. 证毕.

引理 2 设 $\{T_\alpha\}$ 是 $B(H\to H)$ 中的网，则在各种拓扑下的 $T_\alpha\to0$ 的等价条件分别为:

(i) (WOT): 对任何 $x\in H$ 成立 $(T_\alpha x,x)\to0$.

(ii) (SOT): 对任何 $x\in H$, $\|T_\alpha x\|\to0$.

(iii) $(\sigma\text{-}WOT)$: 对 H 中使 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<+\infty$ 的点列 $\{x_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(Tx_n,x_n)\to0$.

(iv) $(\sigma\text{-}SOT)$: 对 H 中使 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<+\infty$ 的点列 $\{x_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\|^2\to0$.

(v) (σ-S^*OT)：对 H 中使 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<+\infty$ 的点列 $\{x_n\}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(\|Tx_n\|^2+\|T^*x_n\|^2)\to 0$.

(vi) (S^*OT)：对任何 $x\in H$ 成立 $\|Tx\|^2+\|T^*x\|^2\to 0$.

证　由 3.3.3 定理 9 即得．在(i)，(iii)中没有用两个元及两列元是由于上述形式的线性泛函全体所导出的拓扑就是 WOT 及 σ-WOT，见 3.3.3 定理 5 的系．证毕．

系　对于 $B(H\to H)$ 中的网 $\{T_\alpha\}$，$T_\alpha\to 0(S^*OT)$ 的充分必要条件是 $T_\alpha\to 0(SOT)$ 且 $T_\alpha^*\to 0(SOT)$．同样，$T_\alpha\to 0(\sigma$-$S^*OT)$ 的充分必要条件是 $T_\alpha\to 0(\sigma$-$SOT)$ 且 $T_\alpha^*\to 0(\sigma$-$SOT)$．

定理 1　在 WOT 及 σ-WOT，S^*OT，σ-S^*OT 这几个拓扑下，映射 $T\longmapsto T^*$ 是连续的．当 H 是无限维时，在 SOT 及 σ-SOT 这两个拓扑下，映射 $T\longmapsto T^*$ 不连续．

证　当 $B(H\to H)$ 中网 $\{T_\alpha\}$ 及元 T 使 $T_\alpha\to T(WOT)$ 时，对任何 $x\in H$，$((T_\alpha-T)x,x)\to 0$，故 $((T_\alpha^*-T^*)x,x)\to 0$，从而 $T_\alpha^*-T^*\to 0(WOT)$，因此 $T_\alpha^*\to T^*(WOT)$，所以 $T\longmapsto T^*$ 在 WOT 下是连续的．同理可知在 σ-WOT 下也连续．由引理 2 的系即知在 S^*OT 及 σ-S^*OT 下映射 $T\longmapsto T^*$ 的连续性．

当 H 是无限维 Hilbert 空间时，取 H 的就范正交点列 $\{x_n\}$，作 $T\in B(H\to H)$ 如下：$Tx_n=x_{n-1}(n=2,3,\cdots)$ 而当 $x\perp\{x_n|n=2,3,\cdots\}$ 时，$Tx=0$．这样的 T 是确定的．直接验证可知 $T^n\to 0(SOT)$，但 $(T^n)^*\not\to 0(SOT)$，这样的 $\{T^n\}$ 也使 $T^n\to 0(\sigma$-$SOT)$，但 $(T^n)^*\not\to 0(\sigma$-$SOT)$ 因而 $T\longmapsto T^*$ 这映射在 (SOT) 及 $(\sigma$-$SOT)$ 下并不连续．证毕．

系　当 H 是无限维 Hilbert 空间时，$WOT\neq SOT\neq S^*OT$，σ-$WOT\neq\sigma$-$SOT\neq\sigma$-S^*OT．

定理 2　在 $(B(H\to H),\|\cdot\|)$ 的有界集 A 上，WOT 与 σ-WOT，

SOT 与 σ-SOT, S^*OT 与 σ-S^*OT 的诱导拓扑是相同的.

证 由于证法类似，故仅证明 WOT 与 σ-WOT 在 A 上的诱导拓扑相同. 设 $\|T\| \leqslant c\ (T\in A)$, 如果 A 中网 $\{T_\alpha\}$ 及元 T 使 $T_\alpha \to T$ (WOT), 对于 H 中点列 $\{x_n\}$, $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<+\infty\right)$, 可取 N 使

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\|x_n\|^2<\frac{\varepsilon}{3C},$$

于是，由 $((T_\alpha-T)x_k, x_k)\to 0\ (k=1,2,\cdots,N)$, 有 α_0, 当 $\alpha_0\prec\alpha$ 时, $|((T_\alpha-T)x_k, x_k)|<\frac{\varepsilon}{3N}$, 于是 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}((T_\alpha-T)x_n, x_n)\right|\leqslant\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{\varepsilon}{3N}\right)+2c\cdot\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\|x_n\|^2<\varepsilon$, 从而 $T_\alpha-T\to 0\ (\sigma\text{-}WOT)$, 即 $T_\alpha\to T\ (\sigma\text{-}WOT)$. 由此可见 WOT 在 A 上的诱导拓扑比 σ-WOT 在 A 上的诱导拓扑强. 又由引理 1, 知 σ-WOT 比 WOT 强, 所以 σ-WOT 与 WOT 在 A 上诱导拓扑是相同的. 证毕.

定理 3 $(B(H\to H), \|\cdot\|)$ 的单位闭球 $\{T\mid\|T\|\leqslant 1\}$ 是 WOT 的紧集.

证 对于 H 中一对元 x, y, 令 $K_{x,y}=\{\lambda\mid\lambda\in\mathbb{K}, |\lambda|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|\}$, 把元素对 x, y 作为足标, 作 $K_{x,y}$ 的乘积集. 由 Тихонов 定理, 在乘积拓扑下, $\times K_{x,y}$ 是紧空间. $\times K_{x,y}$ 中的元 φ 是 $H\times H\to\mathbb{K}$ 的映射, 且满足 $|\varphi(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|\ (x,y\in H)$.

记 $(B(H\to H), \|\cdot\|)$ 的单位闭球为 A, 对于 $T\in A$, 令 $\hat{T}: H\times H\to\mathbb{K}: (x,y)\longmapsto(Tx,y)$, 这时, $T\longmapsto\hat{T}$ 是 $A\to\times K_{x,y}$ 的映射. 记 A 的象 $\{\hat{T}\mid T\in A\}$ 为 B, A 中用 WOT 的诱导拓扑, B 中用 $\times K_{x,y}$ 的乘积拓扑的诱导拓扑. 由拓扑的定义即知 $T\longmapsto\hat{T}$ 是 $A\to B$ 的同胚映射, 因而要证明 A 是 $(B(H\to H), WOT)$ 中紧集, 只要证明 B 是 $\times K_{x,y}$ 中紧集. 由于 $\times K_{x,y}$ 是紧空间, 所以又只要证明 B 是 $\times$

$K_{x,y}$ 中闭集即可.

设 B 中网 $\hat{T}_\alpha \to \varphi_0 \in \times K_{x,y}$ 即 $(T_\alpha x, y) \to \varphi_0(x,y)$ $(x, y \in H)$. 易见这时 φ_0 关于第一个变元 x 是线性的, 关于第二个变元 y 是共轭线性的, 且因 $|\varphi_0(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ $(x, y \in H)$, 所以有 $T_0 \in A$ 使 $\varphi_0(x,y) = (T_0 x, y)$　$(x, y \in H)$. 因而 $\varphi_0 = \hat{T}_0 \in B$, 即 B 是 $\times K_{xy}$ 中闭集. 由此 B 是 $\times K_{x,y}$ 中紧集, 而 A 是 WOT 紧的. 证毕.

系　$(B(H\to H), WOT)$ 的子集是紧集的充分必要条件是 $(B(H\to H), WOT)$ 的有界闭集.

证　必要性是显然的.

充分性　设 A_1 是 $(B(H\to H), WOT)$ 中有界闭集, 由于 $\{(T_x, y) \mid T \in A_1\}$ 是有界数集 $(x, y \in H)$. 固定 $x \in H$ 时, 由 $\{(T_x, y) \mid T \in A_1\}$ 对任何 $y \in H$ 是有界数集, 由一致有界定理, 即知 $\{\|T_x\| \mid T \in A_1\}$ 是有界集, 再由一致有界定理, $\{\|T\| \mid T \in A_1\}$ 是有界的, 故有 c 使 $A^1 \subset cA$ (A 是 $(B(H\to H), \|\cdot\|)$ 的单位闭球. 因为 cA 是 WOT 紧集, 由 A_1 是 WOT 闭的, 故 A_1 是 WOT 紧集. 证毕.

系　在 $B(H\to H)$ 的所列的各种拓扑下, 有界集是同样的.

定理 4　$(B(H\to H) WOT)^\# = (B(H\to H), SOT)^\# = (B(H\to H), S^*OT)^\#$, $(B(H\to H), \sigma\text{-}WOT)^\# = (B(H\to H), \sigma\text{-}SOT)^\# = (B(H\to H), \sigma\text{-}S^*OT)^\#$.

证　由于 WOT 是由一族线性泛函导出的拓扑, 所以 $(B(H\to H) WOT)^\#$ 也就是导出 WOT 的这种线性泛函所张成的线性子空间. 又由 $WOT \subset SOT$, 故 $(B(H\to H), WOT)^\# \subset (B(H\to H), SOT)^\#$. 现证相反的包含关系. 设 $g \in (B(H\to H), SOT)^\#$, 由 3.3.3 定理 5 系 2, 有 H 中有限个元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及数 c, 使得

$$|g(T)| \leqslant c\max(\|Tx_1\|, \cdots, \|Tx_n\|) \quad (T \in B(H\to H).$$

记 $x_1^{(0)} = cx_1, \cdots, x_2^{(0)} = cx_n$, 即知 $|g(T)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|Tx_n^{(0)}\|^2}$　$(T \in B$

$(H\to H))$. 作 n 个 H 的正交和空间 $\tilde{H}=H\oplus H\oplus\cdots\oplus H$, $\tilde{H}$ 中的元 $\tilde{y}$ 的形式为 $\tilde{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)(y_1,\cdots,y_n\in H)$. 在 $\tilde{H}$ 中, 规定内积为

$$(\tilde{y},\tilde{z})=\sum_{k=1}^{n}(y_n,z_n)\quad(\tilde{y}=(y_1,\cdots,y_n),\tilde{z}=(z_1,\cdots,z_n)),$$

$\tilde{H}$ 是个 Hilbert 空间. 记 $\tilde{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})(\in\tilde{H})$.

$\{(Tx_1^{(0)},Tx_2^{(0)},\cdots,Tx_n^{(0)})\mid T\in B(H\to H)\}$ 是 $\tilde{H}$ 的线性子空间, 记作为 $\tilde{H}^{(0)}$, 作 $\tilde{H}^{(0)}$ 上的线性泛函 $\tilde{g}$ 如下: $\tilde{g}:(Tx_1^{(0)},\cdots,Tx_n^{(0)})\longmapsto g(T)$, 当 T_1, $T_2\in B(H\to H)$ 使 $(T_1x_1^{(0)},\cdots,T_1x_n^{(0)})=(T_2x_1^{(0)},\cdots,T_2x_n^{(0)})$ 时, 由前面的不等式可知 $g(T_1-T_2)=0$, 因此 $\tilde{g}$ 的定义是确定的. 并且对任何 $\tilde{y}\in\tilde{H}^{(0)}$, $|\tilde{g}(\tilde{y})|\leqslant\|\tilde{y}\|$. 由 Hahn-Banach 定理, $\tilde{g}$ 可以延拓成 $\tilde{H}$ 上的线性有界泛函, 由 $\tilde{H}$ 是 Hilbert 空间, 故有 $\tilde{H}$ 中元 $\tilde{z}^{(0)}=(z_1^{(0)},\cdots,z_n^{(0)})$, 使得

$$\tilde{g}(\tilde{y})=(\tilde{y},\tilde{z}^{(0)})\quad(\tilde{y}\in\tilde{H}^{(0)}),$$

从而对任何 $T\in B(H\to H)$,

$$\begin{aligned}g(T)&=\tilde{g}(Tx_1^{(0)},\cdots,Tx_n^{(0)})=((Tx_1^{(0)}\cdots,Tx_n^{(0)}),(z_1^{(0)},\cdots,z_n^{(0)}))\\&=\sum_{k=1}^{n}(Tx_k^{(0)},z_k^{(0)}),\end{aligned}$$

所以 $g\in(B(H\to H),WOT)^*$. 由此 $(B(H\to H),\ WOT)^*=(B(H\to H),SOT)^*$.

对于其它情况, 下面指出证明过程中的不同之处. 由于 $WOT\subset S^*OT$, $(B(H\to H),WOT)^*\subset(B(H\to H),S^*OT)^*$. 如果 $h\in(B(H\to H),S^*OT)^*$, 这时有 H 中有限个元 $x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}$, 使得

$$|h(T)|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\|Tx_k^{(0)}\|^2+\|T^*x_k^{(0)}\|^2)}\quad(T\in B(H\to H)).$$

记 $\bar{H}$ 是 H 的共轭 Hilbert 空间, 并作 n 个 H 与 n 个 $\bar{H}$ 的正交和 $H\oplus H\oplus\cdots\oplus H\oplus\bar{H}\oplus\cdots\oplus\bar{H}$, 仍记为 $\tilde{H}$, $\tilde{H}$ 中元的形式为 $\tilde{y}=(y_1,$

$\cdots, y_n, \cdots, y_{2n})$，对于 $\tilde{H}$ 中两个元 $\tilde{y}, \tilde{z}$，内积是

$$(\tilde{y}, \tilde{z}) = (y_1, z_1) + \cdots + (y_n, z_n) + (z_{n+1}, y_{n+1}) + \cdots + (z_{2n}, y_{2n}).$$

同样记 $\{(Tx_1^{(0)}, \cdots, Tx_n^{(0)}, T^*x_1^{(0)}, \cdots, T^*x_n^{(0)}) \mid T \in B(H \to H)\}$ 为 $\tilde{H}^{(0)}$，因为 $\tilde{H}$ 中的数乘与 H 中数乘不同，$\tilde{H}^{(0)}$ 仍是 $\tilde{H}$ 的线性子空间. 又由 h 作 $\tilde{H}^{(0)}$ 上线性泛函

$\tilde{h}$: $(Tx_1^{(0)}, \cdots, Tx_n^{(0)}, T^*x_1^{(0)}, \cdots, T^*x_n^{(0)}) \longmapsto h(T)$，$\tilde{h}$ 的定义确定且 $|\tilde{h}(\tilde{y})| \leqslant \|\tilde{y}\|$ $(\tilde{y} \in \tilde{H}^{(0)})$，于是有 $\tilde{H}$ 中元 $\tilde{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, \cdots, z_{2n}^{(0)})$ 使得 $\tilde{h}(\tilde{y}) = (\tilde{y}, \tilde{z}^{(0)})$ $(\tilde{y} \in \tilde{H}^{(0)})$，即对任何 $T \in B(H \to H)$，

$$\begin{aligned} h(T) &= ((Tx_1^{(0)}, \cdots, Tx_n^{(0)}, T^*x_1^{(0)}, \cdots, T^*x_n^{(0)}), (z_1^{(0)}, \cdots, z_{2n}^{(0)})) \\ &= (Tx_1^{(0)}, z_1^{(0)}) + \cdots + (Tx_n^{(0)}, z_n^{(0)}) + (Tz_{n+1}^{(0)}, x_1^{(0)}) + \cdots + (T \\ &\quad z_{2n}^{(0)}, x_n^{(0)}), \end{aligned}$$

而得 $h \in (B(H \to H), WOT)^*$.

在证明 $(B(H \to H), \sigma\text{-}SOT)^* \subset (B(H \to H), \sigma\text{-}WOT)^*$ 时，要作的 $\tilde{H}$ 是一列 H 的正交和，而在证明 $(B(H \to H), \sigma\text{-}S^*OT)^* \subset (B(H \to H), \sigma\text{-}WOT)^*$ 时，就要作一列 H 及一列 $\tilde{H}$ 的正交和，其余都是相同的. 证毕.

注 这里用的是直接证明的方法. 实际上，为了证明 $(B(H \to H), SOT)^* \subset (B(H \to H), WOT)^*$，只要证明 SOT 比 WOT 的 Mackey 拓扑弱. 对于任何一个 H 中元 x，记 $p_x(T) = \|Tx\|$ $(T \in B(H \to H))$，由 $\{p_x\}$ 一个拟范数所决定的 $B(H \to H)$ 的拓扑比 WOT 的 Mackey 拓扑弱. (这时相当于 $n=1$ 的情况，不需要作正交和空间.) 而由此可知，由 $\{p_x | x \in H\}$ 所决定的拓扑即 SOT 仍然比 WOT 的 Mackey 拓扑弱. 这样，就可省去作正交和的步骤. 但在证明 S^*OT 的情况时，还是要作正交和的.

系 1 $WOT = (SOT)^W$，$WOT = (S^*OT)^W$. 同样，$\sigma\text{-}WOT = (\sigma\text{-}SOT)^W = (\sigma\text{-}S^*OT)^W$.

系 2 如果 B 是 $B(H \to H)$ 中的凸集，则 $\bar{B}^{(WOT)} = \bar{B}^{(SOT)} =$

$B^{(S^*OT)}$, $B^{(\sigma-WOT)}=B^{(\sigma-SOT)}=B^{(\sigma-S^*OT)}$.

系 3 当 H 是无限维时，$WOT\neq\sigma$-WOT，$SOT\neq\sigma$-SOT，$S^*OT\neq\sigma$-S^*OT.

证 取 H 中就范正交点列$\{x_n\}$，并记 $y_n=\frac{1}{n}x_n$，令 f 为

$$f(T)=\sum_{n=1}^{\infty}(Ty_n, y_n)\quad (T\in B(H\to H)),$$

易见 $f\in(B(H\to H),\sigma\text{-}WOT)^*$. 但对于 $(B(H\to H), WOT)^*$ 中的 g，g 是有限和的形式，设 $g(T)=\sum_{k=1}^{l}(Tz_k, u_k)$ $(z_1,\cdots,z_l,u_1,\cdots,u_l\in H)$. 但在 $y_1,\cdots,y_{l+1}$ 张成的 $l+1$ 维线性子空间中，必有非零元 y_0 与 $z_1,z_2,\cdots,z_l$ 都正交. 记$\{y_0\}$张成的一维空间上的投影算子为P，易知 $g(P)=0$ 但 $f(P)>0$，所以$f\neq g$，因此 $f\overline{\in}(B(H\to H), WOT)^*$.

由于在 σ-WOT 及 WOT 两个拓扑下，线性连续泛函不一样多，故 σ-WOT 与 WOT 不同，同样，σ-SOT 与 SOT 不同，σ-S^*OT 与S^*OT 不同. 证毕.

由系 3 及定理 1 的系，可知当 H 是无限维 Hilbert 空间时，$B(H\to H)$的拓扑 WOT, SOT, S^*OT, σ-WOT, σ-SOT, σ-S^*OT 是各不相同的. 而其中的几对拓扑如 SOT 与 σ-WOT，S^*OT 与 σ-SOT，S^*OT 与 σ-WOT，是不能比较强弱的，即这三对拓扑中，没有一个拓扑是比另一个拓扑强的. 实际上，范数拓扑$\|\cdot\|$是比σ-S^*OT 强而不相等的.

引理 3 对于 $T_0\in B(H\to H)$，映射 $T\longmapsto TT_0$ 及 $T\longmapsto T_0T$ 在所说的七个拓扑的任何一个下都是 $B(H\to H)\to B(H\to H)$ 的连续映射.

证 由于这两个映射是线性的，只要证明在 0 点处的连续性

即可．下面仅对 SOT 来证．设 $B(H\to H)$ 中的网$\{T_\alpha\}$ 使 $T_\alpha\to 0$ (SOT)，故对$x\in H$，$\|T_\alpha x\|\to 0$，从而$\|T_0T_\alpha x\|\leqslant\|T_0\|\cdot\|T_\alpha x\|\to 0$，即$T_0T_\alpha\to 0(SOT)$，而对 $x\in H$，因为 T_0x 是 H 中元，所以当 $T_\alpha\to 0(SOT)$时，$\|T_\alpha T_0x\|\to 0$，$(x\in H)$，即 $T_\alpha T_0\to 0(SOT)$．所以这两个映射是$(B(H\to H), SOT)\to(B(H\to H), SOT)$的连续映射．对于其它拓扑，证明也类似．证毕．

定理 5　当 H 是无限维 Hilbert 空间时，映射$(T, S)\to TS$ 在 SOT 下是不连续的(这里指作为二元映射是不连续的)．

证　直接证明在$(0,0)$处的不连续性．取 H 中元 x_0 使$\|x_0\|=1$，记 $O=O(0;x_0;1)=\{T\mid\|Tx_0\|<1\}$．$O$ 是 0 的 SOT邻域．对于 0 的任意两个 SOT 邻域U 及 V，不妨设

$U=O(0;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon)=\{T\mid\|Tx_k\|<\varepsilon, k=1,2,\cdots,n\}$ (其中 $x_1,\cdots,x_n\in H,\varepsilon>0$)，

而V包含了 0 的范数拓扑邻域$O(0;\delta)=\{S\mid\|S\|<\delta\}$ $(\delta>0)$．取 H 中与 $x_1,\cdots,x_n$ 都正交的非零元 y_0，记$\{y_0\}$张成的一维空间上投影算子为 P，易见 $P\in U$ 且对任何 $\lambda\in\mathbb{K}$，$\lambda P\in U$．并且取$S_0\in B(H\to H)$使$S_0x_0=y_0$，(这样的 S_0 显然是有的)．于是，$\dfrac{\delta}{2\|S_0\|}S_0\in V$，$\dfrac{2\|S_0\|}{\delta}\cdot\dfrac{1}{\|y_0\|}P\in U$但$\dfrac{1}{\|y_0\|}PS_0\bar{\in} O$，由此，映射$(T,S)\longmapsto TS$不连续．实际上，乘法映射作为 $(B(H\to H),\ SOT)\times(B(H\to H),\|\cdot\|)\to(B(H\to H), SOT)$的映射，在$(0,0)$处也是不连续的．证毕．

定理 6　设 B是$(B(H\to H),\|\cdot\|)$中有界集，则乘法映射：$B\times B(H\to H)\to B(H\to H)$：$(T,S)\longmapsto TS$ 是 SOT 连续的．

证　设$\|T\|\leqslant c\,(T\in B)$，又 $T_0\in B$，$S_0\in B(H\to H)$，对于 T_0S_0 的 SOT 邻域 $O=O(T_0S_0;x_1,x_2,\cdots,x_n;\varepsilon)$．由于

$$\|(TS-T_0S_0)x_k\|\leqslant\|(TS-TS_0)x_k\|+\|(T-T_0)S_0x_k\|,$$

取 $U=O\left(T_0; S_0x_1, S_0x_2, \cdots, S_0x_n; \dfrac{\varepsilon}{2}\right), V=O\left(S_0; x_1, x_2, \cdots, x_n; \dfrac{\varepsilon}{2c}\right)$ 时，当 $T\in B\cap U, S\in V$ 时，就有 $TS\in O$，因而乘法映射是 $B\times B(H\to H)\to B(H\to H)$ 的 SOT 连续映射. 证毕.

定义 设 $T\in B(H\to H)$，如果 $T^*=T$ 且 $(Tx,x)\geqslant 0\ (x\in H)$. 则称 T 是 $B(H\to H)$ 中的**正算子**. 如果 T_1, T_2 是 $B(H\to H)$ 中两个自共轭算子且 T_2-T_1 是正算子，则称 T_2 比 T_1 大，记为 $T_2\geqslant T_1$. 如果 $\{T_\alpha\}$ 是 $B(H\to H)$ 中由自共轭算子所成的网，且当 $\alpha\prec\beta$ 时，$T_\alpha\leqslant T_\beta$，就称 $\{T_\alpha\}$ 是**单调上升的网**. 类似地定义**单调下降的网**. 这两种网统称为**单调网**.

定理 7 $B(H\to H)$ 中的由自共轭算子所成的有界单调网必定是 SOT 收敛的.

证 设 $\{T_\alpha\}$ 是由 $B(H\to H)$ 中自共轭算子所成的有界单调网，不妨设是单调上升的网，这里有界是指 $\|T_\alpha\|$ 是有界的. 对 $x\in H$，$\{(T_\alpha x,x)\}$ 是有界的单调上升的实数网，故 $\{(T_\alpha x,x)\}$ 收敛，从而对 $x,y\in H$，$\{(T_\alpha x,y)\}$ 也收敛. 记 $\varphi(x,y)=\lim\limits_\alpha(T_\alpha x,y)$，易见 φ 关于 x 是线性的，关于 y 是共轭线性的，且有 c 使 $|\varphi(x,y)|\leqslant c\|x\|\|y\|$. 因而有 $T_0\in B(H\to H)$ 使 $\varphi(x,y)=(T_0x,y)\ (x,y\in H)$，从而 $T_\alpha\to T_0(WOT)$. 由 $T_\alpha^*\to T_0^*(WOT)$，$T_\alpha^*=T_\alpha$，故 $T_0^*=T_0$，且 $T_\alpha\leqslant T_0$.

现证 $T_\alpha\to T_0(SOT)$：当 T 是正算子时，(Tx,y) 满足内积除 $(Tx,x)=0$ 不能保证 $x=0$ 外的条件，因而 Schwarz 不等式成立，即 $|(Tx,y)|^2\leqslant(Tx,x)(Ty,y)\ (x,y\in H)$. 因而对 $x\in H$，

$$\begin{aligned}\|(T_0-T_\alpha)x\|^4&=((T_0-T_\alpha)x, (T_0-T_\alpha)x)^2\\&\leqslant((T_0-T_\alpha)x,x)((T_0-T_\alpha)^2x,(T_0-T_\alpha)x),\end{aligned}$$

由 $\|T_0-T_\alpha\|$ 有界，$T_\alpha\to T_0(WOT)$，即知 $\|(T_0-T_\alpha)x\|\to 0$，从而 $T_\alpha\to T_0(SOT)$. 证毕.

定理 8 记 $B(H\to H)$ 中的正常算子全体为 N，则映射：$N\to$

$N: T \longrightarrow T^*$ 是 SOT 连续的.

证　由正常算子的定义，当 $T \in N$ 时，$T^* \in N$，所以 $T \longmapsto T^*$ 是 $N \to N$ 的映射，且当 $T \in N$ 时，对 $x \in H$，$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (TT^*x, x) = (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2$. 故 $\|Tx\| = \|T^*x\|$ ($T \in N$, $x \in H$).

设 N 中网 $\{T_\alpha\}$ 及元 T_0 使 $T_\alpha \to T_0(SOT)$，从而对 $x \in H$，$\|(T_\alpha - T_0)x\| \to 0$. 现证 $T_\alpha^* \to T_0^*(SOT)$：由于

$$\|(T_\alpha^* - T_0^*)x\|^2 = ((T_\alpha^* - T_0^*)x, (T_\alpha^* - T_0^*)x)$$
$$= \|T_\alpha x\|^2 + \|T_0 x\|^2 - (T_\alpha^* x, T_0^* x) - (T_0^* x, T_\alpha^* x),$$

由于 $T_\alpha \to T_0(SOT)$，故 $T_\alpha \to T_0(WOT)$，从而 $T_\alpha^* \to T_0^*(WOT)$，所以

$$(T_\alpha^* x, T_0^* x) \to (T_0^* x, T_0^* x) = \|T_0^* x\|^2 = \|T_0 x\|^2,$$

又因 $\|(T_\alpha - T_0)x\| \to 0$，故 $\|T_\alpha x\| \to \|T_0 x\|$，因此

$$\|(T_\alpha^* - T_0^*)x\|^2 \to \|T_0 x\|^2 + \|T_0 x\|^2 - \|T_0 x\|^2 - \|T_0 x\|^2 = 0,$$

即 $T_\alpha^* \to T_0^*(SOT)$. 证毕.

3.4.6　归纳极限与投影极限

本小节中主要是介绍两种由一族局部凸空间来构造新的局部凸拓扑的方法，并讨论一些基本的事实.

引理 1　设 $(L_\alpha, \tau_\alpha)(\alpha \in D)$ 是一族局部凸空间，L 是线性空间，又 $T_\alpha \in L(L_\alpha \to L)$ 且 $\bigcup\limits_\alpha T_\alpha(L_\alpha)$ 张成的线性子空间为 L，则有 L 的使每个 T_α 有连续的最强局部凸拓扑 τ.

证　记 $\{V \mid V$ 是 L 中非空均衡凸集，$T_\alpha^{-1}(V) \in \tau_\alpha (\alpha \in D)\}$ 为 τ_0，如 $V \in \tau_0$，对 $x \in L$，由假设可知有 D 中有限个 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 及 $y_k \in L_{\alpha_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 使 $x = T_{\alpha_1} y_1 + \cdots + T_{\alpha_n} y_n$. 从而有 $\varepsilon > 0$ 使 $\varepsilon y_k \in T_{\alpha_k}^{-1}(V)$，于是，$\varepsilon x = T_{\alpha_1}(\varepsilon y_1) + \cdots + T_{\alpha_n}(\varepsilon y_n) \in V + V + \cdots + V = nV$，所以 V 是吸收集. 记 τ_0 中的 V 的 Minkowski 泛函全体为 P，由 P 决

定的 L 的拓扑记为 τ.

对于任何足标 α 及 $p\in P$, P 是 $V\in T_\alpha$ 的 Minkowski 泛函, 由于 $T_\alpha^{-1}(O(0;p;1))\supset\frac{1}{2}T_\alpha^{-1}(V)$, 且 $O(0;p;1)$ 的正数倍的有限交全体(p 取 P 中的拟范数)是 τ 的局部基, 因而 T_α 是 $(L_\alpha,\tau_\alpha)\to(L,\tau)$ 的连续映射, 即 τ 使得每个 T_α 都连续.

如果 τ_1 是 L 的局部凸拓扑, 且使每个 T_α 是 $(L_\alpha,\tau_\alpha)\to(L,\tau_1)$ 的连续映射, 则 τ_1 的 0 的均衡凸邻域 W 都在 τ_0 中, 从而 W 是 τ 开集, 所以 $\tau_1\subset\tau$, 故 τ 是使每个 T_α 都连续的 L 的最强局部凸拓扑.

定义　设 (L_α,τ_α) 是一族局部凸空间, L 是线性空间, $T_\alpha\in L(L_\alpha\to L)$, 且 $L=\operatorname{span}_\alpha\{T_\alpha L_\alpha\}$, τ 是使每个 T_α 都连续的 L 的最强局部凸拓扑, 则称 τ 是在 T_α 这族映射下的 (L_α,τ_α) 的**归纳极限拓扑**, 而称 (L,τ) 为在 T_α 下的 (L_α,τ_α) 的**归纳极限**.

注　引理 1 中 L 的使每个 T_α 连续的最强局部凸拓扑的存在性, 并不需要 $\bigcup_\alpha T_\alpha(L_\alpha)$ 张成 L 的条件. 实际上由 3.3.4 引理 1, 由 $\{q\mid q$ 是 L 上拟范数, $q\circ T_\alpha$ 是 (L_α,τ_α) 上的连续拟范数 $(\alpha\in D)\}$ 所决定的拓扑就是所要的拓扑. 但如 $\bigcup_\alpha T_\alpha(L_\alpha)$ 很小, 例如所有 T_α 都是零算子时, τ 就是最强局部凸拓扑, (即由 L 上一切拟范数所决定的拓扑) 而与 τ_α 无关了. 所以一般对 T_α 加上这一要求. 下面说到 (L_α,τ_α) 在 T_α 下的归纳极限时, 认为自动满足上述的要求.

定理 1　设 (L,τ) 是局部凸空间族 (L_α,τ_α) 在 T_α 下的归纳极限. 又 $(\tilde{L},\tilde{\tau})$ 是局部凸空间, $S\in L(L\to\tilde{L})$, 则 $S\in B(L\to\tilde{L})$ 的充分必要条件是对任何 α, $S\circ T_\alpha\in B(L_\alpha\to\tilde{L})$.

证　**必要性**　由连续映射复合的连续性即得.

充分性　设对任何 α, $S\circ T_\alpha$ 是连续的. 于是对 $(\tilde{L},\tilde{\tau})$ 的 0 的均衡凸邻域 U, $(S\circ T_\alpha)^{-1}(U)\in\tau_\alpha$, 即 $T_\alpha^{-1}(S^{-1}(U))\in\tau_\alpha$, 从而 $S^{-1}(U)$

$\in\tau_0$（用引理1中记号），由此 $S^{-1}(U)\in\tau$，故 S 是连续的. 证毕.

定理 2　桶式空间的归纳极限是桶式空间.

证　设 (L,τ) 是 (L_α,τ_α) 在 T_α 下的归纳极限，且 (L_α,τ_α) 都是桶式空间. 如果 V 是 (L,τ) 中的桶，即 V 为 (L,τ) 中均衡凸闭吸收集，记 $W_\alpha=T_\alpha^{-1}(V)$，则 W_α 是 (L_α,τ_α) 中的桶. 记 V 及 W_α 的 Minkowski 泛函为 p 及 q_α，由 (L_α,τ_α) 是桶式空间，W_α 是以 0 为内点的，所以 q_α 是 (L_α,τ_α) 上的连续拟范数. 由于 $O(0;q_\alpha;1)\subset W_\alpha$，$T_\alpha(O(0;q_\alpha;1))\subset V$，因此当 $z\in L_\alpha$ 使 $q_\alpha(z)<1$ 时，$T_\alpha z\in V$，故 $p(T_\alpha z)\leqslant 1$，这样，当 $z\in L_\alpha$ 使 $q_\alpha(z)<1$ 时必定 $p(T_\alpha z)<1$（不会 $p(T_\alpha z)=1$），从而 $T_\alpha(O(0;q_\alpha,1))\subset O(0;p;1)$，即 $O(0;q_\alpha;1)\subset T_\alpha^{-1}(O(0;p;1))$. 反过来，如 $y\in T_\alpha^{-1}(O(0;p;1))$，因 $O(0;p;1)\subset V$，故 $y\in W_\alpha$，从而 $q_\alpha(y)\leqslant 1$，同样这时 $q_\alpha(y)$ 不会等于 1. 因而 $q_\alpha(y)<1$，即 $T_\alpha^{-1}(O(0;p;1))=O(0;q_\alpha;1)$. 由此，$O(0;p;1)$ 是 L 中均衡凸集，且 $T_\alpha^{-1}(O(0;p;1))=O(0;q_\alpha;1)\in\tau_\alpha$，因而 $O(0;p;1)\in\tau_0$（见引理 1 中记法）. 由此 $O(0;p;1)\in\tau$，即 V 以 0 为内点，所以 (L,τ) 是桶式空间. 证毕.

定理 3　囿空间的归纳极限是囿空间.

证　设 (L,τ) 是 (L_α,τ_α) 在 T_α 下的归纳极限，且 (L_α,τ_α) 是囿空间，又 p 是 L 上拟范数，并在 (L,τ) 的有界集上有界.

记 $O=O(0;p;1)$，$V_\alpha=T_\alpha^{-1}(O)$ 并记 V_α 的 Minkowski 泛函为 q_α. 对于 $(L_\alpha\tau_\alpha)$ 中的有界集 A_α，由 3.2.4 引理 2 的系，$T_\alpha(A_\alpha)$ 是 (L,τ) 中有界集，所以有 $\varepsilon>0$ 使 $\varepsilon T_\alpha(A_\alpha)\subset O$，于是 $\varepsilon A_\alpha\subset T_\alpha^{-1}(O)=V_\alpha$，而 q_α 在 A_α 上有界，由于 (L_α,τ_α) 是囿空间，q_α 是 (L_α,τ_α) 上连续拟范数. 因 O 中点都是内部点，故 V_α 中点都是内部点，所以 $V_\alpha=O(0;q_\alpha;1)\in\tau_\alpha$. 由此 $O\in\tau_0$（见引理 1），而 p 是 (L,τ) 上的连续拟范数. 故 (L,τ) 是囿空间. 证毕.

作为归纳极限的例子，下面指出两个特殊情况.

设(L,τ)是局部凸空间，L_0 是 L 的线性子空间，Q 是 $L\to L/L_0$ 的商映射，则(L,τ)在 Q 下的归纳极限就是 $(L/L_0,\tau_0)$. 在这情况下，足标只有一个.

在定理 2 中证明了桶式空间的归纳极限是桶式空间，而商空间的商拓扑是归纳极限拓扑. 对于 Banach 空间，更进一步可知商空间也是 Banach 空间.

设$(X,\|\cdot\|)$是 Banach 空间，X_0 是$(X,\|\cdot\|)$的闭子空间，则商空间$(X/X_0,\|\cdot\|)$是 Banach 空间.

证 设$\{z_n\}$是$(X/X_0,\|\cdot\|)$中的基本点列，z_n 是陪集. 由定义，$\|z_n\|=\inf\{\|x\|\,|\,x\in z_n\}$，所以有 $\{x_n\}$，使得 $x_n\in z_n$ 且$\|x_n\|<\|z_n\|+\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$. 易见$\{x_n\}$是$(X,\|\cdot\|)$中基本点列，于是有 $x_0\in X$ 使 $x_n\to x_0(X,\|\cdot\|)$，即$\|x_n-x_0\|\to 0$. 由商映射的连续性，即知$\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_0\|\to 0$，也即$\|z_n-\tilde{x}_0\|\to 0$. 证毕.

另一种情况是，设 L 是线性空间，L_α 是 L 的一族线性子空间，且$\bigcup\limits_\alpha L_\alpha$ 张成的线性子空间为 L. τ_α 是 L_α 的局部凸拓扑，并令 T_α: $L_\alpha\to L: x\longmapsto x$，这时，$(L_\alpha,\tau_\alpha)$在 T_α 下的归纳极限拓扑 τ 是使 τ 在 L_α 上的诱导拓扑比 τ_α 弱的 L 中最强局部凸拓扑.

定义 设(L_α,τ_α)是一族局部凸空间，L 是线性空间，$T_\alpha\in L(L\to L_\alpha)$，且$\bigcap\limits_\alpha T_\alpha^{-1}(\{0\})=\{0\}$，则称使每个 T_α 都连续的 L 的最弱拓扑 τ 为(L_α,τ_α)在 T_α 下的**投影极限拓扑**，又称(L,τ)是(L_α,τ_α)在 T_α 下的**投影极限**.

投影极限拓扑的意义是确定的. 由3.2.5 定理 2 及系，这是向量拓扑，且

$$\{T_\alpha^{-1}(O_\alpha)\,|\,\alpha\in D, O_\alpha \text{ 是}(L_\alpha,\tau_\alpha)\text{的 0 的均衡凸邻域}\}$$

是 τ 在 0 点的子基. 因而 τ 是局部凸拓扑. 实际上，$\{q_\alpha\circ T_\alpha\,|\,\alpha\in D,$

q_α是(L_α,τ_α)上连续拟范数}就是决定τ的L上拟范数族. $\bigcap\limits_\alpha T_\alpha^{-1}(\{0\})=\{0\}$对于使每个$T_\alpha$都连续的最弱拓扑的存在并不必要，但投影极限的定义中加上这个要求. 足标集D在定义中略去未写出.

引理 2 Hausdorff 空间的投影极限是 Hausdorff 空间.

证 设(L,τ)是(L_α,τ_α)在T_α下的投影极限，且每个(L_α,τ_α)是 Hausdorff 空间. 对于L中非零元x，由$\bigcap\limits_\alpha T_\alpha^{-1}(\{0\})=\{0\}$，故有$\alpha_0\in D$，使$T_{\alpha_0}x\neq0$. 因$(L_{\alpha_0},\tau_{\alpha_0})$是 Hausdorff 空间，有连续拟范数$q_{\alpha_0}$使$q_{\alpha_0}(T_{\alpha_0}x)\neq0$，所以$q_{\alpha_0}\circ T_{\alpha_0}(x)\neq0$，而$q_{\alpha_0}\circ T_{\alpha_0}$是$(L,\tau)$的连续拟范数，由此$(L,\tau)$是 Hausdorff 空间. 证毕.

定理 4 设(L,τ)是(L_α,τ_α)在T_α下的投影极限，又$(\tilde{L},\tilde{\tau})$是局部凸空间，$S\in L(\tilde{L}\to L)$，则$S\in B(\tilde{L}\to L)$的充分必要条件是：对每个α，$T_\alpha\circ S\in B(\tilde{L}\to L_\alpha)$.

证 必要性 由连续映射复合必连续即得.

充分性 对α及(L_α,τ_α)中 0 的均衡凸邻域O_α，由于$T_\alpha^{-1}(O_\alpha)$的在S下的原象$S^{-1}(T_\alpha^{-1}(O_\alpha))=(T_\alpha\circ S)^{-1}(O_\alpha)\in\tilde{\tau}$. 而因为$\{T_\alpha^{-1}(O_\alpha)\mid\alpha\in D, O_\alpha$是$(L_\alpha,\tau_\alpha)$中 0 的均衡凸邻域$\}$是$\tau$在 0 的子基，故$S$是连续的. 证毕.

定理 5 设(L,τ)是(L_α,τ_α)在T_α下的投影极限. $A\subset L$，则A是(L,τ)中有界集(完全有界集)的充分必要条件是：对每个α，$T_\alpha(A)$是(L_α,τ_α)中的有界集(完全有界集).

证 必要性 由 3.2.4 引理 2 的系及引理 3 即得.

充分性 设$A\subset L$且对每个α，$T_\alpha(A)$是(L_α,τ_α)中有界集. 对于$\alpha\in D$及(L_α,τ_α)中 0 的均衡凸邻域O_α，有$\varepsilon>0$使$\varepsilon T_\alpha(A)\subset O_\alpha$，故$\varepsilon A\subset T_\alpha^{-1}(O_\alpha)$，即$T_\alpha^{-1}(O_\alpha)$吸收$A$，由于这种集$T_\alpha^{-1}(O_\alpha)$是$\tau$在 0 点的子集，所以$A$是$(L,\tau)$中有界集.

现设$A\subset L$使$T_\alpha(A)$是(L_α,τ_α)中完全有界集. 对于有限个

足标 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 及 $(L_{\alpha_k},\tau_{\alpha_k})$ 中 0 的均衡凸邻域 O_k（为简化足标而记为 O_k），记 $O=\bigcap_{k=1}^{n}T_{\alpha_k}^{-1}(O_k)$，这种形式的 O 构成 τ 的局部基，故只要证明有 L 中有限集 B 使 $A\subset B+O$.

对 $k=1,2,\cdots,n$，记 $V_k=\frac{1}{2}O_k$，由于 $T_{\alpha_k}(A)$ 是 $(L_{\alpha_k},\tau_{\alpha_k})$ 中完全有界集，故有 $T_{\alpha_k}(A)$ 中有限个元，即相应地有 A 中有限个元 $x_1^{(k)},\cdots,x_{m_k}^{(k)}$（$m_k$ 与 k 有关），使得

$$T_{\alpha_k}(A)\subset\bigcup_{j=1}^{m_k}(T_{\alpha_k}x_j^{(k)}+V_k).$$

因此，

$$A\subset\bigcup_{j=1}^{m_k}(x_j^{(k)}+T_{\alpha_k}^{-1}(V_k))=\bigcup_{j=1}^{m_k}\left(x_j^{(k)}+\frac{1}{2}T_{\alpha_k}^{-1}(O_k)\right).$$

由于此式对 $k=1,2,\cdots,n$ 成立，故

$$A\subset\bigcap_{k=1}^{n}\left(\bigcup_{j=1}^{m_k}\left(x_j^{(k)}+\frac{1}{2}T_{\alpha_k}^{-1}(O_k)\right)\right),$$

由此，A 被总共个数为 $m_1m_2\cdots m_n$ 个的集覆盖，其中每个集的形式为 $\bigcap_{k=1}^{n}\left(y_k+\frac{1}{2}T_{\alpha_k}^{-1}(O_k)\right)$. 取这种形式的非空集 W，易见 $W-W\subset\frac{1}{2}T_{\alpha_k}^{-1}(O_k)-\frac{1}{2}T_{\alpha_k}^{-1}(O_k)\subset T_{\alpha_k}^{-1}(O_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$，故 $W-W\subset O$，对 W 中元 z，$W-z\subset O$，故 $W\subset z+O$.

因此，A 被有限个集所覆盖，其中每一个集 W 都在 $z+O$ 中，所以有 L 中有限个元 $z_1,z_2,\cdots,z_0$ 使

$$A\subset\bigcup_{j=1}^{l}(z_j+O),$$

从而 A 是 (L,τ) 中的完全有界集. 证毕.

设 (L_α,τ_α) 是一族局部凸空间，令 $L=\underset{\alpha}{\times}L_\alpha$, L 中的加法和数乘按通常定义，令 $T_\alpha: L\to L_\alpha: \varphi\mapsto\varphi(\alpha)$，这时，$(L_\alpha,\tau_\alpha)$ 在 T_α 下的投影极限拓扑也就是乘积拓扑. 投影极限也就是乘积拓扑空间.

第四章 Banach代数

Banach代数的理论是从四十年代开始发展的,它是研究带有乘法的Banach空间的性质及应用的理论.

在Banach代数中,除线性运算及范数外又有乘法运算,因而代数的概念和方法,如逆元、理想等起着更为重要的作用.

在分析学中许多重要的Banach空间可以适当规定乘法而成为Banach代数,典型的例子就是$\mathbb{R}$上Lebesgue可积函数以卷积作为乘法时,它就成为Banach代数. Banach代数的理论在经典调和分析及抽象调和分析,群表示论,算子理论及函数代数等数学领域中有广泛的应用,而它的理论本身也综合了函数论,抽象代数等学科的技巧.

本章讨论Banach代数的基本理论. 并且还讨论了更特殊的一些Banach代数,如对称Banach代数及C^*代数等,并举出了Banach代数理论的应用(如Wiener定理).

§4.1 基本概念和性质,元的正则集及谱

本节讨论基本的代数概念. 并在Banach代数中给出这些概念的基本结论. 举了几个常用的Banach代数的例及在这些例子中,元的正则集与谱的计算.

4.1.1 代数,单位元,正则元,正则集及谱

定义 设R是线性空间,又在R上有二元运算,即$R\times R\to R$的映射:$(x,y)\longmapsto xy$(称为乘法),它满足

(i) $(xy)z=x(yz)$　$(x,y,z\in R)$;

(ii) $(x+y)z=xz+yz$, $x(y+z)=xy+xz$　$(x,y,z\in R)$;

(iii) $\lambda(xy)=(\lambda x)y=x(\lambda y)$　$(x,y\in R,\lambda\in\mathbb{K})$.

则称 R 是**代数**. 如果 R 中有元 e 使得 $ex=xe=x\,(x\in R)$,则称 R 是**有单位元**的,而称有上述性质的元 e 为 R 的**单位元**. 如果 $xy=yx$ $(x,y\in R)$,则称 R 是**交换**的.

如果在代数 R 中有范数 $\|\cdot\|$(作为线性空间 R 而言的范数),而且 $\|\cdot\|$ 满足

(iv) $\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$　$(x,y\in R)$,

则称 R 或 $(R,\|\cdot\|)$ 是**赋范代数**. 如果 $(R,\|\cdot\|)$ 是完备的, 则称 $(R,\|\cdot\|)$ 是**Banach 代数**.

注意,有时会考察仅有零元 $\{0\}$ 的代数,这时,认为这种代数是没有单位元的.

例如, 在 Banach 空间 $(R,\|\cdot\|)$ 中,规定 $xy=0\,(x,y\in R)$,这时 R 就成为 Banach 代数. 当然这样的 Banach 代数是平凡的.

引理 1　设 R 是没有单位元的代数,令 $\tilde{R}=\mathbb{K}\times R$, 在 $\tilde{R}$ 中按通常方法规定加法和数乘. 且规定乘法为

$$(\lambda,x)\,(\mu,y)=(\lambda\mu,\lambda y+\mu x+xy)$$

则 $\tilde{R}$ 是有单位元的代数. 又如果 $(R,\|\cdot\|)$ 是 Banach 代数,但 R 中没有单位元,如上作 $\tilde{R}$, 并令 $\|(\lambda,x)\|=|\lambda|+\|x\|$,则 $(\tilde{R},\|\cdot\|)$ 是有单位元的 Banach 代数,而 $(1,0)$ 是 $\tilde{R}$ 中单位元.

证　直接验证即知. 证毕.

引理 2　若 R 是有单位元的代数,则单位元是唯一的.

证　如果 e_1,e_2 都是 R 的单位元,则 $e_1=e_1e_2=e_2$. 证毕.

在引理 1 中,如果 R 是有单位元 e 的代数,仍可作 $\tilde{R}$,这时,$(1,0)$ 是 $\tilde{R}$ 中单位元而 $(0,e)$ 不再是单位元了. 通常当 R 有单位元时, 不必再作 $\tilde{R}$. $\tilde{R}$ 称为由 R 添加形式单位元后的代数. 当 R 是

有单位元的代数时，单位元总记为 e.

定义 设 R 是有单位元 e 的代数，$x_0\in R$，如果有 R 中元 y 使 $yx_0=e(x_0y=e)$，则称 x_0 是**左(右)可逆的**. 而这样的 y 称为 x_0 的**左(右)逆元**. 如果 $x_0\in R$ 既是左可逆又是右可逆的，就称 x_0 是**可逆元**或**正则元**.

引理 3 设 R 是有单位元的代数，$x_0\in R$ 是正则元，又 y 是 x_0 的左逆元，z 是 x_0 的右逆元. 则 $y=z$.

证 $y=y(x_0z)=(yx_0)z=z$. 证毕.

系 如果 x_0 是有单位元的代数 R 的正则元，则 x_0 只有唯一的左逆元，它也是 x_0 的唯一的右逆元.

定义 设 R 是有单位元的代数，x_0 是 R 中正则元，则称 x_0 的左逆元(也即右逆元)为 x_0 的**逆元**，记为 x_0^{-1}.

引理 4 设 R 是有单位元的代数，x_0,y_0 都是 R 中正则元，则 x_0y_0 是 R 的正则元，且 $(x_0y_0)^{-1}=y_0^{-1}x_0^{-1}$.

证 因为 $(y_0^{-1}x_0^{-1})(x_0y_0)=(y_0^{-1}x_0^{-1}x_0)y_0=y_0^{-1}y_0=e$，另一面也类似. 故 x_0y_0 正则且 $(x_0y_0)^{-1}=y_0^{-1}x_0^{-1}$. 证毕.

定义 设 R 是有单位元的代数，$x_0\in R$，$\lambda\in\mathbf{K}$，如果 $\lambda e-x_0$ 是正则元，就称 λ 是 x_0 的**正则点**，不是正则点的数就称为是 x_0 的**谱点**. x_0 的正则点全体称为 x_0 的**正则集**，记为 ρ_{x_0}；x_0 的谱点全体称为 x_0 的**谱**，记为 σ_{x_0}.

定理 1 设 R 是有单位元的代数，$x,y\in R$，则 $\sigma_{xy}\cup\{0\}=\sigma_{yx}\cup\{0\}$.

证 先证如果 $(e-xy)$ 正则，则 $(e-yx)$ 也是正则的.

如果 $(e-xy)$ 正则，令 $z=e+y(e-xy)^{-1}x$，于是

$$
\begin{aligned}
(e-yx)z&=(e-yx)+(e-yx)y(e-xy)^{-1}x\\
&=(e-yx)+y(e-xy)(e-xy)^{-1}x=e-yx+yx=e.
\end{aligned}
$$

同样可验证 $z(e-yx)=e$. 所以 $e-yx$ 是正则的.

由此，如果 $\lambda\neq 0$，且 $(\lambda e-xy)$ 正则，于是 $(e-\frac{x}{\lambda}y)$ 正则，由上所证，$(e-y\frac{x}{\lambda})=\frac{1}{\lambda}(\lambda e-yx)$ 正则，故 $(\lambda e-yx)$ 正则.

所以，当 $\lambda\neq 0$ 时，由 $\lambda\in\rho_{xy}$ 可知 $\lambda\in\rho_{yx}$. 因 x 与 y 地位相同，由 $\lambda\in\rho_{yx}$ 可知 $\lambda\in\rho_{xy}$. 由 $\sigma_{xy}=(\rho_{xy})^c$，$\sigma_{yx}=(\rho_{yx})^c$，即知 $\sigma_{xy}\cup\{0\}=\sigma_{yx}\cup\{0\}$. 证毕.

引理 5　设 $(R,\|\cdot\|)$ 是赋范代数，$x\in R$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}=\inf\limits_{n}\sqrt[n]{\|x^n\|}$.

证　记 $\inf\limits_{n}\sqrt[n]{\|x^n\|}$ 为 a. 对于 $\varepsilon>0$. 有 n_0 使 $\sqrt[n_0]{\|x^{n_0}\|}\leqslant a+\varepsilon$，即 $\|x^{n_0}\|\leqslant(a+\varepsilon)^{n_0}$. 任何自然数 n 可唯一地写成为 $n=ln_0+m$ 其中 l 是非负整数，m 是非负整数且 $m\leqslant n_0-1$.（l, m 都与 n 有关），当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{m}{n}\to 0$，从而 $\frac{ln_0}{n}\to 1$，由

$$\|x^n\|\leqslant\|x^{ln_0}\|\|x\|^m\leqslant\|x^{n_0}\|^l\|x\|^m\leqslant(a+\varepsilon)^{ln_0}\|x\|^m,$$

故 $\sqrt[n]{\|x^n\|}\leqslant(a+\varepsilon)^{\frac{ln_0}{n}}\|x\|^{\frac{m}{n}}$. 令 $n\to+\infty$，即得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|x^n\|}\leqslant a+\varepsilon$. 由于 ε 是任意正数，从而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|x^n\|}\leqslant a$. 但由定义，有 $a\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|x^n\|}$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}=a=\inf\limits_{n}\sqrt[n]{\|x^n\|}$. 证毕.

引理 6　设 $(R,\|\cdot\|)$ 是有单位元 e 的 Banach 代数，则有 R 上范数 $\|\cdot\|_1$ 使得 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|$ 等价，$(R,\|\cdot\|_1)$ 是 Banach 代数且 $\|e\|_1=1$.

证　对于 $x\in R$，作 $A_x: R\to R: y\longmapsto xy$，易见 $A_x\in B(R\to R)$. 由 $\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|\ (x,y\in R)$，故 $\|A_x\|\leqslant\|x\|$. 又因 $A_xe=x$，故 $\|A_x\|\geqslant\frac{\|x\|}{\|e\|}$，因而 $\frac{\|x\|}{\|e\|}\leqslant\|A_x\|\leqslant\|x\|$. 又当 $x=e$ 时，A_x 是恒等算子，$\|A_e\|=1$. 对于 $x\in R$，令 $\|x\|_1=\|A_x\|$，因为 $\|xy\|_1=\|A_{xy}\|=\|A_xA_y\|\leqslant\|A_x\|\cdot\|A_y\|=$

$\|x\|_1\cdot\|y\|_1$，又算子的范数是 $B(R\to R)$ 的范数，因而 $\|\cdot\|_1$ 是 R 的范数，易见 $\|\cdot\|_1$ 满足引理的一切要求．证毕．

由引理 1 及引理 6，不妨只讨论有单位元的 Banach 代数，并设单位元 e 的范数为 1．

在讨论有单位元的 Banach 代数的谱的性质时，一般假定 R 是复的代数．

4.1.2 Banach 代数中元素的谱

本小节中总设 R 是有单位元 e 的复 Banach 代数，且单位元 e 使 $\|e\|=1$，其中有些定理不需要复的假设．

引理 1 设 R 中元 x 使 $\|x\|<1$，则 $e-x$ 是正则元．

证 令 $y=e+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$，由于 $\|x\|<1$，记 $y_n=\sum_{k=0}^{n}x^k$（x^0 表示 e），则 $\{y_n\}$ 是 R 中 Cauchy 点列，故 $\{y_n\}$ 收敛，其极限记为 y．由 $y_n(e-x)=(e-x)y_n=e-x^{n+1}\to e$，即知 $y(e-x)=(e-x)y=e$，所以 $e-x$ 正则且 $(e-x)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$．证毕．

定理 1 R 中正则元全体是 $(R,\|\cdot\|)$ 中开集，且在正则元全体上，映射：$x\longmapsto x^{-1}$ 是连续的．

证 设 x 是 R 中正则元，记 $\varepsilon=\dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$，则当 $y\in O(x;\varepsilon)$ 时，$\|y-x\|<\varepsilon$，而 $y=x-(x-y)=x(e-x^{-1}(x-y))$．由 $\|x^{-1}(x-y)\|<1$，并由 4.1.1 引理 4，即知 y 是正则元．

当 $y\in O(x;\dfrac{\varepsilon}{2})$ 时，$\|x^{-1}(x-y)\|<\dfrac{1}{2}$，这时 $\|(e-x^{-1}(x-y))^{-1}\|<2$，从而 $\|y^{-1}\|\leqslant 2\|x^{-1}\|$．从而

$$\|y^{-1}-x^{-1}\|=\|(y^{-1}(x-y)x^{-1})\|\leqslant 2\|x^{-1}\|^2\|x-y\|,$$

即知映射 $x\longmapsto x^{-1}$ 是连续的．证毕．

系 对$x\in R$，ρ_x是开集. 且当$\lambda_0\in\rho_x$，$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|(\lambda_0 e-x)^{-1}\|}$时，

$$(\lambda e-x)^{-1}=(\lambda_0 e-x)\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_0 e-x)^{-k}(\lambda_0-\lambda)^k.$$

证 分别以$\lambda_0 e-x$，$\lambda e-x$作为定理1中的x,y，即知$(\lambda e-x)^{-1}$可写成这级数的形式. 证毕.

定理2 对$x\in R$，σ_x非空.

证 用反证法，如果σ_x是空集，则$\rho_x=\mathbf{C}$，于是$(\lambda e-x)^{-1}$对任何$\lambda\in\mathbf{C}$有意义. 且在每个$\lambda_0\in\mathbf{C}$附近，$(\lambda e-x)^{-1}$可写成级数形式. 对任何$f\in R^*$，$f((\lambda e-x)^{-1})$是整函数.

当$\lambda\in\mathbf{C}$使$|\lambda|>2\|x\|$时，$\lambda e-x=\lambda(e-\frac{x}{\lambda})$，所以

$$\|(\lambda e-x)^{-1}\|=\left\|\frac{1}{\lambda}\left(e-\frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\right\|<\frac{2}{|\lambda|},$$

从而$|f((\lambda e-x)^{-1})|\leqslant\frac{2}{|\lambda|}\|f\|$. 由 Louville 定理，得

$$f((\lambda e-x)^{-1})\equiv 0.$$

这显然不可能，从而得出矛盾. 所以σ_x非空. 证毕.

由于当$\lambda\in\mathbf{C}$使$|\lambda|>\|x\|$时，$\lambda\in\rho_x$，所以σ_x是$\mathbf{C}$中非空有界闭集，数$\sup\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\sigma_x\}$称为元$x$的**谱半径**，记为$r(x)$.

定理3 设R是有单位元的复 Banach 代数，$x\in R$，则

$$r(x)=\lim_n\sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

证 仍设$\lim_n\sqrt[n]{\|x^n\|}$为a. 当$\lambda\in\mathbf{C}$且$|\lambda|>a$时，由于$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\|x\|}{\lambda}\right)^k$是收敛的，因而级数$\sum_{k=0}^{\infty}x^k\lambda^k$的部分和是 Cauchy 点列，这级数是$R$中的元. 从引理1可知它等于$\left(e-\frac{x}{\lambda}\right)^{-1}$，所以$\{\lambda|\,|\lambda|$

$>a\}\subset\rho_x$，故 $r(x)\leqslant a$.

下面用反证法证明等式成立. 如 $r(x)<a$，取 b 使得 $r(x)<b<a$，对 $f\in R^*$，$f((\lambda e-x)^{-1})$ 是 $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{C},\ |\lambda|>r(x)\}$ 处的解析函数，由在 $\{\lambda\mid|\lambda|>\|x\|\}$ 处的展开式，并由解析函数的幂级数展开式的唯一性，即知

$$f((\lambda e-x)^{-1})=\frac{1}{\lambda}\left(f(e)+f\left(\frac{x}{\lambda}\right)+f\left(\frac{x^2}{\lambda^2}\right)+\cdots\right)\quad(|\lambda|>r(x)).$$

特别，$f(e)+f\left(\frac{x}{b}\right)+f\left(\frac{x^2}{b^2}\right)+\cdots$ 是收敛的，可见 $\left\{f\left(\frac{x^n}{b^n}\right)\Big|\,n=1,2,3,\cdots\right\}$ 是有界数集. 由一致有界定理，$\left\{\frac{x^n}{b^n}\Big|\,n=1,2,\cdots\right\}$ 是 $(R,\|\cdot\|)$ 中有界集. 即有常数 C 使 $\left\|\frac{x^n}{b^n}\right\|\leqslant C$，从而 $\|x^n\|\leqslant Cb^n$，由此，

$$\lim_{n}\sqrt[n]{\|x^n\|}\leqslant b,$$

即 $a\leqslant b$，矛盾. 从而 $r(x)=a$. 证毕.

下面的结论是定理 2 和 4.1.1 中定理 1 的一个应用.

定理 4 设 R 是有单位元的复 Banach 代数，则不可能有 R 中两个元 x,y 使得 $xy-yx=e$.

证 用反证法. 如果 $x,y\in R$ 且 $xy-yx=e$，则 $xy=e+yx$，由元素的谱的定义，即知 $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}+1(=\{\lambda+1\mid\lambda\in\sigma_{yx}\})$. 如果 $0\in\sigma_{yx}$，则 $1\in\sigma_{xy}$. 由 4.1.1 定理 1，$1\in\sigma_{yx}$，这样，任何自然数 n 都在 σ_{yx} 中，与 σ_{yx} 是有界集矛盾. 同样，如果 $0\in\sigma_{xy}$，则 $-1,-2,\cdots$，都在 σ_{xy} 中也得矛盾. 但如果 $0\overline{\in}\sigma_{xy}$ 时，由 σ_{yx} 非空，如 $\lambda_0\in\sigma_{yx}$，则 $\lambda_0+n(n=1,2,\cdots)$ 都在 σ_{yx} 中，也与 σ_{yx} 是有界集矛盾. 故不可能有这样的 x 与 y. 证毕.

4.1.3 元素在子代数中的谱

定义 设 R 是代数，$R_0\subset R$，如果 R_0 是 R 的线性子空间且当

x, $y\in R_0$ 时 $xy\in R_0$, 则称 R_0 是 R 的**子代数**. 如果 R 是 Banach 代数, R_0 是 R 的闭子代数, 则称 R_0 是 R 的 **Banach 子代数**.

当 R 是有单位元的代数, R_0 是 R 的子代数且 $e\in R_0$ 时, 对于 R_0 中的元 x, x 是正则元, x 的正则集等等概念是与作为那个代数的元来说有关. 显然当 x 是 R_0 中正则元时, x 是 R 中的正则元, 因此 $\rho_x(R_0)\subset\rho_x(R)$. 从而 $\sigma_x(R)\subset\sigma_x(R_0)$ ($\rho_x(R_0)$ 表示作为 R_0 中的元 x 的正则集, 其余也是类似的记号). 下面对于 Banach 子代数的情况来讨论.

定理 1　设 R 是有单位元 e 的复 Banach 代数, R_0 是 R 的 Banach 子代数且 $e\in R_0$, 又 $x\in R_0$, 则 $\sigma_x(R_0)\supset\sigma_x(R)$ 而且 $\sigma_x(R_0)\backslash\sigma_x(R)$ 是开集.

证　$\sigma_x(R_0)\supset\sigma_x(R)$ 是显然的. 设 $\lambda_0\in\sigma_x(R_0)\backslash\sigma_x(R)$, 今证 λ_0 是 $\sigma_x(R_0)\backslash\sigma_x(R)$ 的内点. 用反证法, 设有 $\lambda_n\to\lambda_0$ 且数列 $\{\lambda_n\}$ 中每个都不在 $\sigma_x(R_0)\backslash\sigma_x(R)$ 中. 因 $\lambda_0\overline{\in}\sigma_x(R)$, 并且 $\rho_x(R)$ 是开集, 所以可设 $\lambda_n\in\rho_x(R)$, 即 $(\lambda_n e-x)$ 在 R 中正则, 但 $(\lambda e_n-x)^{-1}$ 都在 R_0 中. 因为 R_0 是闭的, $(\lambda_n e-x)^{-1}\in R_0$, 且由 4.1.2 定理 1, 映射 $x\longmapsto x^{-1}$ 是连续的, 由 $\lambda_n\to\lambda_0$, $\lambda_n e-x\to\lambda_0 e-x$, 故 $(\lambda_n e-x)^{-1}\to(\lambda_0 e-x)^{-1}$, 从而 $(\lambda_0 e-x)^{-1}\in R_0$, 因而 $\lambda_0\in\rho_x(R_0)$, 与 $\lambda_0\in\sigma_x(R_0)$ 矛盾, 所以 λ_0 是 $\sigma_x(R_0)\backslash\sigma_x(R)$ 的内点. 从而 $\sigma_x(R_0)\backslash\sigma_x(R)$ 是开集. 证毕.

注意　这里设 $e\in R_0$, 而不说 R_0 有单位元. 因为 $e\overline{\in}R_0$ 时并不排斥 R_0 中另有元起着 R_0 的单位元的作用.

系　设 R 是有单位元的复 Banach 代数, R_0 是 R 的 Banach 子代数, $e\in R_0$, $x\in R_0$, 如果 $\sigma_x(R_0)$ 是疏朗集, 则 $\sigma_x(R_0)=\sigma_x(R)$.

后面将举出 $\sigma_x(R_0)\neq\sigma_x(R)$ 的例子.

定理 2 (Гельфанд-Мазур)　设 $(R, \|\cdot\|)$ 是有单位元的复 Banach 代数, 如果 R 中非零元都是正则的, 则 R 是一维的.

证 对$x\in R$，由σ_x非空，设$\lambda\in\sigma_x$，则$\lambda e-x$不是正则元，由假设$\lambda e-x=0$，即$x=\lambda e$. 可见R中任何元x都是e的倍数，故R是一维空间. 证毕.

引理 1 设R是有单位元的复代数，$x\in R$，对于复系数多项式$p(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$，记$p(x)=a_0e+a_1x+\cdots+a_nx^n$，则$\sigma_{p(x)}=p(\sigma_x)(=\{p(\lambda)\mid\lambda\in\sigma_x\})$.

证 记p的n个复根(包括重根)为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，易见$p(x)=a_n(x-\lambda_1e)(x-\lambda_2e)\cdots(x-\lambda_ne)$. 如果$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\rho_x$，由4.1.1引理4，$p(x)$是正则元. 反之，如果$p(x)$是正则元，则$x-\lambda_ne$有左逆元$p(x)^{-1}a_n(x-\lambda_1e)\cdots(x-\lambda_{n-1}e)$. 由于

$$p(x)=(x-\lambda_ne)(a_n(x-\lambda_1e)\cdots(x-\lambda_{n-1}e)),$$

所以$x-\lambda_ne$有右逆元，从而$x-\lambda_ne$正则，即$\lambda_n\in\rho_x$，同理$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}\in\rho_x$. 由此可见$p(x)$正则等价于$p$的根都是$x$的正则点，所以$0\in\sigma_{p(x)}$等价于$p$的根中有一个谱点，亦即$\sigma_x$中有$p$的根，由此$0\in\sigma_{p(x)}$等价于$0\in p(\sigma_x)$.

对于$\lambda_0\in\mathbf{C}$，记$q=\lambda_0-p$，对q用上述结论，即知$\lambda_0\in\sigma_{p(x)}$等价于$\lambda_0\in p(\sigma_x)$，所以$\sigma_{p(x)}=p(\sigma_x)$. 证毕.

以上证明是设p为次数高于1的多项式. 对于p是常数时，可直接验证，但$p(x)$的谱是$\{a_0\}$，而σ_x如为空集就不适当. 但对于 Banach 代数就不会有这问题.

4.1.4 几个例子

例 1 设Ω是紧 Hausdorff 空间，$C(\Omega)$是个 Banach 空间，在$C(\Omega)$中规定乘法如下：对$x,y\in C(\Omega)$，令

$$(xy)(t)=x(t)y(t)\quad(t\in\Omega),$$

这时，$C(\Omega)$是个有单位元(恒等于1的函数是单位元)的交换的复 Banach 代数. 同样，$C_r(\Omega)$是有单位元的交换的实 Banach

代数.

例 2 设R是个 Banach 空间，$B(R\to R)$是个 Banach 空间，在$B(R\to R)$中，以复合作为乘积，则$B(R\to R)$是个有单位元(恒等算子I是单位元)的 Banach 代数(不考虑$R=\{0\}$的情况)，当R的维数大于 1 时，$B(R\to R)$不是交换的.

例 3 $L(\mathbb{R})$表示$(-\infty, +\infty)$上的 Lebesgue 可积函数全体，这是个 Banach 空间. 范数是$\|x\|=\int_{\mathbb{R}}|x(t)|dm(t)$，$m$表示直线上的 Lebesgue 测度. 对于$x, y\in L(\mathbb{R})$，规定乘法为卷积

$$(x*y)(t)=\int_{\mathbb{R}}x(s)y(t-s)dm(s).$$

下面对于这一个乘法作些说明.

当$x, y\in L(\mathbb{R})$时，由于

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|x(s)y(t-s)|dm(s)dm(t)\\&=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|x(s)y(t-s)|dm(t)dm(s)=\|y\|\int_{\mathbb{R}}|x(s)|dm(s)\\&=\|y\|\cdot\|x\|.\end{aligned}$$

因此对于几乎所有的t，$\int_{\mathbb{R}}x(s)y(t-s)dm(s)$是可积的. 即函数$x*y$是有定义的，并且$x*y$仍是$L(\mathbb{R})$中元，且$\|x*y\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$.

当$t\in\mathbb{R}$使$x*y$有定义时，由

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}x(s)y(t-s)dm(s)&=\int_{\mathbb{R}}x(t+s)y(-s)dm(s)\\&=\int_{\mathbb{R}}x(t-s)y(s)dm(s)=(y*x)(t),\end{aligned}$$

因而乘法是交换的.

由乘法：$(x, y)\longmapsto x*y$的定义，易见乘法满足代数的定义中

性质(ii)，(iii)，现证明乘法满足结合律(i)。

对于$x, y, z\in L(\mathbb{R})$，

$$
\begin{aligned}
((x*y)*z)(u) &= \int_{\mathbf{R}}(x*y)(t)z(u-t)dm(t) \\
&= \int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}}x(s)y(t-s)dm(s)\right)z(u-t)dm(t) \\
&= \int_{\mathbf{R}}x(s)\int_{\mathbf{R}}y(t-s)z(u-t)dm(t)dm(s) \\
&= \int_{\mathbf{R}}x(s)\int_{\mathbf{R}}y(t)z(u-t-s)dm(t)dm(s) \\
&= \int_{\mathbf{R}}x(s)(y*z)(u-s)dm(s) \\
&= (x*(y*z))(u),
\end{aligned}
$$

因此$(x*y)*z=x*(y*z)$，即乘法使结合律成立．由此，$L(\mathbf{R})$在以$*$作为乘法时，是个交换的 Banach 代数．

在$L(\mathbf{R})$中是没有单位元的．实际上，取x为$[0,1]$上的特征函数．则$(x*y)(t)=\int_0^1 y(t-s)dm(s)$，易见这时$x*y$是个连续函数．但$L(\mathbf{R})$中几乎处处相等的函数是看作为同一元的，而$\mathbb{R}$上连续函数是不会与$[0,1]$上特征函数几乎处处相等的，可见对任何$y\in L(\mathbb{R})$，当$x$为$[0,1]$上特征函数时，就不可能使$x*y=x$，因而$L(\mathbf{R})$中没有单位元．

在$L(\mathbf{R})$中虽然没有单位元，但有近似单位元．

$L(\mathbf{R})$中的网x_α如果使$x_\alpha*x\to x\ (x\in L(\mathbf{R}))$，就称做$L(\mathbf{R})$中的**近似单位元**．

近似单位元并不是一个元，而是$L(\mathbf{R})$中的网．

定理1 设$\{x_\alpha\}$是$L(\mathbf{R})$中的网，如果

(i) 对任何α及$t\in\mathbf{R}$，$x_\alpha(t)\geqslant 0$且$\|x_\alpha\|=1$；

(ii) 有实数a使对任何α，$x_\alpha(t)$在$[-a,a]$外恒为0；

(iii) 对任何 $\delta>0$ 在$[-\delta,\delta]$外 x_α 一致收敛于 0.

则$\{x_\alpha\}$是 $L(\mathbf{R})$中的近似单位元.

证　设 y 是在某有限区间外为 0 的 $\mathbf{R}$ 上连续函数.

记$\max\limits_{t\in\mathbf{R}}|y(t)|$为 c，并设 y 在区间$[b_1,b_2]$外为 0.

对 $\varepsilon>0$, 取 $1>\delta>0$, 使$|y(t-s)-y(t)|<\dfrac{\varepsilon}{2(b_2-b_1+2)}$(当 $|s|<\delta$时), 然后对这 δ, 由(iii), 可取 α_0, 使当 $\alpha_0\prec\alpha$ 时, $x_\alpha(s)<\dfrac{\varepsilon}{4c(b_2-b_1+2)\cdot 2a}$(当 $s\overline{\in}[-\delta,\delta]$时), 于是

$$\begin{aligned}\|x_\alpha*y-y\| &= \int_{\mathbf{R}}\Big|\int_{\mathbf{R}}x_\alpha(s)y(t-s)dm(s)\\&\qquad-\int_{\mathbf{R}}x_\alpha(s)y(t)dm(s)\Big|dm(t)\\&\leqslant\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}x_\alpha(s)\,|y(t-s)-y(t)|dm(s)dm(t)\\&\leqslant\int_{-\delta}^{\delta}x_\alpha(s)\int_{\mathbf{R}}|y(t-s)-y(t)|dm(t)dm(s)\\&\qquad+\int_{[-a,a]\setminus[-\delta,\delta]}x_\alpha(s)\int_{\mathbf{R}}|y(t-s)-y(t)|dm(t)dm(s)\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}x_\alpha(s)dm(s)+\frac{\varepsilon}{4c(b_2-b_1+2)\cdot 2a}2c(b_2-b_1+2)\\&<\varepsilon,\end{aligned}$$

从而 $x_\alpha*y\to y(\|\cdot\|)$.

对于任何 $z\in L(\mathbf{R})$, 对$\varepsilon>0$, 先取 y 是在某有限区间外为 0 的连续函数, 且$\|y-z\|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, 于是

$$\begin{aligned}\|x_\alpha*z-z\|&\leqslant\|x_\alpha*z-x_\alpha*y\|+\|x_\alpha*y-y\|+\|y-z\|\\&<\frac{2}{3}\varepsilon+\|x_\alpha*y-y\|.\end{aligned}$$

由上所证，有 α_0 使当 $\alpha_0 \prec \alpha$ 时，$\|x_\alpha * y - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$，这时 $\|x_\alpha * z - z\| < \varepsilon$，可见 $x_\alpha * z \to z(\|\cdot\|)$. 所以 $\{x_\alpha\}$ 是近似单位元. 证毕.

例如，令 $x_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ （$\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ 表示 $[0,\frac{1}{n}]$ 的特征函数），则 $\{x_n\}$ 是近似单位元.

例 4 记 $\mathscr{A} = \{x \mid x$ 是在 $\mathbf{C}$ 的单位闭圆上连续且在单位开圆内解析的函数$\}$. 对 $x \in \mathscr{A}$，令 $\|x\| = \max\{|x(t)| \mid |t| \leqslant 1\}$，在 $\mathscr{A}$ 中的加法，数乘和乘法都用通常的运算，则 $\mathscr{A}$ 是个有单位元的交换复 Banach 代数.

由解析函数的极大模原理，对 $x \in \mathscr{A}$，$\|x\| = \max\{|x(t)| \mid |t| = 1\}$.

例 5. 记 W 为绝对收敛的三角级数全体，即

$$W = \{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < +\infty\}.$$

W 中元也就是以 2π 为周期的连续函数，且 Fourier系数成为绝对收敛级数的这种函数全体.

在 W 中，以通常的方法规定加法，数乘和乘法. 对于 W 中元 $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$，令 $\|x\| = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$. 这时，$W$ 是个有单位元的交换 Banach代数.

易见 $(W, \|\cdot\|)$ 是个 Banach 空间，因为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \longmapsto (\cdots a_{-1}, a_0, a_1, \cdots)$$

是 $W \to l^1$ 的线性保范同构.

当 $x, y \in W$，$x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$，$y(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{int}$ 时，

$$(xy)(t)=x(t)y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{int},\ \text{其中}\ c_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k b_{n-k}.$$

由于 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|<+\infty$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|<+\infty$, 所以

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k b_{n-k}|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|,$$

这就说明乘法是W中的运算,且满足范数的不等式. 乘法与加法,数乘之间及乘法的结合律等,满足代数定义中的(i),(ii),(iii)式是显然的.

例 5 的 Banach 代数W称为 **Wiener 代数**.

对于上面的几个例子中的元的正则性,以及正则集及谱集等,有下面的一些性质.

在例 1 的 $C(\Omega)$, 例 4 的$\mathscr{A}$及例 5 的W中, 由于这些都是由函数所成的 Banach 代数, 且所用的运算都是通常的逐点的运算,单位元是恒等于 1 的函数, 因此, 当元 x 的取值在某点为 0 时, x 就不会是正则元. 从而 x 的值域中数都是 x 的谱点.

在例 1 中,当$x\in C(\Omega)$ 且 $x(t)\neq 0(t\in\Omega)$ 时,$\frac{1}{x(t)}\in C(\Omega)$, 由此, $\sigma_x=\{x(t)|t\in\Omega\}$.

在例 4 中,当 $x\in\mathscr{A}$ 且 $x(t)\neq 0(|t|\leqslant 1)$ 时, $\frac{1}{x(t)}\in\mathscr{A}$, 因而 $\sigma_x=\{x(t)||t|\leqslant 1\}$.

但在例 5 中,当 $x\in W$ 且 $x(t)\neq 0(t\in[0,2\pi])$ 时,函数$\frac{1}{x(t)}$不知道是否在W中,因而仅和$\{x(t)|t\in[0,2\pi]\}\subset\sigma_x$.

类似地,$C_r(\Omega)$中元 x 也使$\sigma_x=\{x(t)|t\in\Omega\}$.

在例 2 的 $B(R\to R)$中,元的谱不容易决定.

例 3 的 $L(\mathrm{R})$没有单位元, 因而只能在加入形式单位元后的

Banach 代数中讨论.

定义 设R是没有单位元的代数，$x\in R$，如果有$y\in R$使$x+y+yx=0$，则称x是**左拟可逆的**，y称为x的**左拟逆元**. 类似地，如果有$z\in R$使$x+z+xz=0$，则称x是**右拟可逆的**，且称z是x的**右拟逆元**.

引理 1 设R是没有单位元的代数，$x\in R$，记R加入形式单位元所成的代数为$\tilde{R}$，则y是x的左拟逆元的充分必要条件是：$(1,y)$是$(1,x)$的左逆元.

证 由$\tilde{R}$中乘法的定义(见 4.1.1. 引理 1)，

$$(1,y)(1,x)=(1,x+y+yx),$$

而$(1,0)$是$\tilde{R}$中单位元，故知y是x的左拟逆元等价于$(1,y)$是$(1,x)$的左逆元，从而x左拟可逆等价于$(1,x)$在$\tilde{R}$中左可逆. 对于右拟可逆及右逆元也有类似的结论. 证毕.

系 设R是没有单位元的代数，$x\in R$，如果x左拟可逆且右拟可逆，则x的左拟逆元及右拟元都唯一且相等.

定义 设R_1,R_2是两个代数，$T\in L(R_1\to R_2)$且$T(xy)=(Tx)(Ty)\ (x,y\in R_1)$，则称$T$是$R_1\to R_2$的**代数同态**. 如果$T$是$R_1\to R_2$的代数同态且是双射，则称$T$是$R_1\to R_2$的**代数同构**.

显然，如果T是$R_1\to R_2$的代数同构，且R_1有单位元e，则Te是R_2的单位元.

定理 2 设R_1,R_2是两个代数，R_1有单位元，T是$R_1\to R_2$的代数同构(这时R_2有单位元)，则对于$x\in R_1$，$\sigma_x=\sigma_{Tx}$.

证 当$x\in R_1$是正则元时，由$T(x^{-1}x)=T(x^{-1})Tx$可知$Tx^{-1}Tx=e$(R_2中单位元，也记为e)，同样$TxTx^{-1}=e$，故Tx是R_2中正则元. 由此当$\lambda\in\rho_x$时，$T(\lambda e-x)=\lambda e-Tx$也正则，即$\rho_x\subset\rho_{Tx}$，由$T^{-1}$也是代数同构，即知$\rho_x=\rho_{Tx}$，从而$\sigma_x=\sigma_{Tx}$.

例 6 记 $\mathbf{T}$ 为$\{\lambda\,|\,\lambda\in\mathbb{C},\ |\lambda|=1\}$(即$\mathbb{C}$中的单位圆周).

令 $T:\mathscr{A}\to C(\mathbb{T}):x\longmapsto x|_{\mathbb{T}}$，即把 $\mathscr{A}$ 中元 x 变为 x 在 $\mathbb{T}$ 上的限制. 易见 T 是 $\mathscr{A}\to C(\mathbb{T})$ 的代数同态，而且 T 保持范数. 所以 T 是一对一的，又 $Te=e$($\mathscr{A}$ 及 $C(\mathbb{T})$ 中单位元都记为 e). 于是 $T(\mathscr{A})$ 是 $C(\mathbb{T})$ 的Banach 子代数，且 $e\in T(\mathscr{A})$，

$$T(\mathscr{A})=\{y\mid y\in C(\mathbb{T}),\,y\text{ 可延拓成}\mathscr{A}\text{中元}\}.$$

这样，T 是 $\mathscr{A}\to T(\mathscr{A})$ 的代数同构. 对于 $x\in\mathscr{A}$，记 Tx 为 x_1，由定理 2，$\sigma_{x_1}(T(\mathscr{A}))=\sigma_x(\mathscr{A})=\{x(t)\mid |t|\leqslant 1\}$，而

$$\sigma_{x_1}(C(\mathbb{T}))=\{x_1(t)\mid t\in\mathbb{T}\}=\{x(t)\mid t\in\mathbb{T}\}.$$

例如取 $x(t)=t\ (|t|\leqslant 1)$，可见 x_1 作为 $T(\mathscr{A})$ 中元，谱等于 $\mathbb{C}$ 的单位闭圆，而 x_1 作为 $C(\mathbb{T})$ 中元，谱等于 $\mathbb{T}$ 即 $\mathbb{C}$ 的单位圆周. 以 $C(\mathbb{T})$ 作为 R，以 $T(\mathscr{A})$ 作为 R_0. 这就说 R_0 中的元的谱 $\sigma_x(R_0)$ 与 $\sigma_x(R)$ 是可以不相同的.

§4.2　Гельфанд 表示，交换 Banach 代数

对于赋范线性空间或局部凸空间，线性连续泛函的研究起着重要的作用. 在 Banach 代数中，起重要作用的是保持乘法的线性泛函. 对于交换的Banach 代数，这样的泛函是比较多的. 在赋范线性空间中，元素可以看成共轭空间上的函数(嵌入映射)，在 Banach 代数中的元素也可以看成为函数. 在这节中还讨论几个具体空间上线性可乘泛函的一般形式.

4.2.1　线性可乘泛函

先证明两个逼近性质的定理.

定理 1　设 (Ω,τ) 是紧 Hausdorff 空间，$C_r(\Omega)$ 是 Ω 上实值连续函数全体所成的实 Banach 代数，A 是 $C_r(\Omega)$ 的子集，且当 $x,y\in A$ 时，$\max(x,y)$，$\min(x,y)$ 都属于 A，如果元 $z_0\in C(\Omega)$ 使得

对任何 $t,s\in\Omega$，有 $x\in A$ 使 $x(t)=z_0(t)$，$x(s)=z_0(s)$，则 $z_0\in\bar{A}$（A 的范数拓扑的闭包）.

证 任意取定一个 $t_0\in\Omega$，由假设，对任何 $s\in\Omega$（s 可以等于 t_0）有 A 中的元 x_s，使得 $x_s(t_0)=z_0(t_0)$，$x_s(s)=z_0(s)$. 因而，对 $\varepsilon>0$，有 s 的邻域 $O(s)$ 使当 $s_1\in O(s)$ 时，$|z_0(s_1)-x_s(s_1)|<\varepsilon$. 这样，对每个 $s\in\Omega$ 得到了 $x_s\in A$ 及 $O(s)$ 有上述性质. 由于 $\{O(s)|s\in\Omega\}$ 覆盖 Ω 及 Ω 是紧的，从而有有限个 $s_1,\cdots,s_n$ 及相应的 $x_{s_1},\cdots,x_{s_n}$，使得 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}O(s_k)=\Omega$，且在 $O(s_k)$ 中，$|x_{s_k}-z_0|<\varepsilon$. 令 $y=\max(x_{s_1},\cdots,x_{s_n})$，则 $y\in A$，且 $y(t_0)=z_0(t_0)$，$y(t)>z_0(t)-\varepsilon\,(t\in\Omega)$.

由此，对于 $t_0\in\Omega$，有 A 中的元 y（y 与 t_0 有关，记为 y_{t_0}），使 $y_{t_0}(t_0)=z_0(t_0)$ 且 $y_{t_0}(t)>z_0(t)-\varepsilon\,(t\in\Omega)$. 从而又有 t_0 的邻域 $V(t_0)$，使得在 $V(t_0)$ 中，$|y_{t_0}-z_0|<\varepsilon$. 于是，对每个 $t_0\in\Omega$，得到 y_{t_0} 及 $V(t_0)$ 有上述关系. 同样 $\{V(t_0)|t_0\in\Omega\}$ 覆盖 Ω，所以有有限个元 $t_1,t_2,\cdots,t_l$ 及相应的 $y_{t_1},\cdots,y_{t_l}$，使 $\bigcup\limits_{j=1}^{l}V(t_j)=\Omega$. 令 $z=\min(y_{t_1},\cdots,y_{t_l})$，则 $z\in A$，且

$$z_0(t)-\varepsilon<z(t)<z_0(t)+\varepsilon\quad(t\in\Omega),$$

从而 $\|z_0-z\|<\varepsilon$. 所以对 $\varepsilon>0$，有 A 中元 z 使 $\|z_0-z\|<\varepsilon$，即 $z_0\in\bar{A}$. 证毕.

定理 2 (Stone-Weierstrass) 设 Ω 是紧 Hausdorff 空间，$C_r(\Omega)$ 是 Ω 上实值连续函数全体所成的 Banach 代数，A 是 $C_r(\Omega)$ 的子代数，如果 (i) 对任何 $t\in\Omega$，有 $x\in A$ 使 $x(t)\neq0$，(ii) 对任何两个 Ω 中不同的元 t,s，有 $y\in A$ 使 $y(t)\neq y(s)$，则 $\bar{A}=C_r(\Omega)$，即 A 在 $(C_r(\Omega),\|\cdot\|)$ 中稠密.

证 记 $A_1=\bar{A}$，先证 A_1 是 $C_r(\Omega)$ 的 Banach 子代数：A_1 显然是线性子空间. 当 $x_0,y_0\in A_1$ 时，有 A 中点列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 使 $\|x_n-x_0\|\to$

0, $\|y_n-y_0\|\to 0$, 从而($\{x_n\}$是有界点列)

$$\|x_ny_n-x_0y_0\|\leqslant\|x_ny_n-x_ny_0\|+\|x_ny_0-x_0y_0\|$$

$$\leqslant\|x_n\|\|y_n-y_0\|+\|x_n-x_0\|\|y_0\|\to 0,$$

由 $x_ny_n\in A$, 即知 $x_0y_0\in A_1$. 所以 A_1 是$C_r(\Omega)$的 Banach 子代数.

当 $x\in A_1$ 时, 记$\|x\|=a$, 对 $\varepsilon>0$, 同经典的 Weierstrass 定理,有实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 使得

$$||t|-(a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n)|<\varepsilon \quad (t\in[-a,a]\text{时}),$$

从而$||x(s)|-(a_1x(s)+\cdots+a_nx^n(s)|<\varepsilon(s\in\Omega)$, 即$\||x|-(a_1x+\cdots+a_nx^n)\|<\varepsilon$, 其中$|x|$代表函数$|x(s)|$. 因而当 $x\in A_1$ 时, $|x|\in\overline{A}_1=A_1$, 由此, 对任何 x, $y\in A_1$, $\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|y-x|)$及 $\min(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-|y-x|)$ 都在 A_1 中, 即 A_1 对于 max 和min 封闭.

对于Ω中不同的元 t, s, 由条件(i), (ii)可知, 有 A 中的x_1, x_2, x_3 使得 $x_1(t)=1$, $x_2(s)=1$, $x_3(t)\neq x_3(s)$, 这时 $x_3(t)$ 及$x_3(s)$中有一个不是 0, 不妨设 $x_3(t)=1$, 这时$x_3(s)\neq 1$. 如果$x_3(s)=0$, 取 x_2 与 x_3 的线性组合; 如果$x_3(s)\neq 0$ 取 x_3 与x_3^2 的线性组合, 总可得到 A 中的元 z 使得 $z(t)=a$, $z(s)=b$(这里a, b 是任意的实数). 由此, 由定理 1, 任何$C_r(\Omega)$的元z_0都在 $\overline{A}_1=A_1$ 中, 即 $A_1=C_r(\Omega)$. 证毕.

系 设 Ω 是紧 Hausdorff 空间, A 是 $C(\Omega)$的子代数, 如果(i)对任何 $t\in\Omega$ 有 $x\in A$ 使 $x(t)\neq 0$; (ii) 对任何 Ω 中两个不同的 t, s, 有 $y\in A$ 使 $y(t)\neq y(s)$; (iii) 当 $x\in A$ 时$\overline{x}\in A$(其中 $\overline{x}$ 表示函数$\overline{x}(t)=\overline{x(t)}$), 则$\overline{A}=C(\Omega)$.

证 记 A 中的实值函数全体为 B, 这时 $\overline{B}=C_r(\Omega)$, 从而 $\overline{A}=C(\Omega)$. 证毕.

定义 设R是代数，$R\to\mathbf{K}$的代数同态称为R上的**线性可乘泛函或线性乘性泛函**.

引理 1 设R是 Banach 代数，f是R上线性可乘泛函则$f\in(R,\|\cdot\|)^*$，且$\|f\|\leqslant 1$.

证 设$x\in R$，$\|x\|<1$，记$y=x+x^2+x^3+\cdots$易见$xy+x=y$，故$f(y)=f(x)+f(x)f(y)$，从而$f(x)\neq 1$，因此可知f是连续的. 由于$\{x|\|x\|<1\}$是均衡的，故$|f(x)|<1$，所以$\|f\|\leqslant 1$. 证毕.

引理 2 设R是有单位元的 Banach 代数，f是R上的线性可乘泛函且$f\neq 0$(即f不是零泛函)，则对$x\in R$，$f(x)\in\sigma_x$.

证 当f是非零线性可乘泛函时，由$f(x)=f(ex)=f(e)f(x)$，故$f(e)=1$，从而当x是正则元时，$f(x)f(x^{-1})=f(e)=1$，所以$f(x)\neq 0$. 于是对$x\in R$，记$f(x)=\lambda$，则$f(\lambda e-x)=0$，所以$\lambda e-x$不正则，即$\lambda\in\sigma_x$，因此对$x\in R$，$f(x)\in\sigma_x$. 证毕.

当R是代数时，记R上非零线性可乘泛函全体为$\mathscr{M}$.

代数上不一定有非零的线性可乘泛函，即$\mathscr{M}$可能是空集，甚至对于有单位元的复 Banach 代数，$\mathscr{M}$也可能是$\varnothing$，下面是在$\mathscr{M}$非空的情况下讨论的.

定理 3 设R是 Banach 代数，则$\mathscr{M}$是$(R^*,\sigma(R^*,R))$中的紧集.

证 由引理 1，$\mathscr{M}\subset\{f|f\in R^*,\|f\|\leqslant 1\}$，由于$R^*$的单位闭球是$(R^*,\sigma(R^*,R))$中紧集，所以只要证明$\mathscr{M}$是$(R^*,\sigma(R^*R))$中的闭集. 设$\{f_\alpha\}$是$\mathscr{M}$中的网且$f_\alpha\to f(\sigma(R^*,R))$，对于$x,y\in R$，由$f_\alpha(x)\to f(x)$，$f_\alpha(y)\to f(y)$，$f_\alpha(xy)\to f(xy)$及$f_\alpha(xy)=f_\alpha(x)f_\alpha(y)$，易知$f(xy)=f(x)f(y)$，故$f\in\mathscr{M}$. 所以$\mathscr{M}$是$\sigma(R^*,R)$闭集，从而是$\sigma(R^*,R)$紧集. 证毕.

4.2.2 Гельфанд 表示

定义 设R是 Banach 代数，$x\in R$，令 $\hat{x}:\mathscr{M}\to\mathbf{K}:f\longmapsto f(x)$，称$\hat{x}$为$x$的 **Гельфанд 变换**，并称 $\Gamma:R\to C(\mathscr{M}):x\longmapsto\hat{x}$ 为 R 的 **Гельфанд 表示**.

$\hat{x}$实际上就是$\theta(x)$，只是把它限制在$\mathscr{M}$上. $\mathscr{M}$的拓扑总用$\sigma(R^*,R)$的诱导拓扑，$\hat{x}$是$\mathscr{M}$上的连续函数，而$\mathscr{M}$是个紧Hausdorff空间. 而$C(\mathscr{M})$本身是个 Banach 代数.

定理 1 设R具有单位元的 Banach 代数，则R的 Гельфанд 表示Γ是$R\to C(\mathscr{M})$的代数同态，且

(i) $\Gamma e=e$(右边的e是$C(\mathscr{M})$的单位元)；

(ii) $\|\Gamma x\|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$；

(iii) $\|\Gamma\|=1$.

证 由Γ的定义即知Γ是$R\to C(\mathscr{M})$的代数同态. 又对于$f\in\mathscr{M}$，$f(e)=1$，故$\hat{e}$是恒等于 1 的函数，所以$\Gamma e=\hat{e}(=C(\mathscr{M})$中的单位元). 由引理 2，$f(x)\in\sigma_x(f\in\mathscr{M},\ x\in R)$，而在有单位元的 Banach 代数中，对于元$x$，当$|\lambda|>\lim\sqrt[n]{\|x^n\|}$时$\lambda\in\rho_x$，所以$\|\Gamma x\|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$. 由此$\|\Gamma x\|\leqslant\|x\|(x\in R)$，即$\|\Gamma\|\leqslant 1$. 再因为$\|\Gamma e\|=1$，故$\|\Gamma\|=1$. 证毕.

在R是有单位元的实 Banach 代数时，元素的谱可能是空集. 例如二阶实矩阵全体. 当R是有单位元的复 Banach 代数时，虽然任何元x的谱σ_x非空，但$\mathscr{M}$仍然可能是空集，例如当$n>1$时，n阶复矩阵全体所成的代数上，没有非零的线性可乘泛函(把矩阵看成n维空间中的算子，并以相应的算子范数作为矩阵的范数，就成为 Banach 代数). 下面证明一个较一般的结论.

定理 2 设H是维数大于 1 的复 Hilbert 空间，则$B(H\to H)$

上不存在非零的线性可乘泛函.

证　为简单起见，在 H 是可分空间的情况来证明.

如果 H 是无限维的，这时可取 H 的就范正交基 $\{x_n\}$. 记 $\{x_{2k+1}|k=0,1,2,\cdots\}$ 张成的闭子空间上的投影算子为 P_1，又记 $\{x_{2k}|k=1,2,\cdots\}$ 张成的闭子空间上的投影算子为 P_2，由于 $P_1^2=P_1$，如果有 $f\in\mathscr{M}$，则 $f(P_1)^2=f(P_1)$，因而 $f(P_1)$ 等于 0 或 1. 同样 $f(P_2)$ 等于 0 或 1. 又因 $f(P_1)+f(P_2)=f(I)=1$，所以 $f(P_1)$，$f(P_2)$ 中一个是 0，一个是 1. 令 $T:H\to H:x_k\longmapsto y_k$，其中 y_k 当 k 是偶数时为 0，k 为奇数时 $y_k=x_{k+1}$. 这样的 T 可延拓成 $B(H\to H)$ 中的元，仍记为 T. 又设 $S\in B(H\to H)$，$Sx_{2k+1}=0$ $(k=0,1,2,\cdots)$，$Sx_{2k}=x_{2k-1}(k=1,2,\cdots)$，易见 $ST=P_1$，$TS=P_2$，因而 $f(P_1)=f(S)f(T)=f(T)f(S)=f(TS)=f(P_2)$，矛盾. 所以不可能有 $f\in\mathscr{M}$，即 $\mathscr{M}$ 是空集.

当 H 是有限维时，设 H 的维数为 $n(n>1)$. 取 H 中就范正交基 $x_1,\cdots x_n$，并记 $\{x_k\}$ 张成的一维空间上投影为 P_k. 同理 $f(P_k)$ 等于 0 或 1，而 $f(P_1)+\cdots+f(P_n)=1$，故其中有一个是 1 其余是 0，不妨设 $f(P_1)=1$. 类似地令 $T:H\to H:\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k\longmapsto a_1x_2$，$S:H\to H:\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k\longmapsto a_2x_1$，就有 $ST=P_1$，$TS=P_2$，从而 $f(P_1)=f(P_2)$，矛盾. 证毕.

4.2.3　理想，极大理想

定义　设 R 是代数，$M\subset R$，如果 M 是 R 的线性子空间，且当 $x\in M$，$y\in R$ 时 $yx\in M$，则称 M 是 R 的**左理想**. 类似地定义 R 的**右理想**. 如果 M 既是 R 的左理想又是 R 的右理想，就称 M 是 R 的**双侧理想**，双侧理想也简称为理想. 如果 M 是 R 的左理想，$M\neq R$，而且

当R的左理想M_1使$M\subset M_1\neq R$时必定$M=M_1$，则称M是R的**极大左理想**. 类似地定义**极大右理想**和**极大双侧理想**. R及$\{0\}$这两个理想称为平凡的.

引理1 设R是有单位元的代数，$f\in\mathscr{M}$，则f的零空间M是R的双侧理想且R/M是一维空间. 反之，如果M是R的双侧理想M使R/M是一维空间，则有唯一的$f\in\mathscr{M}$以M为零空间.

证 当$f\in\mathscr{M}$时，f的零空间M使R/M是一维空间. 又因f是可乘的，当$x\in M$时，对任何$y\in R$，$f(yx)=f(y)f(x)=0=f(xy)$，所以xy，yx都在M中，从而M是双侧理想.

反过来，如果M是R的左理想且R/M是一维空间时，由于$M\neq R$，M是左理想，所以$e\overline{\in}M$. 对于$x\in R$，x可唯一地写成$x=\lambda e+x_1$ $(x_1\in M)$，这时令$f(x)=\lambda$. 这样作出的f是以M为零空间的R上线性泛函. 当$x=\lambda e+x_1$，$y=\mu e+y_1$时$(x_1,\ y_1\in M)$，$xy=\lambda\mu e+\lambda y_1+\mu x_1+x_1y_1$，所以由$\lambda y_1+\mu x_1+x_1y_1\in M$，可知$f(xy)=\lambda\mu=f(x)f(y)$，即$f$是可乘的，所以$f\in\mathscr{M}$. 由于$\mathscr{M}$中元在$e$上取值为1，故以$M$为零空间的$f\in\mathscr{M}$只有一个. 证毕.

在后半部分证明中，只用M是左理想，同样如果M是右理想也可. 实际上，引理说明：R的余维数为1的左理想（或右理想）必是双侧理想，且是极大的.

定理1 设R是有单位元的代数，那么

(i) 如$x\in R$，x不是左可逆的，则$\{yx|y\in R\}$是R的左理想，且它不等于R，含有元x.

(ii) 如果M_0是R的左理想且$M_0\neq R$，则有R的极大左理想$M\supset M_0$.

(iii) 如果M是R的双侧理想且$M\neq R$，则在R/M中，规定乘法运算为$\tilde{x}\tilde{y}=\widetilde{xy}$（即$(x+M)(y+M)=xy+M$）时，$R/M$是有单位元的代数，且$\tilde{e}(=e+M)$是$R/M$中单位元.

(iv) 如果M是R的双侧理想且M是R的极大左理想时，R/M（这是代数）没有非平凡的左理想。

证 (i) 直接验证即知。

(ii) 在包含M_0而不等于R的左理想全体中，用$\subset$作半序，由 Zorn 引理即知有极大元M，M就是包含M_0的极大左理想。

(iii) 当M是R的双侧理想且$M\neq R$时，用$\widetilde{xy}$作为$\tilde{x}\tilde{y}$是有确定意义的，因为当$\tilde{x}_1=\tilde{x}$，$\tilde{y}_1=\tilde{y}$时，即$x-x_1\in M$，$y-y_1\in M$，由M是双侧理想，$xy-x_1y_1=xy-x_1y+x_1y-x_1y_1=(x-x_1)y+x_1(y-y_1)\in M$，因而$\widetilde{xy}=\widetilde{x_1y_1}$。易见这时$R/M$成为代数且$\tilde{e}$是$R/M$中的单位元。这里$M\neq R$的条件用于$\tilde{e}\neq\tilde{0}$，（否则$R/M$只有零元，$\tilde{e}$不认为是单位元）。

(iv) 由(iii)可知当M是双侧理想且是极大左理想时，R/M是有单位元的代数，而商映射$Q:R\to R/M$是$R\to R/M$的代数同态。如果A是R/M的左理想，易知$Q^{-1}(A)$是R的左理想。假如A是非平凡的，那么$Q^{-1}(A)$非平凡，$Q^{-1}(A)\supset M$但不等于M，从而与M是R的极大左理想矛盾。证毕。

在定理 1 的(iii)中，如R是交换的，R/M也是交换的。

下面是关于线性可乘泛函的基本结论，其中有些事情在前面已经证过，为完整起见而写在一起。

定理 2 设R是有单位元的复交换 Banach 代数，则

(i) $\mathscr{M}$非空；

(ii) 对于$x\in R$及$\lambda\in\sigma_x$，有$f\in\mathscr{M}$使$f(x)=\lambda$；

(iii) Гельфанд 表示$\Gamma:R\to C(\mathscr{M})$是代数同态；

(iv) 对$x\in R$，$\{\hat{x}(f)\mid f\in\mathscr{M}\}=\sigma_x$；

(v) 对$x\in R$，$\|\Gamma x\|=r(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$；

(vi) $\|\Gamma\|=1$。

证 定理 2 是在上述条件下把前面的结论综合而成的。在交

换的条件下，左可逆与正则，左理想与双侧理想等都成了相同的概念.

对于 $x\in R$, σ_x 非空(4.1.2 定理 2)，对任何 $\lambda\in\sigma_x$, $\lambda e-x$ 不正则，由定理 1，有 R 的极大理想 M 使 $\lambda e-x\in M$. 而 R/M 是有单位元的交换代数.

由于 M 是理想，易见 $\overline{M}$(M 的范数闭包)仍是理想. 由于 $M\neq R$, M 中不会有正则元，所以 $O(e;1)=\{x\mid x\in R, \|e-x\|<1\}$ 与 M 不交，从而 $e\bar{\in}\overline{M}$. 可见 $\overline{M}\neq R$, 由 M 的极大性, $\overline{M}=M$.

在 R/M 中，令 $\|\tilde{x}\|=\inf\{\|y\|\mid y\in\tilde{x}\}$, 则 R/M 是个 Banach 空间，而如果 $\|\tilde{x}\|=a$, $\|\tilde{y}\|=b$, 对 $\varepsilon>0$ 有 $x_1\in\tilde{x}$, $y_1\in\tilde{y}$ 使 $\|x_1\|<a+\varepsilon$, $\|y_1\|<b+\varepsilon$, 由 $x_1y_1\in\widetilde{xy}$,

$$\|\widetilde{xy}\|\leqslant\|x_1y_1\|\leqslant\|x_1\|\cdot\|y_1\|\leqslant(a+\varepsilon)(b+\varepsilon),$$

因 ε 是任意正数, $\|\widetilde{xy}\|\leqslant\|\tilde{x}\|\cdot\|\tilde{y}\|$, 因而 $(R/M, \|\cdot\|)$ 是有单位元的复交换 Banach 代数.

由于 R/M 中没有非平凡理想，由定理 1 的(i)又知，在 R/M 中非零元必定正则. 由 Гельфанд-Мазур 定理，R/M 是一维的，从而由引理 1，有 $f\in\mathscr{M}$ 以 M 为零空间，即知 $f(\lambda e-x)=0$, 所以 $f(x)=\lambda$. 由此证明了(ii)，当然也证明了(i).

其余各点都是明显的. 证毕.

注意，$\mathscr{M}$ 的拓扑是 $(R^*, \sigma(R^*, R))$ 的诱导拓扑.

由于任意一族 Banach 子代数的交是 Banach 子代数，因而对于 Banach 代数 R 的子集 A, 有包含 A 的最小 Banach 子代数，称为由 A **张成的 Banach 子代数**. A 张成的 Banach 子代数就是 A 张成的子代数的闭包.

定义　设 R 是有单位元的复 Banach 代数, $A\subset R$, 记 $A_1=A\cup\{e\}$, 又记 $A_2=\{(\lambda e-x)^{-1}\mid x\in A_1, \lambda\in\rho_x\}$, 如果 $A_1\cup A_2$ 张成的 Banach 子代数等于 R, 则称 A 是 R 的**母元组**. 如果 $\{x\}$ 是 R 的母

元组，则称 x 是 R 的母元.

在有的书上，以 $A\cup\{e\}$ 张成的 Banach 子代数等于 R 作为 A 是母元组的定义. 我们上面的定义要求比较低.

引理 2 设 R 是有单位元的 Banach 代数，$f_1,f_2\in\mathscr{M}$，则 $\{x|x\in R,f_1(x)=f_2(x)\}$ 是 R 的含有 e 的 Banach 子代数，且它对于求逆运算封闭.

证 记 $R_0=\{x|x\in R,f_1(x)=f_2(x)\}$，易见 R_0 是 R 的子代数，且因 $f_1,f_2\in R^*$，即知 R_0 是闭的. 当 $x\in R_0$ 且 x 是 R 中正则元时，由 $f_1(x)=f_2(x)$ 可知 $f_1(x^{-1})=f_2(x^{-1})$，因而 $x^{-1}\in R_0$，证毕.

系 如果 R 是有单位元的复 Banach 代数，$x\in R$ 是 R 的母元，则当 $f_1,f_2\in\mathscr{M}$ 使 $f_1(x)=f_2(x)$ 时，$f_1=f_2$.

同样，如果 A 是 R 的母元组，则当 f_1，$f_2\in\mathscr{M}$，$f_1(x)=f_2(x)$ $(x\in A)$ 时，就必定 $f_1=f_2$.

定理 3 设 R 是有单位元的复交换 Banach 代数，$x\in R$，如果当 f_1，$f_2\in\mathscr{M}$ 使 $f_1(x)=f_2(x)$ 时必定 $f_1=f_2$，则 $\mathscr{M}$ 到 σ_x 的映射：$f\longmapsto f(x)$ 是 $\mathscr{M}\to\sigma_x$ 的同胚.

证 所作的映射即为 $\hat{x}$. 由定理 2 的(iv)，$\hat{x}$ 是 $\mathscr{M}\to\sigma_x$ 的满射，$\hat{x}$ 是连续的. 在假设条件下 $\hat{x}$ 是一对一的，所以 $\hat{x}$ 是 $\mathscr{M}\to\sigma_x$ 的连续双射. 由于 $\mathscr{M}$ 及 σ_x 是紧 Hausdorff 空间，所以 $\hat{x}$ 是 $\mathscr{M}\to\sigma_x$ 的同胚. 证毕.

系 1 设 R 是有单位元的复交换 Banach 代数，x 是 R 的母元，则 $\hat{x}$ 是 $\mathscr{M}\to\sigma_x$ 的同胚.

系 2 设 R 是有单位元的复交换 Banach 代数，$\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是 R 的母元组，则映射：$f\longmapsto(\hat{x}_1(f),\cdots,\hat{x}_n(f))$ $(f\in\mathscr{M})$ 是 $\mathscr{M}\to\{(\hat{x}_1(f),\cdots,\hat{x}_n(f))|f\in\mathscr{M}\}$ 的同胚.

证 $\{(\hat{x}_1(f),\cdots,\hat{x}_n(f))|f\in\mathscr{M}\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的子集. 其中拓扑是 $\mathbf{C}^n$ 的通常拓扑的诱导拓扑. 由假设 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是 R 的母元组，所以这

映射是单射. 又它显然是连续映射. 由于 $\mathbf{C}^n$ 是 Hausdorff 空间,所以映射 $f\longmapsto(\hat{x}_1(f),\cdots,\hat{x}_n(f))$ 是同胚. 证毕.

4.2.4　几个 Banach 代数上线性可乘泛函的形式

在 Banach 空间中，可以对于一些具体的空间求出它的共轭空间即线性连续泛函的一般形式. 同样对于 Banach 代数，要讨论某些具体情况下线性可乘泛函的一般形式，并说明$\mathscr{M}$的拓扑是怎样的. 由 4.2.3 定理 3 的系 1，当 R 是有母元的有单位元的复 Banach 代数时,$\mathscr{M}$的情况最简单.

例 1　Wiener 代数 W　这是有单位元的复交换 Banach 代数. 由于 W 是函数所成的代数，且 W 中的代数运算是通常的函数运算,因此对任何一个实数 t，$x\longmapsto x(t)(x\in W)$ 是 W 上的线性可乘泛函,记这泛函为 f_t.

设 x_1 是函数 $x_1(t)=e^{it}$,易见 $x_1\in W$,且 x_1 是 W 中正则元,x_1^{-1} 是函数 $y_1(t)=e^{-it}$. 容易看到 $\{x_1,y_1\}$ 张成的闭子代数是 W,因此 x_1 是 W 的母元. 下面讨论 σ_{x_1}.

由于 $\|x_1\|=1$，所以 σ_{x_1} 在 $\mathbf{C}$ 的闭单位圆内. 又当 $\lambda\in\sigma_{x_1}$ 时，有 $f\in\mathscr{M}$ 使 $f(x_1)=\lambda$，从而 $f(y_1)=\dfrac{1}{\lambda}$，所以 $\dfrac{1}{\lambda}\in\sigma_{y_1}$. 同样因为 $\|y_1\|=1,\sigma_{y_1}$ 在 $\mathbf{C}$ 的闭单位圆内. 可见 $\mathbf{C}$ 的开单位圆中不会有 x_1 的谱点. 由此,σ_{x_1} 中数都在 $\mathbf{C}$ 的单位圆周 $\mathbf{T}$ 上，即 $\sigma_{x_1}\subset\mathbf{T}$. 但 $\{x_1(t)\mid t\in\mathbf{R}\}=\mathbf{T}$，故 $\sigma_{x_1}=\mathbf{T}$. 由此,$\mathscr{M}$与 $\mathbf{T}$ 是同胚的,因而$\mathscr{M}=\{f_t\mid t\in\mathbf{R}\}$. 但对于相差为 2π 的两实数 $t_1,t_2,f_{t_1}=f_{t_2}$,所以$\mathscr{M}=\{f_t\mid t\in[0,2\pi)\}$，但从拓扑来说,$f_t\longmapsto f_t(x_1)(=e^{it})$ 是$\mathscr{M}\to\mathbf{T}$ 的同胚.

从而对任何 $x\in W$，$\sigma_x=\{f(x)\mid f\in\mathscr{M}\}=\{x(t)\mid t\in[0,2\pi)\}$.

定理 1　(Wiener)　设 $x(t)$ 是绝对收敛的三角级数 (即 x 是

$[0,\ 2\pi]$ 上以 2π 为周期的连续函数，且 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{2\pi} x(t)e^{int}dt\right|<+\infty$，周期指 $x(0)=x(2\pi)$)，并且 $x(t)\neq 0$ $(t\in[0,2\pi])$，则 $y(t)=\dfrac{1}{x(t)}$ 也是绝对收敛的三角级数。

证 由于 $x\in W$，且 $0\overline{\in}\{x(t)\mid t\in[0,2\pi]\}=\sigma_x$，所以 x 是 W 中正则元，x^{-1} 显然是函数 $y(t)=\dfrac{1}{x(t)}$，由 $y\in W$ 即得。证毕。

例 2 $\mathscr{A}$(4.1.4 中的例 4) $\mathscr{A}$ 是有单位元的复交换 Banach 代数。同样因为 $\mathscr{A}$ 中代数运算是函数的通常运算，故对于 $t\in\mathbf{C}$，$|t|\leqslant 1$，$f_t: x\longmapsto x(t)$ $(x\in\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{M}$ 中的元。

设 $x_1\in\mathscr{A}$ 是函数 $x_1(t)=t$ $(t\in\mathbf{C},\ |t|\leqslant 1)$。下面证明 x_1 是 $\mathscr{A}$ 的母元。

设 $x\in\mathscr{A}$，由于 x 在单位开圆中解析，所以有展开式

$$x(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n+\cdots\quad(|t|<1).$$

对任给的 $\varepsilon>0$，由 x 在 $|t|\leqslant 1$ 上连续，所以由一致连续性，有 $\delta>0$，使当 $|t|\leqslant 1$，$|s|\leqslant 1$ 且 $|t-s|\leqslant\delta$ 时，$|x(t)-x(s)|<\varepsilon$。记 $r_0=1-\delta$，于是当 $t\in\mathbf{T}$(即 $|t|=1$)时，$|x(t)-x(r_0t)|<\varepsilon$。

又由 x 的幂级数展开式在 $|t|\leqslant r_0$ 范围中的绝对一致收敛性，对所给的 $\varepsilon>0$，有 N，使得

$$|x(t)-(a_0+a_1t+\cdots+a_Nt^N)|<\varepsilon\quad(\text{当 } |t|\leqslant r_0 \text{ 时}),$$

所以，当 $t\in\mathbf{T}$ 时，

$$|x(r_0t)-(a_0+a_1r_0t+a_2r_0^2t^2+\cdots+a_Nr_0^Nt^N)|<\varepsilon,$$

$$|x(t)-(a_0+a_1r_0t+\cdots+a_Nr_0^Nt^N)|<2\varepsilon\quad(t\in\mathbf{T}),$$

由此 $\|x-(a_0e+a_1r_0x_1+\cdots+a_Nr_0^Nx_1^N)\|<2\varepsilon$。这样，$\{e,x_1\}$ 张成的闭子代数等于 $\mathscr{A}$，所以 x_1 是 $\mathscr{A}$ 的母元。由于 $\|x_1\|=1$，并因 $\{x_1(t)\mid |t|\leqslant 1\}$ 等于 $\mathbf{C}$ 的闭单位圆，所以 σ_{x_1} 等于 $\mathbf{C}$ 的闭单位圆，由此，

$\mathscr{M}=\{f_t \mid |t|\leqslant 1\}$ 且 $f_x \longmapsto t$ 是$\mathscr{M}$到 σ_{x_1} 的同胚映射.

例 3 $C(\Omega)$ （见 4.1.4 例 1，Ω 是紧 Hausdorff 空间） 同样，$C(\Omega)$ 是有单位元的复交换 Banach 代数，对于 $t\in\Omega$，令 $f_t(x)=x(t)(x\in C(\Omega))$，则 $f_t\in\mathscr{M}$.

引理 1 设 M 是 $C(\Omega)$ 的理想且 $M\neq C(\Omega)$，则有 $t_0\in\Omega$ 使得对任何 $x\in M$，$x(t_0)=0$.

证 用反证法，如果这样的 t_0 不存在，则对每个 $t\in\Omega$，有 M 中元 x_t 使得 $x_t(t)\neq 0$，由于 M 是理想，故 $x_t\bar{x}_t\in M$. 记 $x_t\bar{x}_t$ 为 y_t 则 $y_t\geqslant 0$，$y_t(t)>0$. 于是对每个 $t\in\Omega$，有 M 中非负函数 y_t 使 $y_t(t)>0$，这样，有 t 的邻域 $V(t)$：y_t 在 $V(t)$ 上取值都大于 0. 因 $\{V(t)\mid t\in\Omega\}$ 覆盖 Ω，由 Ω 的紧性，有有限个 Ω 中元 $t_1,\cdots,t_n$ 及相应的 $y_{t_1},\cdots,y_{t_n}$，使得 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}V(t_k)=\Omega$，而 y_{t_k} 在 $V(t_k)$ 上大于 0. 记 $y=\sum\limits_{k=1}^{n}y_{t_k}$，则 $y\in M$，且 y 在 Ω 上点点大于 0，于是 y 是 $C(\Omega)$ 中正则元，这与 $M\neq C(\Omega)$ 矛盾，所以有 $t_0\in\Omega$ 使 $x(t_0)=0(x\in M)$. 证毕.

定理 2 设 M 是 $C(\Omega)$ 中的极大理想，则有 $t_0\in\Omega$ 使得

$$M=\{x\mid x\in C(\Omega),x(t_0)=0\}$$

证 由引理 1 有 $x_0\in\Omega$ 使得对 $x\in M$，都有 $x(t_0)=0$，而 $\{x\mid x\in C(\Omega),x(t_0)=0\}$ 是 $C(\Omega)$ 中理想，它包含 M，由 M 的极大性，故成立等式. 证毕.

对于 $t\in\Omega$，记 $\{x\mid x\in C(\Omega),x(t)=0\}$ 为 M_t，M_t 是 $C(\Omega)$ 的极大理想（实际上，M_t 就是 f_t 的零空间）. 由定理 2，每个极大理想都是这种形式的，所以如 $f\in\mathscr{M}$，f 的零空间为 M，有 $t\in\Omega$ 使 $M=M_t$，从而 $f_t=f$，因此 $\mathscr{M}=\{f_t\mid t\in\Omega\}$.

当 $t,s\in\Omega$，$t\neq s$ 时，由 Урысон 引理 （3.1.3 定理 3)，有 $x\in$

$C(\Omega)$使 $x(t)\neq x(s)$，故 $f_t\neq f_s$. 由此 $\Omega\to\mathscr{M}$的映射：$t\longmapsto f_t$ 是双射. 当Ω中网$\{t_\alpha\}$及元 t 使 $t_\alpha\to t$（按Ω的拓扑）时，对于 $x\in C(\Omega)$，当然 $x(t_\alpha)\to x(t)$，从而 $f_{t_\alpha}(x)\to f_t(x)$，也即是 $f_{t_\alpha}\to f_t(\mathscr{M})$（$\mathscr{M}$的拓扑用弱*拓扑），所以 $t\longmapsto f_t$ 是$\Omega\to\mathscr{M}$的连续映射，由于$\mathscr{M}$是紧 Hausdorff 空间，$t\longmapsto f_t$ 是$\Omega\to\mathscr{M}$的同胚映射. 因而逆映射 $f_t\longmapsto t$ 是$\mathscr{M}\to\Omega$ 的同胚.

例3 中的结论对于实的 Banach 代数 $C_r(\Omega)$仍然成立.

例 4 $L(\mathbb{R})$ (4.1.4 例 3) 考虑 $L(\mathbb{R})$ 是复值的 Lebesgue 可积函数全体. $L(\mathbb{R})$是没有单位元的复交换 Banach 代数. $L(\mathbb{R})$添加形式单位元后的 Banach 代数记为 $\tilde{L}(\mathbb{R})$. $\tilde{L}(\mathbb{R})$ 上的非零线性可乘泛函限制在$L(\mathbb{R})$ 上是$L(\mathbb{R})$ 上的线性可乘泛函，而$L(\mathbb{R})$上的线性可乘泛函 f 可以唯一地延拓成 $\tilde{L}(\mathbb{R})$上的非零线性可乘泛函（在 $\tilde{L}(\mathbb{R})$的形式单位元上规定取值为 1 即可）. 由 f 延拓成的 $\tilde{L}(\mathbb{R})$上非零线性可乘泛函记为 $\tilde{f}$，对 $L(\mathbb{R})$上的零泛函 g，$\tilde{g}$ 是 $\tilde{L}(\mathbb{R})$ 上的非零线性可乘泛函. $\tilde{g}:(\lambda,x)\longmapsto\lambda$. 下面讨论 $L(\mathbb{R})$ 上非零线性可乘泛函的一般形式，仍记这种泛函全体为$\mathscr{M}$.

对于 $x\in L(\mathbb{R})$及 $r\in\mathbb{R}$，记 $x_r(t)=x(t-r)\ (t\in\mathbb{R})$，由卷积的定义，对 $x,y\in L(\mathbb{R})$及 $r\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}(x*y)(t)&=\int_{\mathbb{R}}x(s)y(t-s)dm(s)\\&=\int_{\mathbb{R}}x(s-r)y(t-s+r)dm(s)\\&=\int_{\mathbb{R}}x_r(s)y_{-r}(t-s)dm(s)=(x_r*y_{-r})(t),\end{aligned}$$

故 $x*y=x_r*y_{-r}$，或更对称些写成 $x*y_r=x_r*y$.

设 $f\in\mathscr{M}$，如果 $f(y)\neq0$，由 $y*y=y_r*y_{-r}$，可见 $f(y_r)\neq0\ (r\in\mathbb{R})$. 如果 $x,y\in L(\mathbb{R})$且 $f(x)\neq0\neq f(y)$，由 $x*y_r=x_r*y$，即知

$$\frac{f(x_r)}{f(x)}=\frac{f(y_r)}{f(y)}.$$

任取 $x\in L(\mathrm{R})$ 使 $f(x)\neq 0$，作 R 上(复值)函数 $\xi(r)=\dfrac{f(x_r)}{f(x)}$，$\xi$ 与 x 的取法无关(只要 $f(x)\neq 0$)．这样作出的函数 ξ 有下列性质：(i) $\xi(r+s)=\xi(r)\xi(s)$ $(r,s\in\mathrm{R})$；(ii) ξ 是 R 上连续函数；(iii) $\xi(r)\in\mathrm{T}$ $(r\in\mathrm{R})$．ξ 的这三个性质证明如下：

(i) 由 $\xi(r)=\dfrac{f(x_r)}{f(x)}$，　$\xi(r+s)=\dfrac{f(x_{r+s})}{f(x)}$，　$\xi(s)=\dfrac{f(x_s)}{f(x)}=\dfrac{f((x_t)_s)}{f(x_r)}=\dfrac{f(x_{r+s})}{f(x_r)}$，即知 $\xi(r+s)=\xi(r)\xi(s)$．

(ii) 当 $r\to r_0$ 时，$\|x_r-x_{r_0}\|\to 0$，由 f 是连续的，即知 ξ 是连续函数．

(iii) 取定 $x\in L(\mathrm{R})$ $(f(x)\neq 0)$ 后，因 $\|x_r\|=\|x\|$ $(r\in\mathrm{R})$，由 $\|f\|\leqslant 1$，故 $|\xi(r)|\leqslant\dfrac{\|x_r\|}{|f(x)|}=\dfrac{\|x\|}{|f(x)|}$，所以 ξ 是有界函数，由 (i) 可知 $|\xi(r)|\leqslant 1$ $(r\in\mathrm{R})$．又因 $\xi(0)=1$，故 $\xi(-r)=\dfrac{1}{\xi(r)}$，因而 $|\xi(r)|\geqslant 1$ $(r\in\mathrm{R})$，所以 $|\xi(r)|=1$，即 $\xi(r)\in\mathrm{T}$．

上面由 $f\in\mathscr{M}$ 作出了函数 ξ，而 f 又完全由 ξ 所决定．设 $a>0$，考虑 f 在 $\chi_{[0,a]}$ 上的值．对自然数 n，把区间 $[0,a]$ n 等分，记 $\delta=\dfrac{a}{n}$，这时，

$$\begin{aligned}f(\chi_{[0,a]})&=f(\chi_{[0,\delta]}+\chi_{[\delta,2\delta]}+\cdots+\chi_{[(n-1)\delta,a]})\\&=f(\chi_{[0,\delta]})[1+\xi(\delta)+\xi(2\delta)+\cdots+\xi((n-1)\delta)]\\&=\frac{1}{\delta}f(\chi_{[0,\delta]})[\delta(\xi(0)+\cdots+\xi((n-1)\delta))],\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，这时 $\delta(\xi(0)+\xi(\delta)+\cdots+\xi((n-1)\delta))\to\int_0^a\xi(r)\,dr$，又因

为$\frac{1}{\delta}\chi_{[0,\delta]}=\frac{n}{a}\chi_{[0,\frac{a}{n}]}$是近似单位元，故$\frac{1}{\delta}f(\chi_{[0,\delta]})\to 1$，所以

$$f(\chi_{[0,a]})=\int_0^a \xi(r)\,dr=\int_{\mathbf{R}}\chi_{[0,a]}\xi\,dm \quad (a>0).$$

易知对于任何有限区间上的特征函数也成立类似等式，再由f是线性连续泛函，得

$$f(x)=\int_{\mathbf{R}} x\xi\,dm \quad (x\in L(\mathbf{R})).$$

由ξ具有前面的性质(i)，(ii)，(iii)，故知有数$s_0\in\mathbf{R}$使

$$\xi(r)=e^{irs_0} \quad (r\in\mathbf{R}).$$

而对于$s_0\in\mathbf{R}$，

$$\int_{\mathbf{R}} x(t)e^{its_0}\,dm(t) \quad (x\in L(\mathbf{R}))$$

是$L(\mathbf{R})$上(非零)线性可乘泛函．记这泛函为f_{s_0}，并记$L(\mathbf{R})$上零泛函为f_∞，于是，$L(\mathbf{R})$上的非零线性可乘泛函全体即为$\{\tilde{f}_s|s\in\mathbf{R}\cup\{\infty\}\}$．记$\widetilde{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{\infty\}$，又记$L(\mathbf{R})$上非零线性可乘泛函全体为$\widetilde{\mathscr{M}}$，这时$s\longmapsto\tilde{f}_s$是$\widetilde{\mathbf{R}}\to\widetilde{\mathscr{M}}$的双射．在$\widetilde{\mathbf{R}}$中用$\mathbf{R}$的单点紧化拓扑，$\widetilde{\mathbf{R}}$是个紧Hausdorff空间，而$\widetilde{\mathbf{R}}\to\widetilde{\mathscr{M}}$的映射$s\longmapsto\tilde{f}_s$是连续的，在$s=\infty$处的连续性就是Riemann-Lebesgue引理．从而，这是$\widetilde{\mathbf{R}}\to\widetilde{\mathscr{M}}$的同胚映射．

4.2.5 半单的Banach代数

定义 设R是有单位元的代数，如果R没有非平凡的双侧理想，则称R是**单纯的或单的**．如果R的一切极大双侧理想的交集为$\{0\}$，则称R是**半单纯的或半单的**．

如果R没有非平凡的双侧理想，$\{0\}$是R的唯一的极大双侧理想，因而单的代数是半单的．

引理 1 设 R 是有单位元的复交换 Banach 代数，则 R 的一切极大理想的交集是 $\{x|x\in R, r(x)=0\}$.

证 如果 x 属于每个极大理想，则每个 $f\in\mathscr{M}$ 在 x 上的值 $f(x)=0$，即 $\hat{x}=0$，所以 $\sigma_x=\{0\}$. 反过来，如果 $\sigma_x=\{0\}$，则 $\hat{x}=0$，即对于任何 $f\in\Omega$，$f(x)=0$，故 x 在每个极大理想中，所以 R 的一切极大理想的交就是 $\{x|x\in R, \sigma_x=\{0\}\}$，也等于是 $\{x|x\in R, r(x)=0\}$. 证毕.

定理 1 设 $(R, \|\cdot\|)$ 是有单位元的复交换 Banach 代数，又 $\|\cdot\|_1$ 是 R 上的范数，$(R, \|\cdot\|_1)$ 是赋范代数，如果 $(R, \|\cdot\|_1)$ 的完备化 R_1 是半单的，则有数 c 使得对任何 $x\in R$，$\|x\|_1\leqslant c\|x\|$.

证 对 $x\in R$，令 $\|x\|_2=\max(\|x\|, \|x\|_1)$，则 $\|\cdot\|_2$ 是 R 上的范数且 $(R, \|\cdot\|_2)$ 是赋范代数. 下面证明 $(R, \|\cdot\|_2)$ 是 Banach 代数.

设 $\{x_n\}$ 是 $(R, \|\cdot\|_2)$ 中的基本点列，则在 $\|\cdot\|$ 及 $\|\cdot\|_1$ 下，$\{x_n\}$ 都是基本点列. 因而有 $x\in R$ 及 $y\in R_1$，使 $x_n\to x(\|\cdot\|)$，$x_n\to y(\|\cdot\|_1)$. 对于 R_1 上的非零线性可乘泛函 f，$f(x_n)\to f(y)$，由于 $R\subset R_1$，所以 $f|_R$ 是 R 上的非零线性可乘泛函，因而又有 $f(x_n)\to f(x)$，由此 $f(x)=f(y)$. 因为 R_1 是半单的，由 $f(x)=f(y)$ 对 R_1 上任何非零线性可乘泛函 f 成立，即知 $x=y$，从而得 $x_n\to x(\|\cdot\|_2)$，即 $(R, \|\cdot\|_2)$ 是完备的.

因为 $\|x\|\leqslant\|x\|_2(x\in R)$，由双范数定理，有数 c 使得对任何 $x\in R$，$\|x\|_2\leqslant c\|x\|$，故更有 $\|x\|_1\leqslant c\|x\|(x\in R)$. 证毕.

系 设 R 是有单位元的复交换的半单代数，如果 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 R 上的两个范数，且 $(R, \|\cdot\|_1)$，$(R, \|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 代数，则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是拓扑等价的.

这说明对于有单位元的复交换的半单代数，如果存在使它成为 Banach 代数的范数，那么这样的范数实质上只有一个.

§ 4.3 群 代 数

这节中讨论局部紧空间上的积分. 证明在局部紧群上有一种具有平移不变性的积分，相应地有具有平移不变性的测度. 可积函数全体是个 Banach 空间,并可以规定乘法.

4.3.1 局部紧 Hausdorff 空间上的积分

在本节中，设(Ω,τ)是 Hausdorff 的拓扑空间，而且对任何$t\in\Omega$,有 t 的邻域V使$V^{(-)}$是$(\Omega,\ \tau)$中的紧集，即$(\Omega,\ \tau)$是局部紧 Hausdorff 空间. 简称Ω是局部紧空间. Ω的拓扑τ不一定标出.

对于局部紧空间Ω的紧集A，必有包含A的开集V使$\bar{V}$为紧集. 由 Урысон 引理. 有Ω上的实值连续函数x,x在A上取值为1,在V^c上取值为0且$0\leqslant x(t)\leqslant 1\,(t\in\Omega)$. 记$\{x|x$是$\Omega$上实值连续函数,且$x$在某个紧集外为$0\}$为$L(\Omega)$, 又$L(\Omega)$中非负函数全体记为$L^+(\Omega)$. $L^+(\Omega)$,$L(\Omega)$简记为L^+及L.

下面要考虑$\Omega\to\mathrm{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$的映射，称为$\Omega$上的函数，$\Omega$上的函数全体记为$N(\Omega)$，而$\Omega\to[0,-\infty)\cup\{+\infty\}$的映射全体记为$\mathrm{N}^+(\Omega)$,同样$\mathrm{N}(\Omega)$与$\mathrm{N}^+(\Omega)$也简记为$N$及$N^+$.

先把拓扑空间上下半连续函数的概念推广到取值可以是$+\infty$(但不考虑取值有$-\infty$的函数)的情况.

定义 设(Ω,τ)是拓扑空间,$u:\Omega\to\mathrm{R}\cup\{+\infty\}$，如果对任何$a\in\mathrm{R}$，$\{t|u(t)\leqslant a\}$是$(\Omega,\ \tau)$中闭集，则称$u$是$\Omega$上的**下半连续函数**.

定义中的条件也可以改成为:对$a\in\mathrm{R}$,$\{t|u(t)>a\}$是开集.

引理 1 Ω上任何一族下半连续函数的上确界函数是下半连

续的，又两个下半连续函数的 min 是下半连续的.

证 设 $\{u_\alpha\}$ 是一族下半连续函数，记 $u=\sup\limits_{\alpha} u_\alpha$. 对 $a\in\mathbb{R}$,

$\{t\,|\,u(t)\leqslant a\}=\bigcap\limits_{\alpha}\{t\,|\,u_\alpha(t)\leqslant a\}$. 而对于两个下半连续函数 u_1,u_2,记

$u=\min(u_1,u_2)$，则对 $a\in\mathbf{R}$,

$$\{t\,|\,u(t)\leqslant a\}=\{t\,|\,u_1(t)\leqslant a\}\cup\{t\,|\,u_2(t)\leqslant a\},$$

因而这些都是闭集. 所以 $\sup u_\alpha$, $\min(u_1,u_2)$ 都下半连续. 证毕.

引理 2 设 $u:\Omega\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$，则 u 是下半连续的充分必要条件是：对 $a\in\mathbf{R}$ 及 $t_0\in\Omega$，当 $a<u(t_0)$ 时有 t_0 的邻域 V 使对 $t\in V$，成立 $a<u(t)$. 从而当 u,v 下半连续时，$u+v$ 下半连续.

证 引理的条件，即对于 $a\in\mathbf{R}$，$\{t\,|\,a<u(t)\}$ 中点都是内点，也即这种集都是开集. 故引理的前半部分结论成立.

设 u,v 都是下半连续的. 对于 $a\in\mathbf{R}$，$t_0\in\Omega$，有不等式 $a<u(t_0)+v(t_0)$. 如果 $u(t_0),v(t_0)$ 都是实数，记 $\varepsilon=\frac{1}{2}(u(t_0)+v(t_0)-a)$，并令 $V=\{t\,|\,u(t)>u(t_0)-\varepsilon\}\cap\{t\,|\,v(t)>v(t_0)-\varepsilon\}$. 如果 $u(t_0)$ 与 $v(t_0)$ 中有一个(例如 $v(t_0)$)是 $+\infty$，取小于 $v(t_0)$ 的实数 b 并令 $V=\{t\,|\,u(t)>a-b\}\cap\{t\,|\,v(t)>b\}$. 在这两种情况下的 V 都是 t_0 的邻域且在 V 上成立 $u+v>a$. 因而 $u+v$ 是下半连续的. 证毕.

规定下半连续函数不取值 $-\infty$ 是为了使得加法可以进行. 记 $\{u\,|\,u$ 是 Ω 上的下半连续函数且有 $x\in L$ 使 $x\leqslant u\}$ 为 $M(\Omega)$，并记 $M(\Omega)\cap N^+$ 为 $M^+(\Omega)$，这两个集也简记为 M 及 M^+. 易见 $L\subset M$，$L^+\subset M^+$.

定义 如果 $E\subset N$，且对于 E 中任何两个元 w_1,w_2，有 E 中的 w 使 $w\geqslant\max(w_1,w_2)$，则称 E 是**向上定向集**.

引理 3 设 $E\subset M^+$ 且 E 向上定向，记 $v=\sup\{u\,|\,u\in E\}$，则对于

任何 $y\in L^+$, $y\leqslant v$ 及 $\varepsilon>0$, 有 $u\in E$ 使 $y\leqslant u+\varepsilon$.

证 首先由引理 1, $v\in M^+$, 当 $y\in L^+$, $y\leqslant v$ 时, 对于每个 $t\in\Omega$, 有 E 中的元 u_t 使得 $y(t)<u_t(t)+\varepsilon$. 因为 u_t 是下半连续的, $\{s\mid y(s)<u_t(s)+\varepsilon\}$ 是开集, 记为 $V(t)$, 即对于每个 $t\in\Omega$, 有 E 中元 u_t 及 t 的邻域 $V(t)$, 在 $V(t)$ 上 $y<u_t+\varepsilon$. 由于 $\{V(t)\mid t\in\Omega\}$ 的和集是 Ω, y 在某紧集 A 外为 0, 从而有有限个 Ω 中的 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使得 $\bigcup_{k=1}^{n} V(t_k)\supset A$. 相应地函数为 $u_{t_1}, \cdots, u_{t_n}$. 由 E 向上定向, 有 $u\in E$, $u\geqslant\max(u_{t_1}, \cdots, u_{t_n})$, 于是 $y\leqslant u+\varepsilon$. 证毕.

定义 设 (Ω, τ) 是局部紧空间, f 是 L 上线性泛函且 $f(x)\geqslant 0(x\in L^+)$, 则称 f 是 L 上的**积分**.

L 上的积分也称为 Ω 上的积分, 这里积分值为实数, 由定义, L 上的积分也就是 L 上关于锥 L^+ 的线性正泛函. 积分一般是指关于测度的积分, 这里只作为一个名称. 而这节中, 主要的目的是证明: 局部紧空间 Ω 上的积分 f 必定相应有个测度 ν, 使得对任何 $x\in L$, $f(x)$ 等于 x 关于 ν 的积分. 证明的过程是从 f 出发, 逐步地延拓到更大的函数类上, 并找到所要的测度.

下面总设 f 是局部紧空间 Ω 上的积分. 延拓过程中的泛函当然是与 f 有关的.

对于 M 中的 u, 令 $g(u)=\sup\{f(x)\mid x\in L, x\leqslant u\}$.

定理 1 $g: M\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 有下列性质:

(i) $g|_L=f$;

(ii) 当 $u, v\in M$ 且 $u\leqslant v$ 时, $g(u)\leqslant g(v)$ (单调性);

(iii) 当 $u\in M$ 且 a 是非负实数时, $g(au)=ag(u)$ (正齐次性).

证 由于 f 是 L 上关于锥 L^+ 的线性正泛函, 所以 f 有单调性. 定理 1 中的三个性质是直接可得的. 证毕.

引理 4 设 $E\subset L^+$ 且 E 是向上定向的, 则记 $u=\sup\{x\mid x\in E\}$

时，$g(u)=\sup\{f(x)\,|\,x\in E\}$.

证　$g(u)\geqslant\sup\{f(x)\,|\,x\in E\}$是显然的. 设 $y\in L^+$, $y\leqslant u$, 由于 y 在紧集 A 外为 0, 取 $y_0\in L^+$使 y_0 在 A 上取值 1. 由引理 3, 对 $\varepsilon>0$, 有 $z\in E$ 使 $y\leqslant z+\varepsilon$. 从而 $y\leqslant z+\varepsilon y_0$, 所以

$$f(y)\leqslant f(z)+\varepsilon f(y_0)\leqslant\sup\{f(z)\,|\,z\in E\}+\varepsilon f(y_0),$$

因 ε 是任意正数, 故 $f(y)\leqslant\sup\{f(z)\,|\,z\in E\}$. 再因 y 是L^+中使$y\leqslant u$ 的任一函数, 故 $g(u)\leqslant\sup\{f(z)\,|\,z\in E\}$. 证毕.

定理 2　对于M^+中任何函数族$\{u_\alpha\}$, $g(\sup\limits_\alpha u_\alpha)=\sup\limits_\alpha g(u_\alpha)$, $g\left(\sum\limits_\alpha u_\alpha\right)=\sum\limits_\alpha g(u_\alpha)$.

证　当 $u\in M^+$时, $u=\sup\{x\,|\,x\in L^+,\ x\leqslant u\}$. 当$\{u_\alpha\}$是$M^+$中函数族时, 记$E_\alpha=\{x\,|\,x\in L^+, x\leqslant u_\alpha\}$, E 是 $\bigcup\limits_\alpha E_\alpha$ 中有限个函数的 max 全体. 又记F是在有限个 E_α 中各取一个所作的和函数全体. 易见$\sup\{x\,|\,x\in E\}=\sup\limits_\alpha\{u_\alpha\}$, $\sup\{y\,|\,y\in F\}=\sum\limits_\alpha u_\alpha$, 且 E, F 都向上定向, 因而由引理 4,

$$g(\sup_\alpha u_\alpha)=\sup\{f(x)\,|\,x\in E\}=\sup_\alpha g(u_\alpha),$$

$$g\left(\sum_\alpha u_\alpha\right)=\sup\{f(y)\,|\,y\in F\}=\sum_\alpha g(u_\alpha),$$

式中 $g\left(\sum\limits_\alpha u_\alpha\right)$及$\sum\limits_\alpha g(u_\alpha)$都表示有限和的上确界. 证毕.

系　对于M^+中一列$\{u_n\}$, 如果 $u_1\leqslant u_2\leqslant u_3\leqslant\cdots$, 则 $g(\lim\limits_n u_n)=\lim\limits_n g(u_n)$.

再作 $N\to\mathbf{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$的映射$F$如下: 对 $w\in N$, 令

$$F(w)=\inf\{g(u)\,|\,u\in M, u\geqslant w\}.$$

定理 3 $N\to\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ 的映射 F 有下列性质:

(i) $F|_M=g$, 且当 $w_1,w_2\in N$ 使 $w_1\leqslant w_2$ 时, $F(w_1)\leqslant F(w_2)$;

(ii) 对 $w\in N$ 及非负实数 a, $F(aw)=aF(w)$;

(iii) 对 $w_1,w_2\in N^+$, $F(w_1+w_2)\leqslant F(w_1)+F(w_2)$;

(iv) 如果 N^+ 中函数列 $\{w_n\}$ 使 $w_1\leqslant w_2\leqslant w_3\leqslant\cdots$, 则 $F(\lim\limits_n w_n)=\lim\limits_n F(w_n)$.

证 (i) 由 g 的单调性即得. (ii)由 g 的正齐次性即得. 故只证后面两个性质.

(iii) 如果 $F(w_1)$, $F(w_2)$ 中有一个是 $+\infty$, 显然结论成立, 所以设 $F(w_1)<+\infty$, $F(w_2)<+\infty$. 这时, 对 $\varepsilon>0$, 有 $u_1,u_2\in M^+$, 使得 $w_1\leqslant u_1$, $w_2\leqslant u_2$ 且 $g(u_1)<F(w_1)+\varepsilon$, $g(u_2)<F(w_2)+\varepsilon$, 于是 $w_1+w_2\leqslant u_1+u_2$, $u_1+u_2\in M$, $g(u_1+u_2)=g(u_1)+g(u_2)$. 由 F 的定义, 即知

$$
\begin{aligned}
F(w_1+w_2)&\leqslant g(u_1+u_2)\\
&=g(u_1)+g(u_2)<F(w_1)+F(w_2)+2\varepsilon,
\end{aligned}
$$

因 ε 是任意正数, 故 $F(w_1+w_2)\leqslant F(w_1)+F(w_2)$.

(iv) 由 F 的单调性, 可知 $F(\lim\limits_n w_n)\geqslant\lim\limits_n F(w_n)$, 如果 $\lim\limits_n F(w_n)=+\infty$, 等式当然成立, 所以可设 $\lim\limits_n F(w_n)<+\infty$. 对 $\varepsilon>0$, 由 F 的定义, 可取 $u_n\in M^+$ 使 $w_n\leqslant u_n$, 且 $g(u_n)<F(w_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 令 $v_m=\max(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ $(m=1,2,3,\cdots)$, 易见 $v_{m+1}=\max(v_m,u_{m+1})$,

$$
\begin{aligned}
v_m+u_{m+1}&=\max(v_m,u_{m+1})+\min(v_m,u_{m+1})\\
&=v_{m+1}+\min(v_m,u_{m+1}),
\end{aligned}
$$

由 g 的可加性,

$$
g(v_m)+g(u_{m+1})=g(v_{m+1})+g(\min(v_m,u_{m+1})),
$$

因 $w_m \leqslant \min(v_m, u_{m+1})$，故有 $g(v_{m+1}) + F(w_m) \leqslant g(v_m) + g(u_{m+1})$，于是

$$g(v_{m+1}) \leqslant g(v_m) + F(w_{m+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} - F(w_m),$$

$$g(v_{m+1}) - F(w_{m+1}) \leqslant g(v_m) - F(w_m) + \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$$

$$(m = 1, 2, 3, \cdots),$$

而 $v_1 = u_1$，$g(v_1) - F(w_1) = g(u_1) - F(w_1) < \frac{\varepsilon}{2}$，故对于任何自然数 n，$g(v_n) - F(w_n) < \varepsilon$.

记 $v = \lim\limits_n v_n$，则 $v \in M^+$，$g(v) = \lim\limits_n g(v_n)$ (因 $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots$，由定理 2 的系)，$\lim\limits_n w_n \leqslant v$，所以

$$F(\lim_n w_n) \leqslant g(v) = \lim_n g(v_n) \leqslant \lim_n F(w_n) + \varepsilon.$$

由 ε 是任意正数，即得 $F(\lim\limits_n w_n) \leqslant \lim\limits_n F(w_n)$. 由此，$F(\lim\limits_n w_n) = \lim\limits_n F(w_n)$. 证毕.

定义 设 f 是局部紧空间 Ω 上的积分，如果 $w \in N$ 使得 $F(|w|) = 0$，则称 w 是 **f-零函数**. 如果 $A \subset \Omega$ 使得 χ_A(A 上的特征函数)是 f-零函数，则称 A 是 **f-零集**. 设 P 是关于 Ω 中点的命题，如果使 P 不成立的点是 f-零集，则称命题 P 在 Ω 上 **f-几乎处处成立**.

在不致混淆时，f-零函数，f-零集，f-几乎处处成立分别简称为零函数，零集及几乎处处成立.

引理 5 设 f 是局部紧空间 Ω 上的积分，则

(i) 零集的子集是零集，有限个或可列个零集的和集是零集.

(ii) 如果 $w \in N$，则 w 是零函数的充分必要条件是：w 几乎处

处等于 0.

证 (i) 由 F 的单调性，易知零集的子集是零集. 设 $\{A_n\}$ 是一列零集，记 A_n 的特征函数为 w_n，由 F 的单调性及次可加性，$0\leqslant F(\max(w_1,\cdots,w_m))\leqslant F(w_1+w_2+\cdots+w_m)\leqslant F(w_1)+\cdots+F(w_m)=0$，并因 $\max(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ 是 $\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n$ 的特征函数，所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n$ 是零集. 由定理3的(iv)，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的特征函数 w 仍使 $F(w)=0$，所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是零集. 由此，有限个或可列个零集的和集是零集.

(ii) 设 $w\in N$，记 $A_n=\left\{t\,\middle|\,|w(t)|\geqslant\frac{1}{n}\right\}$ 并记 $A=\{t\,|\,w(t)\neq 0\}$.

如果 $F(|w|)=0$，则 $F(n|w|)=0$，由于 A_n 的特征函数 $\leqslant n|w|$，因而由 F 的单调性可知 A_n 是零集 $(n=1,2,\cdots)$，故由(i) $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是零集，即 w 几乎处处等于 0.

反之，如 w 几乎处处等于 0，则 A 是零集，即 $F(\chi_A)=0$，由此，$F(n\chi_A)=0$，且由定理 3 的(iv)，$F(\lim\limits_n(n\chi_A))=0$，由于 $|w|\leqslant\lim\limits_n(n\chi_A)$，故 $F(|w|)=0$，即 w 是零函数. 证毕.

系 如果 $w\in N$ 使 $F(|w|)<+\infty$，则 $\{t\,|\,|w(t)|=+\infty\}$ 是零集.

证 记 $\{t\,|\,|w(t)|=+\infty\}$ 为 A，则 $n\chi_A\leqslant|w|$，由此 $nF(\chi_A)\leqslant F(|w|)$ $(n=1,2,\cdots)$，故 $F(\chi_A)=0$，即 A 是零集. 证毕.

引理 6 设 f 是局部紧空间 Ω 上的积分，w_1，$w_2\in N$ 且 w_1 与 w_2 几乎处处相等，则 $F(|w_1|)=F(|w_2|)$.

证 记 $\{t\,|\,w_1(t)\neq w_2(t)\}$ 为 A，则 A 是零集，令 w 是在 A 上

等于$+\infty$，在A^c上等于0的函数，由于w几乎处处等于0，由引理5 (ii)，w是零函数，所以$F(w)=0$. 因为

$$|w_1|\leqslant|w_2|+w,\qquad |w_2|\leqslant|w_1|+w,$$

由F的次可加性及$F(w)=0$，即得$F(|w_1|)=F(|w_2|)$. 证毕.

记$\tilde{L}=\{w\,|\,w:\Omega\to\mathbf{R}$ 且 $F(|w|)<+\infty\}$，由F的次可加性及单调性，$F(|w_1+w_2|)\leqslant F(|w_1|+|w_2|)\leqslant F(|w_1|)+F(|w_2|)$. 对于$w\in\tilde{L}$，记$\|w\|=F(|w|)$.

在$\tilde{L}$中只考虑实值函数是为使加法、数乘都能进行. 如果也允许N中函数，就把几乎处处相等的函数看成相同，因为使$F(|w|)<+\infty$的w必定几乎处处是有限值的. 这样，线性运算仍能进行. 易见$(\tilde{L},\|\cdot\|)$是赋范线性空间. 如取上面的$\tilde{L}$(即仅是$\Omega\to\mathbf{R}$的函数)，也不把几乎处处相等函数看成相同，则$\|\cdot\|$是$\tilde{L}$中拟范数.

定理 4 $(\tilde{L},\|\cdot\|)$是完备的.

证 显然，只要证$\tilde{L}$点列完备. 设$\{w_n\}$是$(\tilde{L},\|\cdot\|)$中基本点列，并设$\|w_n-w_{n+1}\|\leqslant\frac{1}{2^n}$，记$h_n=|w_1|+|w_2-w_1|+\cdots+|w_{n+1}-w_n|$，由定理3的(iv)，$F(\lim\limits_n h_n)=\lim\limits_n F(h_n)\leqslant\|w_1\|+1$，所以$\lim\limits_n h_n$几乎处处是有限值的，从而$\{w_n\}$几乎处处有有限极限. 记$\lim\limits_n h_n$为$+\infty$的集为$A$(是零集)，令$w$在$A^c$上为0，在$A$上为$\lim\limits_n w_n$，则

$$|w-w_n|\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}|w_{k+1}-w_k|.$$

再由F的单调性及定理3的(iv)，$\|w-w_n\|\leqslant\sum\limits_{k=n}^{\infty}\|w_{k+1}-w_k\|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$，故$w_n\to w(\|\cdot\|)$. 对于一般的$(\tilde{L},\|\cdot\|)$中基本点列$\{w_n\}$，可

取子列$\{w_{n_k}\}$使$\|w_{n_k}-w_{n_{k+1}}\|\leqslant\frac{1}{2^k}$，于是有$w\in\bar{L}$使$\|w_{n_k}-w\|\to 0$. 而对$\varepsilon>0$. 有$N$使当$n,m\geqslant N$时，$\|w_n-w_m\|<\frac{\varepsilon}{2}$，再取一个$k$使$n_k\geqslant N$且$\|w_{n_k}-w\|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是对$n\geqslant N$，$\|w_n-w\|<\varepsilon$，故$\|w_n-w\|\to 0$. 故$(\bar{L},\|\cdot\|)$是完备的. 证毕.

定义 记$L^1=\bar{L}^{(\|\cdot\|)}$，称$L^1$中函数$w$为**$f$-可积函数**，如果$\Omega$的子集$A$使$\chi_A$是$f$-可积的，则称$A$是**$f$-可积集**.

同样，f-可积函数，f-可积集简称为可积函数，可积集.

引理 7 如果$w\in L^1$，则$w^+\in L^1$.

证 当$w\in L^1$时，有$\{x_n\}$是L中点列使$\|x_n-w\|\to 0$，由

$$|x_n^+-w^+|\leqslant|x_n-w|,$$

及F的单调性，$\|x_n^+-w^+\|\leqslant\|x_n-w\|\to 0$，由于$x_n^+\in L^+\subset L$，所以$w^+\in L^1$. 证毕.

系 1 当$w\in L^1$且$w\geqslant 0$时，$w\in\overline{L^+}^{(\|\cdot\|)}$.

系 2 当$w\in L^1$时，$w^+\in L^1$，从而$|w|\in L^1$.

系 3 当$w_1,w_2\in L^1$时，$\max(w_1,w_2)$，$\min(w_1,w_2)\in L^1$.

证 $\max(w_1,w_2)=\frac{1}{2}(w_1+w_2+|w_1-w_2|)\in L^1$，min 类似. 证毕.

系 4 如果$w_1,w_2\in L^1$，$w_1\geqslant 0$，$w_2\geqslant 0$，则$\|w_1+w_2\|=\|w_1\|+\|w_2\|$.

证 当$w_1,w_2\in L^1$且$w_1\geqslant 0$，$w_2\geqslant 0$时，有L^+中$\{x_n\}$，$\{y_n\}$使$\|x_n-w_1\|\to 0$，$\|y_n-w_2\|\to 0$，所以$\|x_n\|\to\|w_1\|$，$\|y_n\|\to\|w_2\|$，又同样有$\|x_n+y_n\|\to\|w_1+w_2\|$，但$\|x_n+y_n\|=F(x_n+y_n)=f(x_n)+f(y_n)=\|x_n\|+\|y_n\|$，因此$\|w_1+w_2\|=\|w_1\|+\|w_2\|$. 证毕.

定理 5 设$u\in M^+$且$F(u)<+\infty$，则$u\in L^1$.

证 因为 $F(u)=g(u)$，由 g 的定义，对 $\varepsilon>0$，有 $x\in L^+$ 使得 $x\leqslant u$ 且 $g(u)<f(x)+\varepsilon$. 因 g 有可加性，$g(u-x)+g(x)=g(u)$，所以 $g(u-x)<\varepsilon$，即 $\|u-x\|<\varepsilon$，因 ε 是任意正数，故 $u\in L^1$. 证毕.

注 当 u 是有限值的非负下半连续函数时，只要 $F(u)<+\infty$，就有 $u\in L^1$. 如果 u 取值可为 $+\infty$，而 $\tilde{L}$ 及 L^1 中函数按前面定义只是对有限值函数的，那么有 $F(|u-x|)<\varepsilon$，记 $\{t|u(t)=+\infty\}$ 为 A，A是零集，并会 $w=u$（在 A^c 上）且 w 在 A 上为 0，于是 $F(|w-x|)=F(|u-x|)<\varepsilon$，这时 $w\in L^1$，但这个 w 可能已不再是下半连续的了. 下面的系 1 也类似.

系 1 如果 $u\in M$ 且 $g(u)<+\infty$，则 $u\in L^1$.

证 由 $u\in M$，有 $y\in L$，$y\leqslant u$，这时 $u-y\in M^+$ 且 $g(u-y)<+\infty$，由 $u-y\in L^1$，即得 $u\in L^1$. 证毕.

系 2 如果 V 是 Ω 中开集且 $\bar{V}$ 是紧集，则 V 是可积集.

证 取 $x\in L^+$，x 在 $\bar{V}$ 上取值 1，于是 $0\leqslant \chi_V\leqslant x$，但因 V 是开集，χ_V 是下半连续的，且 $g(\chi_V)\leqslant g(x)=f(x)<+\infty$，所以 $\chi_V\in L^1$，所以 V 是可积集. 证毕.

系 3 Ω 中紧集A是可积集.

证 取开集 V 使 $V\supset A$ 且 $\bar{V}$ 是紧集，于是 V 与$V\setminus A$都是可积集，但因 χ_A 是 χ_V 与 $\chi_{V\setminus A}$ 之差，因而 $\chi_A\in L^1$，所以 A 是可积集. 证毕.

对于可积集 A，记 $\nu(A)=\|\chi_A\|=F(\chi_A)$.

定理 6 可积集全体是环，ν 是这环上的有限测度.

证 L^1 是个线性空间，又由引理 7 系 3，L^1对于 max 及 min 都封闭. 当 A_1, A_2 是可积集时，$\chi_{A_1}, \chi_{A_2}\in L^1$，由于$\max(\chi_{A_1}, \chi_{A_2})=\chi_{A_1\cup A_2}$，$\min(\chi_{A_1}, \chi_{A_2})=\chi_{A_1\cap A_2}$，故$A_1\cup A_2$，$A_1\cap A_2$都是可积集. 又 $A_1\setminus A_2=A_1\setminus(A_1\cap A_2)$，$A_1\setminus A_2$ 的特征函数等于 $\chi_{A_1}-\chi_{A_1\cap A_2}$ 可见 $A_1\setminus A_2$ 是可积集，所以可积集全体是环. ν 显然是有限值的，由引

理 7 系 4，ν 有可加性. 当 $\{A_n\}$ 是一列可积集且两两不交时，记 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，由定理 3 的(IV)，

$$F(\chi_A)=\lim_n F_{(\chi A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k),$$

由此，如果 A 也是可积集，就有 $\nu(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k)$. 证毕.

引理 8 设 A 是可积集且 $\bar{A}$ 是紧集，则对任何 $\varepsilon>0$，有开集 V 使得 $V\supset A$，$\bar{V}$ 是紧集且 $\nu(V)<\nu(A)+\varepsilon$.

证 由 A 是可积集且 $\bar{A}$ 是紧集，对 $\varepsilon>0$，可取 $u\in M^+$，使得 $\chi_A\leqslant u$ 且 $F(\chi_A)+\frac{\varepsilon}{2}>g(u)$. 由 $\bar{A}$ 紧，有 $x\in L^+$，x 在 $\bar{A}$ 上取值 1，令 $v=\min(u,x)$，则 $\chi_A\leqslant v$，$g(v)<\|\chi_A\|+\frac{\varepsilon}{2}$ 且 v 在某紧集为 0. 取 $\delta\in(0,1)$ 使 $\delta(\|\chi_A\|+\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}$，令 $V=\{t\,|\,v(t)>1-\delta\}$，因为 v 是下半连续的，V 是开集，显然 $A\subset V$ 且 V 是某紧集的子集. 由作法，$(1-\delta)\chi_V\leqslant v$，故 $(1-\delta)\|\chi_V\|<\|\chi_A\|+\frac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$\|\chi_V\|<\|\chi_A\|+\frac{\varepsilon}{2}+\delta(\|\chi_A\|+\varepsilon)<\|\chi_A\|+\varepsilon,$$

即 $\nu(V)<\nu(A)+\varepsilon$. 证毕.

定义 设 (Ω,τ) 是局部紧空间，由 Ω 中紧集全体张成的 σ-环记为 $\mathscr{B}$，称为 (Ω,τ) 的 **Borel 集类**. $\mathscr{B}$ 中的元称为 Ω 的 **Borel 集**. 如果 μ 是 $\mathscr{B}$ 上的测度且对于 Ω 的紧集 A，$\mu(A)<+\infty$，则称 μ 是 Ω 的 **Borel 测度**. 如果 μ 是 Ω 的 Borel 测度且对于任何 $B\in\mathscr{B}$，$\mu(B)=\inf\{\mu(V)\,|\,V$ 是开集，$V\in\mathscr{B}$ 且 $V\supset B\}$ 则称 μ 是 Ω 的**正则测度**.

定理 7(Riesz) 设(Ω,τ)是局部紧空间，f 是 $L(\Omega)$上关于 $L^+(\Omega)$的线性正泛函，则有 Ω 的正则测度 ν 使得

$$f(x)=\int x d\nu \quad (x\in L(\Omega)). \tag{1}$$

证 在 f-可积集全体这个环上，令$\nu(A)=\|\chi_A\|=F(\chi_A)$，这是环上的有限测度，把它延拓成 σ-环上的测度。由于紧集都是 f-可积集，故所得的测度的定义域是包含 $\mathscr{B}$ 的。把它限制在 $\mathscr{B}$ 上，仍记为ν。下面证明ν满足一切要求。

先证 ν 是正则测度：当 A 是 Ω 中紧集时，A的可积子集全体显然是环，而且对于一列两两不交的A的可列子集$\{A_n\}$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)<+\infty$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是可积集$\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right.$ 的特征函数是 $\bigcup\limits_{n=1}^{k}A_n$ 的特征函数的$\|\cdot\|$极限$\Big)$，因而 A 的可积子集全体是 σ-环。而又因 $\{A\cap B\,|\,B\in\mathscr{B}\}$等于$A$的紧子集全体张成的 σ-环，所以A的Borel子集是可积集。由此，当 $A\in\mathscr{B}$ 且 $\bar{A}$ 是紧集时，A是可积集，再因当V是开集且$\bar{V}$紧时，$\bar{V}$，$\bar{V}\backslash V$ 都紧，故 $V\in\mathscr{B}$，由引理 8 可知，当 $A\in\mathscr{B}$，$\bar{A}$紧时(这时A是可积集)，就成立

$\nu(A)=\inf\{\nu(V)\,|\,V\supset A, V\in\mathscr{B}, V \text{ 开集}\}$.

因为 $\mathscr{B}$ 是紧集张成的 σ-环，故对于 $B\in\mathscr{B}$，必有一列紧集 $\{A_n\}$使 $B\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。记 $B_n=B\cap A_n$，于是对 $\varepsilon>0$，有开集$V_n\supset B_n$，且 $\bar{V}_n$ 是紧集，$\nu(V_n)<\nu(B_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$，记 $V=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}V_n$，易见$V$是开集，$V\supset B$，$V\in\mathscr{B}$，且由 $V\backslash B\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(V_n\backslash B_n)$，所以

$$\nu(V)-\nu(B)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\nu(V_n)-\nu(B_n))<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon,$$

即 $\nu(V)<\nu(B)+\varepsilon$，因而 $\nu(B)=\inf\{\nu(V)\mid V\supset B, V\in\mathscr{B}, V$ 开集$\}$，即 ν 是正则测度.

最后再证明积分的等式(1). 由 ν 的作法，当 A 是可积的 Borel 集时，$\nu(A)=F(\chi_A)$. 因而当 w 是这种函数的正系数的线性组合时，$F(w)=\int w d\nu$，(因为 F 有正齐次性及对 L^1 中非负函数的可加性，而关于测度的积分总是线性的). 当函数 $x\in L^+$ 时，记 $\max\{x(t)\mid t\in\Omega\}$ 为 a. 对于自然数 n，把 $(0, a]$ 区间 2^n 等分，记 $\delta=\frac{1}{2^n}a$，并记 $V_k=\{t\mid x(t)\in(k\delta,(k+1)\delta]\}$，$(k=1,2,\cdots,2^n-1)$，$V_k$ 的特征函数记为 χ_k. 令 $w_n=\delta\chi_1+2\delta\chi_2+\cdots+(2^n-1)\delta\chi_{2^n-1}$. 由于 $V_k=\{t\mid x(t)\in[k\delta, (k+1)\delta]\}\backslash\{t\mid x(t)=k\delta\}$，是两个紧集之差，$V_k$ 是 Borel 集且是可积集，因而 $F(w_n)=\int w_n d\nu$. 由作法 $w_1\leqslant w_2\leqslant w_3\leqslant\cdots$，$w_n\to x$，由定理 3 的(iv)及关于测度积分的定理(Levi 引理或 Lebesgue 控制收敛定理)，有 $F(x)=\int x d\nu$. 但因 $F(x)=f(x)$，故 $f(x)=\int x d\nu\,(x\in L^+)$. 由于 f 是线性的，而关于测度 ν 的积分也是线性的，故(1)式对 $x\in L$ 成立. 证毕.

引理 9 设 (Ω,τ) 是局部紧空间，μ 是 $(\Omega,\mathscr{B})$ 上的正则 Borel 测度，则对于任何 $B\in\mathscr{B}$，$\mu(B)=\sup\{\mu(A)\mid A\subset B, A$ 是紧集$\}$.

证 先设 $B\in\mathscr{B}$ 且 $\bar{B}$ 是紧集，记 $B_1=\bar{B}\backslash B$，由 μ 是 $\mathscr{B}$ 上正则测度，对 $\varepsilon>0$，有开集 $V\supset B_1$ 使 $\mu(V)<\mu(B_1)+\varepsilon$. 于是 $A=\bar{B}\backslash V$ 是紧集，$A\subset B$. 因为 $\mu(\bar{B}\cap V)<\mu(B_1)+\varepsilon$，所以 $\mu(A)=\mu(\bar{B})-\mu(\bar{B}\cap V)>\mu(\bar{B})-\mu(B_1)-\varepsilon=\mu(B)-\varepsilon$，由此有

$\mu(B)=\sup\{\mu(A)\mid A\subset B, A$ 紧$\}$.

由于 $\mathscr{B}$ 是 Ω 的紧集全体张成的 σ-环，而可以被一列紧集所覆盖的集全体是 σ-环. 所以对 $B\in\mathscr{B}$，有一列 Ω 的紧集$\{A_n\}$使 $B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. 由此 B 可以写成一列两两不相交的 Borel 集$\{B_n\}$的

和集，且 $B_n \subset A_n$. 对于 $\varepsilon>0$，有 B_n 的闭子集 $\widetilde{B}_n$ 使 $\mu(\widetilde{B}_n)>\mu(B_n)-\frac{\varepsilon}{2^n}$. 如果 $\mu(B)=+\infty$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)=+\infty$，即知 $\sum_{k=1}^{l}\mu\widetilde{B}_k$ 当 l 增大时，可以任意地大. 如果 $\mu(B)<+\infty$，则先取 l 使 $\sum_{k=l+1}^{\infty}\mu(B_k)<\varepsilon$，从而 $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{l}\widetilde{B}_k\right)>\mu(B)-2\varepsilon$. 且 $\bigcup_{k=1}^{l}\widetilde{B}_k$ 是紧集，总之，都有 $\mu(B)=\sup\{\mu(A)\mid A\subset B, A$ 是紧集$\}$. 证毕.

系 设 f 是局部紧空间 (Ω,τ) 上的积分，ν 是定理 7 中所作的测度. 如果 $A\in\mathscr{B}$ 使 $\nu(A)<+\infty$，则 A 是 f-可积集.

证 由 ν 是正则测度，对 $\varepsilon>0$，有开集 V 及紧集 B 使得 $V\supset A\supset B$，且 V 是 Borel 集，$\nu(B)<\nu(A)+\varepsilon$，$\nu(A)<\nu(B)+\varepsilon$. 由于 χ_V 是下半连续的，$\chi_V\in L^1$，且 $\chi_B\in L^1$，而 $\|\chi_A-\chi_B\|=F(\chi_A-\chi_B)\leqslant F(\chi_V-\chi_B)$，由于 $\chi_V-\chi_B=\chi_{V\setminus B}$ 是开集的特征函数，所以是下半连续，且 $F(\chi_{V\setminus B})\leqslant F(\chi_V)<+\infty$，所以 $\chi_{V\setminus B}\in L^1$，$\|\chi_{V\setminus B}\|+\|\chi_B\|=\|\chi_V\|$. 因而 $\|\chi_A-\chi_B\|\leqslant\|\chi_V\|-\|\chi_B\|<2\varepsilon$，由 $\chi_B\in L^1$ 即知 $\chi_A\in L^1$，即 A 是 f-可积集. 证毕.

定义 设 (Ω,τ) 是局部紧空间，$\mathscr{B}$ 是 (Ω,τ) 的 Borel 集类，$w:\Omega\to\mathbf{R}$，如果对任何 $A\in\mathscr{B}$，w 在 A 上 $\mathscr{B}$ 可测，则称 w 是 (Ω,τ) 上的**Borel 可测函数**，简称为可测函数. 又如果 μ 是 $\mathscr{B}$ 上的 Borel 测度，w 是 Ω 上的可测函数，且有 $A\in\mathscr{B}$ 使 w 在 A 外为 0，并且在 A 上 w 关于 μ 可积，则称 w（在 Ω 上）关于 μ **可积**. 并称 $\int_A wd\mu$ 为 w（在 Ω 上）关于 μ 的积分，记作为 $\int\Omega wd\mu$ 或 $\int wd\mu$.

这是通常的关于测度的积分的定义.

定理 8 设 f 是局部紧空间 (Ω,τ) 上的积分，则使得 $f(x)=$

$\int xd\nu(x\in L)$的 $\mathscr{B}$ 上正则 Borel 测度 ν 是唯一的.

证 前面已经作出了一个正则测度 ν 使得 $f(x)=\int xd\nu(x\in L)$,如果μ也是$\mathscr{B}$上的正则测度且也使此式成立,就是要证明$\mu=\nu$.

设 V 是(Ω,τ)中开集且 $\bar{V}$ 是紧集, 于是可取一列$\{x_n\}\in L^+$, $x_n\leqslant\chi_V$ 且 $f(x_n)\to g(\chi_V)$, 并可使 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots$. 记 $u=\lim x_n$(点点收敛的极限). 由关于测度积分的极限定理 (Levi 引理或 Lebesgue控制收敛定理), $\int ud\mu=\lim\int x_n d\mu=\lim f(x_n)=g(\chi_V)=\nu(V)$而因 $u\leqslant\chi_V$, 故$\nu(V)\leqslant\int\chi_V d\mu=\mu(V)$.

当 $A\in\mathscr{B}$ 且 $\bar{A}$ 是紧集时, 由于 ν、μ都是正则测度, $\nu(A)$, $\mu(A)$分别是 $\inf\{\nu(V)\mid V\supset A, \bar{V}$ 是紧集$\}$及 $\inf\{\mu(V)\mid V\supset A, \bar{V}$ 紧$\}$, 因此 $\nu(A)\leqslant\mu(A)$.

特别对于(Ω,τ)的紧集 A. 作 $x\in L^+$ 且 x 在 A 上取值 1. 则 $\int(x-\chi_A)d\nu\leqslant\int(x-\chi_A)d\mu$, $\int\chi_A d\nu\leqslant\int\chi_A d\mu$, 但$\int xd\nu=\int xd\mu$, 由此, 两个不等式都成为等式, 从而 $\nu(A)=\mu(A)$.

由引理 8, 从 μ, ν 在紧集上取值相等即知在任何 Borel 集上都相等, 所以 $\mu=\nu$. 证毕.

于是, 局部紧空间(Ω,τ)上的积分 f, 就相应于$(\Omega,\mathscr{B})$上的(唯一的)一个正则 Borel 测度 ν. 这时, 可以讨论 Ω 上关于 ν 可积的函数, 实际上这与前面的 f-可积差不多是一样的, 只是仅限于 Borel 可测函数.

定理 9 设 f 是局部紧空间(Ω,τ)上的积分, ν 是相应于 f 的 $\mathscr{B}$ 上正则测度, $w:\Omega\to\mathbf{R}$ 且 w 在 Borel 集 A 外为 0, 则 w 关于 ν 可积的充分必要条件是: w 是 Borel 可测函数且 $w\in L^1$.

证 只要对于非负函数 w 来证明.

必要性　设w关于ν可积，即$\int_A w d\nu < +\infty$，只要证明$w \in L^1$即可. 首先，如果w是 Borel 集B的特征函数，w关于ν可积也即$\nu(B) < +\infty$，由引理 9 的系，B是可积集，也即$w \in L^1$，且$\|w\| = \nu(B) = \int w d\nu$. 进一步，如果$w$是 Borel 集的特征函数的正系数线性组合(这种函数也即是取值只有有限的数的 Borel 可测函数)，例如$w = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{B_k}$. 这时，$w$关于$\nu$可积时，$\chi_{B_k}$关于$\nu$可积，从而$\chi_{B_k} \in L^1$，所以$w \in L^1$. 而且由引理 7 系 4，

$$\|w\| = \sum_{k=1}^{n} a_k \|\chi_{B_k}\| = \int w d\nu.$$

对于关于ν可积的w，由关于测度的积分的定义，有一列$\{w_n\}$，每个w_n是Borel 集的特征函数的正系数线性组合，且$w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots$，$w_n \to w$，而$\int w d\nu = \lim_n \int w_n d\nu$，$\int (w - w_n) d\nu \to 0$. 对于自然数$k$，$\{w_n - w_k\}$$(n = k, k+1, \cdots)$使$w_n - w_k \to w - w_k$，由定理 3 的(iv)，

$$\|w - w_k\| = \lim_n \|w_n - w_k\| = \lim_n \int (w_n - w_k) d\nu = \int (w - w_k) d\nu.$$

由于$w_k \in L^1$，$\|w - w_k\| \to 0$$(k \to \infty)$，故$w \in L^1$. 并且$\|w\| = \lim_k \|w_k\| = \lim_k \int w_k d\nu = \int w d\nu$.（上面$w_n - w_k$在$n \geqslant k$时是特征函数的正系数线性组合，所以$\|w_n - w_k\| = \int (w_n - w_k) d\nu$.）

充分性　由w是 Borel 可测且$w \in L^1$时，有一列$\{x_n\}$是L^+中元，使$\|w - x_n\| \to 0$，而$\|x_m - x_n\| \to 0$$(m, n \to \infty)$，即$\int |x_m - x_n| d\nu \to 0$，而$\{x_n\}$有子列(不妨设即为$\{x_n\}$)使$x_n$是$f$-几乎处处收敛于$w$的. 同样由关于$\nu$可积函数的完备性，有关于$\nu$可积的$\tilde{w}$使$\int |\tilde{w}$

$-x_n|d\nu\to 0$，而 w 与 $\bar{w}$ 是 ν-几乎处处相等的．证毕．

对局部紧空间 Ω，令 $\|x\|=\max\limits_{t\in\Omega}|x(t)|$ $(x\in L)$，这时 $\|\cdot\|$ 是 L 的范数．$(L,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，在 L 中用函数的通常乘法，就是个赋范代数．如果把 Ω 作单点紧化扩张 $\widetilde{\Omega}$，$(L,\|\cdot\|)$ 是 $C_r(\widetilde{\Omega})$ 的子代数．

引理10 设 Ω_1,Ω_2 是两个局部紧空间，作乘积拓扑空间 $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$，则 Ω 也是局部紧空间，且 $\{xy\mid x\in L(\Omega_1),\ y\in L(\Omega_2)\}$ 所张成的线性子空间在 $L(\Omega)$ 中稠密．

证 直接可知 Ω 是局部紧空间．$\{xy\mid x\in L(\Omega_1),\ y\in L(\Omega_2)\}$ 张成的线性子空间是个 $L(\Omega)$ 的子代数．当 $(t_1,s_1),(t_2,s_2)$ 是 Ω 中不同的点时，有 $\{xy\mid x\in L(\Omega_1) y\in L(\Omega_2)\}$ 中函数 xy，使得

$$(xy)(t_1,s_1)=1,\ (xy)(t_2,s_2)=0,$$

因而对于 $L(\Omega)$ 中的 z 及 Ω 中两个不同的点，总有 $\{xy\mid x\in L(\Omega_1),\ y\in L(\Omega_2)\}$ 的线性组合在这两点处的值与 z 相等．由 Stone-Weierstrass 定理，即知由 $\{xy\mid x\in L(\Omega_1), y\in L(\Omega_2)\}$ 张成的线性子空间在 $L(\Omega)$ 中稠密．证毕．

定义 设 Ω_1,Ω_2 是两个局部紧空间，f_1,f_2 分别是 Ω_1，Ω_2 的积分，Ω 是 Ω_1,Ω_2 的乘积拓扑空间，使得

$$f(xy)=f_1(x)f_2(y)\quad (x\in L(\Omega_1), y\in L(\Omega_2))$$

的 Ω 上积分 f 称为 f_1 与 f_2 的乘积积分．

这里可以利用定理7及定理8，当 f_1，f_2 分别是 Ω_1,Ω_2 上的积分时，相应有 Ω_1,Ω_2 的正则 Borel 测度 ν_1,ν_2，再作 ν_1 与 ν_2 的乘积测度 $\nu=\nu_1\times\nu_2$，Ω_1，Ω_2 的 Borel 集全体 $\mathscr{B}_1$ 与 $\mathscr{B}_2$ 作出的乘积可测空间 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{B}_1\times\mathscr{B}_2)$ 就是 $(\Omega,\mathscr{B})$，而 ν 是 Ω 的正则测度，对于 $z\in L(\Omega)$，令

$$f(z)=\int z d\nu,$$

f 就是个 Ω 上的积分，当 $x\in L(\Omega_1)$，$y\in L(\Omega_2)$ 且 $z=xy$ 时．易见 $f(z)=f_1(x)f_2(y)$，由于这种函数的线性组合在 $L(\Omega)$ 中稠密，所以使 $f(z)=f_1(x)f_2(y)$ $(x\in L(\Omega_1)$ $y\in L(\Omega_2)$，$z=xy)$ 的 f 是唯一的．

4.3.2 局部紧群上的 Haar 积分

定义 设 G 是个群．又 τ 是 G 的拓扑，如果

(i) 乘法：$G\times G\to G$: $(t,s)\longmapsto ts$ 是连续的；

(ii) 求逆：$G\to G$: $t\longmapsto t^{-1}$ 是连续的．

则称 (G,τ) 是**拓扑群**．

如果 (G,τ) 是拓扑群，且 (G,τ) 是局部紧空间，则称 (G,τ) 是**局部紧群**．

作为拓扑群的定义，并不要求 (G,τ) 是 Hausdorff 空间．但为简单起见，下面设讨论的拓扑群是 Hausdorff 空间．群 G 中的元以 t,s 等表示，群的单位元记为 e．对于 G 的子集 A，B，记 $AB=\{ts\mid t\in A, s\in B\}$，$A^{-1}=\{t^{-1}\mid t\in A\}$，如在拓扑线性空间的情况一样，通常在 A，B 是非空集的情况下用这些记号的．否则也认为 AB (及 A^{-1}) 是空集．

线性空间(用加法作为乘法)是群，拓扑线性空间是拓扑群，但只有有限维的(Hausdorff 的)拓扑线性空间才是局部紧的．在拓扑群中没有数乘运算，所以更一般些．R，T．整数集(用离散拓扑)，n 阶满秩阵全体等都是拓扑群(且都是局部紧群)．

引理 1 设 (G,τ) 是拓扑群，则

(i) 对于 $t_0\in G$，映射 $G\to G$: $t\longmapsto tt_0$ 及 $t\longmapsto t_0t$ 是同胚；

(ii) $G\to G$ 的映射 $t\longmapsto t^{-1}$ 是同胚；

(iii) 对于 e 的邻域 V，有 e 的邻域 W 使得 $W=W^{-1}$ 且 $WW\subset V$．

证 由拓扑群的定义,(i),(ii) 是显然的,故仅证明(iii).

(iii) 由乘法在(e,e)处的连续性,对于e的邻域V,有e的两个邻域V_1, V_2使$V_1V_2\subset V$. 记$U=V_1\cap V_2$, 则U是e的邻域且$UU\subset V$,令$W=U\cap U^{-1}$,这时W是e的邻域,$W=W^{-1}$且$WW\subset V$,W就满足(iii)的要求. 证毕.

引理2 设(G,τ)是拓扑群, x是(G,τ)上的(实或复值)连续函数,且在紧集A外x取值0,则对$\varepsilon>0$, 有e的邻域V, 使得当$t,s\in G$使$t^{-1}s\in V$时成立$|x(t)-x(s)|<\varepsilon$.

证 由x的连续性,对每个$t\in G$, 有t的邻域$V(t)$, 使得当$t_1\in V(t)$时,$|x(t_1)-x(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是对于这$V(t)$中任何两个元$t_1,t_2$,都成立$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$.

在对t取出这样的$V(t)$后, 因为$t^{-1}V(t)$是e的邻域, 由引理1,有e的邻域$W(t)$, 使得$(W(t))^{-1}=W(t)$, $W(t)W(t)\subset t^{-1}V(t)$而$tW(t)$是$t$的邻域. 因为$\{tW(t)|t\in\Omega\}$覆盖$A$,$A$是紧集,故有有限个$t_1$, t_2, $\cdots$, t_n使得$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}(t_kW(t_k))$. 记$V=\bigcap_{k=1}^{n}W(t_k)$. 下面证明这5$V$满足要求:设$t,s\in\Omega$且$t^{-1}s\in V$, 即要证明$|x(t)-x(s)|<\varepsilon$. 如$t,s$都不在$A$中,当然这不等式成立, 不妨设$t\in A$,于是有$1,2,\cdots,n$中的$k$,使$t\in t_kW(t_k)$,但由于$t^{-1}s\in W(t_k)$,所以$s\in t_kW(t_k)W(t_k)\subset V(t_k)$,因而$t,s$在同一个$V(t_k)$中,所以$|x(t)-x(s)|<\varepsilon$. 证毕.

系 在引理条件中,$t^{-1}s\in V$可以改成$ts^{-1}\in V$.

证 当x是G上连续函数且在紧集A外为0时, 令$y(t)=x(t^{-1})$,因为$t\longmapsto t^{-1}$是同胚,所以y是连续的且也在紧集外为0,因而对y用引理2,有e的邻域V,满足引理2要求. 当t, $s\in G$, $ts^{-1}\in V$时,$(t^{-1})^{-1}(s^{-1})\in V$,从而$|y(t^{-1})-y(s^{-1})|<\varepsilon$, 即

$|x(t)-x(s)|<\varepsilon$. 证毕.

由此，对于在某紧集外为 0 的 G 上连续函数 x，对于 $\varepsilon>0$，有 e 的邻域 V，使得当 t，$s\in G$ 且 $ts^{-1}\in V$ 或 $t^{-1}s\in V$ 时，$|x(t)-x(s)|<\varepsilon$.

下面对于局部紧群来讨论，仍如前一小节中那样，记在某一紧集外为 0 的 G 上实值函数全体为 $L(G)$，相应地，非负的 $L(G)$ 中函数记为 $L^+(G)$. 简记为 L 及 L^+.

对于 $x\in L, s\in G$，记 $x_s(t)=x(st)$ $(t\in G)$，$x^s(t)=x(ts^{-1})$ $(t\in G)$. 易见 x_s 及 x^s 仍是 L 中元. 当 $x\in L^+$ 时，x_s，x^s 在 L^+ 中. 并且 $x_{s_1s_2}=(x_{s_1})_{s_2}$，$x^{s_1s_2}=(x^{s_1})^{s_2}$，$(x_{s_1})^{s_2}=(x^{s_2})_{s_1}$.

引理 3 设 (G,τ) 是局部紧群，$x,y\in L^+$ 且 $x\neq 0, y\neq 0$，则有有限个元 $t_1\cdots,t_n$ 及正数 $c_1,\cdots c_n$ 使得 $\sum_{k=1}^{n}c_kx_{t_k}\geqslant y$.

证 设 A 是 (G,τ) 的紧集，由于 $x\neq 0$，有 $t_0\in G$，使 $x(t_0)>0$，故有 e 的邻域 W 使 x 在 t_0W 上取值大于 0.

于是对 $s\in G$，x_s 在 $st_0^{-1}W$ 上取值大于 0，而因为 $\{st_0^{-1}W\}$ 当 $s\in G$ 中取一切元时，是覆盖 A 的，故有有限个 s_1，$s_2\cdots$，s_n，使得 $\bigcup_{k=1}^{n}(s_kt_0^{-1}W)\supset A$，从而 $\sum_{k=1}^{n}x_{s_k}$ 在 A 上点点大于 0. 因而 $\sum_{k=1}^{n}x_{s_k}$ 在 A 上的最小值也大于 0，记为 a.

由于 $y\in L^+$，y 在某紧集 A 外为 0，而记 $\|y\|=\max_{t\in G}|y(t)|$ 为 b，于是，如上所证有有限个 G 中元 $t_1,\cdots t_n$ 使得 $\sum_{k=1}^{n}x_{t_k}$ 在 A 上的最小值 $a>0$，取 $c_1,\cdots,c_n=\frac{b}{a}$，则 $\sum_{k=1}^{n}c_kx_{t_k}$ 在 A 上的值都至少为 b，所以 $\sum_{k=1}^{n}c_kx_{t_k}\geqslant y$. 证毕.

对于局部紧群 G 上的 L^+ 中两个非零函数 x, y, 记使得 $y\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k x_{t_k}$ 的 $\sum_{k=1}^{n}c_k$ 的下确界为 $(y;x)$. 这是与 x, y 这一对函数有关的数.

定理 1 设 (G,τ) 是局部紧群, 则 $(y;x)$ $(x,y\in L^+, x\neq 0, y\neq 0)$ 具有下列性质:

(i) $(y;x)=(y_s;x)$;

(ii) $(y+z;x)\leqslant(y;x)+(z;x)$;

(iii) 当 $y\leqslant z$ 时, $(y;x)\leqslant(z;x)$;

(iv) $(ay;x)=a(y;x)$;

(v) $(y;x)\leqslant(y;z)(z;x)$;

(vi) $(y;x)\geqslant\dfrac{\|y\|}{\|x\|}$,

其中 $x,y,z\in L^+$, $x,y,z\neq 0$, $a>0$, $s\in G$.

证 由 $(y;x)$ 的定义, 性质(ii)与(iii)是显然的. 如果 x, y 是 L^+ 中函数, $y\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k x_{t_k}$, 那么 $y_s\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k x_{t_k s}$, 由此 $(y_s;x)\leqslant(y;x)$ $(s\in G)$, 又因 $y=(y_s)_{s^{-1}}$. 即知 $(y_s;x)=(y;x)$. 同样由 $y\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k x_{t_k}$, $ay\leqslant\sum_{k=1}^{n}ac_k x_{t_k}$, 可知 $(ay,x)\leqslant a(y;x)$, 同样由 $\left(\dfrac{1}{a}y_1;x\right)\leqslant\dfrac{1}{a}(y_1;x)$ 并令 $y_1=ay$, 即得 $a(y;x)\leqslant(ay;x)$, 所以 $(ay;x)=a(y;x)$. 这就证明了 (i) 及 (iv), 下面证明最后两个不等式.

(v) 对 $\varepsilon>0$, 有 $c_1,\cdots,c_n$ 及 $t_1,\cdots,t_n$ 使得 $y\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k z_{t_k}$ 且 $\sum_{k=1}^{n}c_k<(y;z)+\varepsilon$. 同样有 $d_1,\cdots,d_m$ 及 $s_1,\cdots,s_m$ 使 $z\leqslant\sum_{j=1}^{m}d_j x_{s_j}$

且 $\sum_{j=1}^{m} d_j < (z, x) + e$. 由此得到

$$y \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_k z_{t_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_k d_j x_{t_k s_j},$$

所以 $(y; x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_k d_j \leqslant ((y; z) + e)((z; x) + e)$. 由 e 是任意正数，所以 $(y; x) \leqslant (y; z)(z; x)$.

(vi) 如果 $y \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_k x_{t_k}$, 设在 t_0 处 $y(t_0) = \|y\|$, 于是 $\|y\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_k x_{t_k}(t_0) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right)\|x\|$. 所以 $\sum_{k=1}^{n} c_k \geqslant \frac{\|y\|}{\|x\|}$. 因而 $(y; x) \geqslant \frac{\|y\|}{\|x\|}$. 证毕.

定理 2　设 (G, τ) 是局部紧群，$x_0 \in L^+$, $x_0 \neq 0$, 对于 x, $y \in L^+$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, 记 $\Phi_x(y) = \frac{(y; x)}{(x_0; x)}$, 那末，对于 L^+ 中任何非零元 y, z, 及 $e > 0$, 有 e 的邻域 V, 使得当 $x \in L^+$ 且 x 在 V 外为 0 时，成立 $\Phi_x(y) + \Phi_x(z) \leqslant \Phi_x(y+z) + e$.

证　设 x_0, y, z 是 L^+ 中三个非零函数，$e > 0$. 由于 y, $z \in L^+$, $y + z$ 在某紧集 A 外为 0, 取 y_0 在 A 上为 1, $y_0 \in L^+$. 取正数 δ 及 e_1 (这两个数的要求见后面), 记 $z_0 = y + z + \delta y_0$ 并令 $\tilde{y} = \frac{y}{z_0}$, $\tilde{z} = \frac{z}{z_0}$, 在 z_0 取值为 0 的点上，$\tilde{y}$ 及 $\tilde{z}$ 也规定为 0. 由作法可知 $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ 都是连续的. 由引理 2, 有 e 的邻域 V, 使得当 $t, s \in G$, $t^{-1}s \in V$ 时，
$|\tilde{y}(t) - \tilde{y}(s)| < e_1$, $|\tilde{z}(t) - \tilde{z}(s)| < e_1$.

现设 $x \in L^+$, $x \neq 0$ 且 x 在 V 外为0, 如果数 $c_1, \cdots, c_n$ 及元 $t_1, \cdots t_n$ $(c_1, \cdots, c_n > 0$, $t_1, \cdots, t_n \in G)$ 使 $z_0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_k x_{t_k}$, 于是，当 $t \in G$ 使 $x_{t_k}(t) \neq 0$, 即 $x(t_k t) \neq 0$ 时，$t_k t \in V$, 从而 $|\tilde{y}(t_k^{-1}) - \tilde{y}(t)| < e_1$, $|\tilde{z}$

$(t_k^{-1})-\tilde{z}(t)|<\varepsilon$. 因此，

$$y(t)=z_0(t)\tilde{y}(t)\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k x(t_k t)[\tilde{y}(t_k^{-1})+\varepsilon_1],$$

$$z(t)=z_0(t)\tilde{z}(t)\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k x(t_k t)[\tilde{z}(t_k^{-1})+\varepsilon_1],$$

所以，$y+z\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k(1+2\varepsilon_1)x_{t_k}$. 由这个不等式即得到

$$\Phi_x(y)+\Phi_x(z)\leqslant\Phi_x(z_0)(1+2\varepsilon_1)\leqslant[\Phi_x(y+z)+\delta\Phi_x(y_0)]\cdot(1+2\varepsilon_1).$$

对于给定的 $x_0, y, z\in L^+$(都是非零函数)及 $\varepsilon>0$, 先取 y_0 如上，由定理 1 的(V)，$\Phi_x(y)\leqslant(y;x_0)$，$\Phi_x(z)\leqslant(z;x_0)$，再取 δ 及 ε_1 使得 $\delta(1+2\varepsilon_1)(y_0;x_0)+(y+z;x_0)2\varepsilon_1<\varepsilon$, 于是如上取 V,

$$\delta\Phi_x(y_0)(1+2\varepsilon_1)+\Phi_x(y+z)2\varepsilon_1<\varepsilon$$

对于在 V 外为 0 的 $x\in L^+(x\neq0)$ 都成立. 证毕.

定义 设 (G,τ) 是局部紧群，f 是 G 上的积分. 如果对任何 $x\in L$ 及 $s\in G$ 成立 $f(x_s)=f(x)$, 则称 f 是 G 上的**左不变积分**. 类似地定义 G 上的**右不变积分**(即是使 $f(x^s)=f(x)$ 对任何 $x\in L$ 及 $s\in G$ 成立的 G 上积分).

定理 3 在局部紧群 G 上存在非零的左不变积分.

证 取定 L^+ 中的非零函数 x_0, 对于 L^+ 中非零函数 y, 记 $K_y=\left[\frac{1}{(x_0;y)}(y;x_0)\right]$. K_y 是闭区间，是个紧空间. 把 y 作为足标，作乘积空间 $\times K_y$. 对于 L^+ 中非零函数 x, 作 $\Phi_x(y)=\frac{(y;x)}{(x_0;x)}$ ($y\in L^+$, y 非零) 于是 Φ_x 是 $\times K_y$ 中的点.

对于 e 的邻域 V, 取在 V 外为 0 的 L^+ 中非零函数 x, 并把这样的 Φ_x 全体记为 φ_V, 易见 $\{\varphi_V|V$ 是 e 的邻域$\}$ 是 $\times K_y$ 中的联族，因而有 $\varphi\in\times K_y$ 是 $\{\varphi_V\}$ 的公共接触点.

于是在 φ 的任何邻域中. 对任何 e 的邻域 V，都有 φ_V 的元在 φ 的这邻域中. 由 $\times K_y$ 的乘积拓扑的定义，即知对于 L^+ 中的有限个 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ (y_k 都非零) 及 $\varepsilon>0$，以及 e 的邻域 V，必有 L^+ 中在 V 外为 0 的非零的 x，使得

$$|\varphi(y_k)-\phi_x(y_k)|<\varepsilon \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

由于 Φ_x 有性质 $\Phi_x(y_s)=\Phi_x(y)$. $\Phi_x(ay)=a\Phi_x(y)$ (x, y 是 L^+ 中非零函数，$s\in G$)，因而 φ 也有这两个性质. 下面证明 φ 有可加性：设 $y, z\in L^+$，$y\neq 0$，$z\neq 0$，对 $\varepsilon>0$，由定理 2 可取 e 的邻域 V 使定理 2 中的结论成立. 又对这个 V，有在 V 外为 0 的 L^+ 中非零函数 x，使得

$$|\varphi(y)-\Phi_x(y)|<\varepsilon, \ |\varphi(z)-\Phi_x(z)|<\varepsilon,$$

$$|\varphi(y+z)-\Phi_x(y+z)|<\varepsilon$$

而定理 2 说明 $|\Phi_x(y)+\Phi_x(z)-\Phi_x(y+z)|<\varepsilon$，因此，

$$|\varphi(y)+\varphi(z)-\varphi(y+z)|<4\varepsilon,$$

因为 ε 是任意正数，所以 $\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi(y+z)$.

对于零函数，规定 φ 的值为 0，于是，φ 是 L^+ 上的泛函，φ 有可加性，正齐次性及 $\varphi(y_s)=\varphi(y)$ ($y\in L^+$, $s\in G$).

对于 L 中的 x，x 可写成两个 L^+ 中的元之差. 当 $x\in L$ 且 $x=y_1-z_1=y_2-z_2$ ($y_1, y_2, z_1, z_2\in L^+$) 时，因 $y_1+z_2=z_1+y_2$，$\varphi(y_1)+\varphi(z_2)=\varphi(z_1)+\varphi(y_2)$，令 $f(x)=\varphi(y_1)-\varphi(z_1)$ ($=\varphi(y_2)-\varphi(z_2)$)，易见 f 是 L 上的积分，且 $f(x_s)=f(x)$ ($x\in L$, $s\in G$)，而且当 y 是 L^+ 中非零函数时，$f(y)=\varphi(y)>0$，f 是 G 上的非零的左不变积分. 证毕.

定理 4　局部紧群上非零的左不变积分在相差常数倍的意义下是唯一的.

证　前面已经作出了一个 G 上的左不变积分 f，设 g 也是 G 上的左不变积分，要证明 g 是 f 的倍数.

只要对于 L^+ 中的非零函数来讨论. 设 $x\in L^+, x\neq 0$. x 在紧集 A 外为 0, 取 W 是包含 A 的开集且 $\bar{W}$ 是紧集, 再取 $\tilde{x}\in L^+$ 使 $\tilde{x}$ 在 W 上为 1. 对于 $\varepsilon>0$, 取 e 的邻域 V 满足下列性质: (i) $V^{-1}=V$; (ii) 对任何 $s_1 s_2\in V, t\in G$ 成立 $|x_{s_1}(t)-x^{s_2}(t)|<\varepsilon$; (iii) $V\subset W$ 且 $AV\subset W$. 由引理 2, 并因 A 是紧集, 这样的 V 是可以取的. 于是, 当 $s\in V$ 时,

$$x(ts)=x(ts)\tilde{x}(t),\ x(st)=x(st)\tilde{x}(t)\quad (t\in G),$$

并且由此可知 $|x(ts)-x(st)|<\varepsilon\tilde{x}(t)\,(t\in G)$, 取在 V 外为 0 的 L^+ 中函数 z 使 $z(t^{-1})=z(t)\,(t\in G)$, 由于 f, g 都是关于测度的积分, 由 Fubini 定理, 如果把相应于 f, g 的测度记为 μ, ν,

$$\begin{aligned} f(z)g(x)&=\int z d\mu\int x d\nu=\int z(s)d\mu(s)\int x(t)d\nu(t)\\ &=\int z(s)d\mu(s)\int x(st)d\nu(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(z)f(x)&=\int z(t)d\nu(t)\int x(s)d\mu(s)\\ &=\int z(s^{-1}t)d\nu(t)\int x(s)d\mu(s)\\ &=\int z(t^{-1}s)d\nu(t)\int x(s)d\mu(s)\\ &=\iint z(s)x(ts)d\mu(s)d\nu(t),\end{aligned}$$

所以 $f(z)g(x)-g(z)f(x)=\iint z(s)[x(st)-x(ts)]d\mu(s)d\nu(t)$,

因而

$$\begin{aligned} |f(z)g(x)-g(z)f(x)|&\leqslant\int z(s)d\mu(s)\int\varepsilon\tilde{x}(t)d\nu(t)\\ &=f(z)g(\tilde{x})\varepsilon.\end{aligned}$$

同样, 对于又一个 L^+ 中的非零函数 y, 也可作 $\tilde{y}$, 并对于 $\varepsilon>0$, 又可取相应的 e 的邻域 U, 而可以取 z 是在 $U\cap V$ 外为 0 的函数,

也即 z 同时可以使得不等式

$$|f(z)g(x)-g(z)f(x)|\leqslant \varepsilon f(z)g(\tilde{x}),$$

$$|f(z)g(y)-g(z)f(y)|\leqslant \varepsilon f(z)g(\tilde{y}),$$

同时成立. 因此,对于任何 L^+ 中两个非零函数 x,y,取定 $\tilde{x},\tilde{y}$ 后,对于任一个 $\varepsilon>0$,总有 L^+ 中 z 使上两式成立,只要 z 取得较小),从而

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}-\frac{g(y)}{f(y)}\right|\leqslant \varepsilon\left(\frac{g(\tilde{x})}{f(x)}+\frac{g(\tilde{y})}{f(y)}\right),$$

由于 ε 是任意正数,所以

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(y)}{f(y)} \quad (x,y\in L^+, x\neq 0, y\neq 0),$$

因而 g 是 f 的倍数. 证毕.

在上面已证明过,对于 $x\in L^+$, $x\neq 0$, $f(x)>0$, 所以除法可以做.

定义 局部紧群 G 上的非零左不变积分称为 G 上的**左 Haar 积分**. 相应的 G 的左不变(正则)测度 μ 称为**左 Haar 测度**.

引理 4 局部紧群 G 是紧的充分必要条件是: G 的左不变测度 μ 使得 $\mu(G)<+\infty$.

证 必要性 由 G 是紧的,故 $\mu(G)<+\infty$.

充分性 用反证法,如果 G 不是紧的,取 e 的邻域 W 使 $\overline{W}$ 是紧集,因为有限个紧集的和集是紧集,所以对于 G 中任何有限个元 $t_1,t_2,\cdots t_n$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} t_k\overline{W}$ 不会等于 G, 所以必有 G 中元 $t_{n+1}\overline{\in}\bigcup\limits_{k=1}^{n} t_kW$, 所以有一列 G 中元 $\{t_n\}$, 使得 $t_{n+1}\overline{\in}\bigcup\limits_{k=1}^{n} t_kW\ (n=1, 2, \cdots)$. 再取 e 的邻域 V 使 $VV\subset W, V=V^{-1}$, 于是 $\{t_nV\}$ 是一列两两不交的开集. 但对于 e 的邻域 V, $\mu(V)>0$, 从而由 μ 的左不变性, μ

$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} t_k V\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(V)=+\infty$，矛盾. 证毕.

类似地，局部紧群 G 上存在右不变的非零积分. 相应地有右不变的正则测度，在相差常数倍的意义下是唯一的. 它们称为 G 的**右 Haar积分及右 Haar 测度**.

下面就用 f，μ 分别表示 G 上的左不变积分及相应的左不变测度. 当G是紧群时，通常取左不变测度 μ 使$\mu(G)=1$. 一般说来，左不变测度不是右不变的.

对于 G 中元 s，令 $h(x)=f(x^s)$ $(x\in L)$，h 显然是 L 上的积分，又对于 $x\in L$ 及 $t\in G$，$h(x_t)=f((x_t)^s)=f((x^s)_t)=f(x^s)=h(x)$，所以 h 是 G 的左不变积分. 由左不变积分的唯一性，因而有数 $c(>0)$ 使$h=cf$，这数是与 s 有关的，但对于$s\in G$，$f(x^s)=cf(x)$ 是对任何 $x\in L$ 成立的. 由此可知，当 $x\in L$ 使 $f(x)=0$ 时，$f(x^s)=0(s\in G)$.

定义 设 f 是局部紧群G 的左 Haar 积分，称 $\Delta:G\to(0,\infty)$：$s\longmapsto\dfrac{f(x^s)}{f(x)}$为$G$ 的**模函数**. 如果 $\Delta(s)=1(s\in G)$，就称G是**单模群**(unimodular group).

由上所述，模函数Δ的定义中，x 可取任何 L^+ 中非零元，或者取成是使 $f(x)\neq0$ 的任何 L 中元，而Δ与元 x 的取法是无关的. 而局部紧群G是单模群也就等价于G的左 Haar 积分是右Haar 积分.

引理 5 如果局部紧群G是交换群或紧群，则G是单模群.

证 当G是交换群时，因为 $x^s=x_{s^{-1}}$，故 $f(x^s)=f(x_{s^{-1}})=f(x)$，从而 $\Delta(s)=1(s\in G)$，所以G是单模群.

如果G是紧群，记 x 是 G 上恒等于 1 的函数，则 $x\in L^+$ 而 $x^s=x$，故 $f(x^s)=f(x)$，由此G是单模群. 证毕.

引理 6 设 G 是局部紧群，则 G 的模函数 Δ 是 $G\to(0,\infty)$ 的连续同态(这里同态是指群的同态，$(0,\infty)$ 是关于实数乘法的群)。

证 取 L^+ 中的非零函数 x，由于 $x^{st}=(x^s)^t$，所以得

$$\Delta(st)=\frac{f(x^{st})}{f(x)}=\frac{\Delta(t)f(x^s)}{f(x)}=\Delta(t)\Delta(s)=\Delta(s)\Delta(t),$$

所以 Δ 保持乘法，即 Δ 是群的同态. 因此，只要证明 Δ 在 e 点的连续性就可以了. 取紧集 A 使 x 在 A 外为 0，再取开集 W 使 $W\supset A$ 且 $\overline{W}$ 是紧集，作 $\tilde{x}\in L^+$，$\tilde{x}$ 在 $\overline{W}$ 上为 1. 对 $\varepsilon>0$，取 e 的邻域 V 使得当 $s\in V$ 时，$|x^s(t)-x(t)|<\varepsilon(t\in G)$，并使 $V=V^{-1}$ 且 $VV\subset W$. 于是当 $s\in V$ 时，$|x^s-x|\leqslant\varepsilon\tilde{x}$，所以 $|f(x^s)-f(x)|\leqslant\varepsilon f(\tilde{x})$，也即

$$|\Delta(s)-1|f(x)\leqslant\varepsilon f(\tilde{x}).$$

由于 $f(x),f(\tilde{x})$ 都是确定的数，因而 Δ 在 e 处连续 $(\Delta(e)=1)$，证毕.

定理 5 设 $x\in L$，记 $\tilde{x}(t)=x(t^{-1})\Delta(t^{-1})$，则 $f(\tilde{x})=f(x)$.

证 对于 $x\in L$，作 $\tilde{x}(t)=x(t^{-1})\Delta(t^{-1})$ 后，记 $h(x)=f(\tilde{x})$，h 是 L 上的积分. 对于 $x\in L$ 及 $s\in G$，考虑 $h(x_s)$，由于

$$\begin{aligned}(\tilde{x}_s)(t)&=x_s(t^{-1})\Delta(t^{-1})=x(st^{-1})\Delta(t^{-1})\\&=x((ts^{-1})^{-1})\Delta((ts^{-1})^{-1})\Delta(s^{-1})=\Delta(s^{-1})\tilde{x}(ts^{-1})\\&=\Delta(s^{-1})(\tilde{x})^s(t),\end{aligned}$$

因而 $h(x_s)=\Delta(s^{-1})f((\tilde{x})^s)=\Delta(s^{-1})\Delta(s)f(\tilde{x})=f(\tilde{x})=h(x)$，所以 h 是左不变积分. 由左不变积分的唯一性，有 $c>0$ 使 $h=cf$，数 c 是与 $x\in L$ 无关的. 下面证明 $c=1$.

对 $\varepsilon>0$，由 Δ 是连续的，故有 e 的邻域 V 使得 $V=V^{-1}$ 且 $|\Delta(t)-1|<\varepsilon$(当 $t\in V$ 时)，且可设 $\overline{V}$ 是紧集. 再取 L^+ 中非零函数 y 使 y 在 V 外为 0 且 $y(t^{-1})=y(t)(t\in G)$. 于是，

$$\tilde{y}(t)=y(t^{-1})\Delta(t^{-1})=y(t)\Delta(t^{-1}),$$

$$|\tilde{y}-y|\leqslant \varepsilon y,$$

因而$|h(y)-f(y)|=|f(\tilde{y})-f(y)|\leqslant \varepsilon f(y)$，又由$h(y)=cf(y)$，即知$|c-1|\leqslant\varepsilon$. 因为$\varepsilon$是任意正数，故$c=1$，即$h=f$. 证毕.

系 设G是局部紧群，则G的左 Haar 积分是求逆不变的（即对$x\in L$，令$z(t)=x(t^{-1})$时，$f(z)=f(x)$）充分必要条件是：G是单模群.

证 充分性 由定理 5 即得.

必要性 用反证法，如果G不是单模群，则有$t_0\in G$使$\Delta(t_0)\neq 1$，不妨设$\Delta(t_0)<1$. 于是有t_0的邻域W及$\delta>0$，使得$\Delta(t)<1-\delta$（当$t\in W$时）. 取L^+中非零函数x使x在W^{-1}外为 0，于是

$$x(t^{-1})\Delta(t^{-1})\leqslant(1-\delta)x(t^{-1})\quad (t\in G),$$

记$x_1(t)=x(t^{-1})$，就有$f(x)\leqslant(1-\delta)f(x_1)$，与假设矛盾. 证毕.

4.3.3 群代数

本节中仍设G是局部紧群，记G的 Borel 集全体为$\mathscr{B}$，μ是G的左 Haar 测度. 如在 4.3.2 中所证明的，μ是$\mathscr{B}$上的正则测度，μ有左不变性，即对于$A\in\mathscr{B}$及$s\in G$，成立$\mu(sA)=\mu(A)$. 对于G中紧集A，$\mu(A)<+\infty$，而对于G的非空开集$V(\in\mathscr{B})$，$\mu(V)>0$. 在相差正数倍的意义下，G的左 Haar 测度是唯一的.

有了$\mathscr{B}$及$\mathscr{B}$上的测度μ后，可以定义关于测度μ的积分. 首先要说明（关于$\mathscr{B}$）可测函数的概念. 对于G上的实值函数w，如果对任何$A\in\mathscr{B}$及$c\in\mathbf{R}$，$A\cap\{t\mid w(t)>c\}$都是 Borel 集，就称w在G上可测. 对于$G\to\mathbf{C}$的映射，当实部及虚部都可测时，称它是可测的.

如果w是G上的可测函数，又w在某个 Borel 集A外为 0，并且w在A上关于μ可积，就称w是G上的**关于μ的可积函数**，并称

$\int_A w d\mu$ 为 w 在 G 上**关于 μ 的积分**. 记作为 $\int w d\mu$. "关于 μ"常常略去不写. G 上可积函数全体记为 $L^1(G)$, 对于 $w\in L^1(G)$, 以 $\int |w| d\mu$ 作为 w 的范数 $\|w\|_1$, 则 $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ 是个 Banach 空间. 在 $L^1(G)$ 中, (关于 μ) 几乎处处相等的函数看作是同一个元.

对于 $p>1$, 如果 w 是 G 上可测函数且 $|w|^p\in L^1(G)$, 就称 w 是 G 上的 p 次可积函数, G 上 p 次可积函数全体记为 $L^p(G)$, 对于 $w\in L^p(G)$, 令

$$\|w\|_p=\left(\int |w|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$(L^p(G), \|\cdot\|_p)$ 也是个 Banach 空间, $L^p(G)$ 中, 几乎处处相等的函数也看作是同一个元.

如果 $p, q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 当 $w_1\in L^p(G)$, $w_2\in L^q(G)$ 时, $w_1 w_2\in L^1(G)$, 且 $\|w_1w_2\|_1\leqslant\|w_1\|_p\|w_2\|_q$. 这个不等式称为 **Hölder 不等式**.

设 $p>1$, 又 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 对于 $y\in L^q(G)$, 令

$$f(x)=\int xy d\mu \quad (x\in L^p(G)), \tag{1}$$

则 $f\in(L^p(G), \|\cdot\|_p)^*$ 且 $\|f\|=\|y\|_q$, 且 $(L^p(G), \|\cdot\|_p)^*$ 中的每个 f 都是这种形式的, 即 $(L^p(G), \|\cdot\|_p)^*$ 与 $(L^q(G), \|\cdot\|_q)$ 是线性保范同构的. 由 (1) 式所作的 $(L^p(G), \|\cdot\|_p)^*\to(L^q(G), \|\cdot\|_q)$ 的映射 $f\longmapsto y$ 就是个线性保范同构. 通常就写成 $(L^p(G), \|\cdot\|_p)^*=(L^q(G), \|\cdot\|_q)$.

特别, 如果 w 是 G 上可测函数, 且 w 与 G 上的有界可测函数几乎处处相等, 就称 w 是 G 上的**本性有界可测函数**, G 上本性有界可测函数全体记为 $L^\infty(G)$, 对于 $w\in L^\infty(G)$, 令

$\|w\|_\infty=\inf\{\sup\{|x(t)|\,|\,t\in G\}\,|\,w$ 与 x 几乎处处相等$\}$，这时，$(L^\infty(G),\|\cdot\|_\infty)$也是个 Banach 空间.

由于 $L^p(G)$ 与 $L^\infty(G)$ 的情况有些差别，$p\geqslant 1$ 是指 $p\in[1,+\infty)$，$L^\infty(G)$的情况是特别指明的.

因为 G 本身可能不是 Borel 集，对于 G 的子集 B，如果对任何 $A\in\mathscr{B}$，$A\cap B\in\mathscr{B}$，就称 B 是**可测集**. 如果 B 是可测集且 $\mu(A\cap B)=0(A\in\mathscr{B})$. 就称 B 是**零集**. 两个函数几乎处处相等是指这两函数不相等的点全体是个零集.

引理 1 设 G 是局部紧群，则 $L(G)$在 $L^1(G)$ 中稠密.

证 这里，当 $L^1(G)$表示复值的可积函数全体时，$L(G)$ 就表示在某紧集外为 0 的复值连续函数全体. $L(G)\subset L^1(G)$ 是显然的. 由于测度有限的集的特征函数的线性组合全体在 $L^1(G)$中稠密，所以只要证明$\overline{L(G)}^{(\|\cdot\|_1)}$包含了$\chi_A(A\in\mathscr{B}$且$\mu(A)<+\infty)$.

设 $A\in\mathscr{B}$且 $\mu(A)<+\infty$，由 μ 是正则测度，对 $\varepsilon<0$，有 A 的紧子集 A_1，使 $\mu(A_1)>\mu(A)-\varepsilon$，又可取开集 V 使 $\bar{V}$ 是紧集，且 $V\supset A_1$，$\mu(V)<\mu(A_1)+\varepsilon$，这样，有 $x\in L^+(G)$使得 x 在 V 外为 0，且 x 在 A_1 上取值恒为 1，易见$\int\chi_{A_1}d\mu\leqslant\int xd\mu\leqslant\int\chi_V d\mu$，因而 $\|x-\chi_{A_1}\|_1<\varepsilon$，且因 $\|\chi_A-\chi_{A_1}\|_1<\varepsilon$，所以 $\|x-\chi_A\|<2\varepsilon$. 可见$\overline{L^+(G)}^{(\|\cdot\|_1)}$包含了$\chi_A$，所以 $L(G)$在$(L^1(G),\|\cdot\|_1)$中稠密. 证毕.

定理 1 设 $p\geqslant 1$，则 $L(G)$在$(L^p(G),\|\cdot\|_p)$中稠密.

证 只要对 $p>1$ 的情况证明. 由于 $L^p(G)$ 中函数可以写成 $L^p(G)$中非负函数的线性组合，只要证明$\overline{L(G)}^{(\|\cdot\|_p)}$ 包含了 $L^p(G)$中非负函数即可.

设 $w\in L^p(G)$且 $w\geqslant 0$，对$\varepsilon>0$，设 w 在 $A(\in\mathscr{B})$外为 0，取一列紧集$\{A_n\}$ 使 $A_1\subset A_2\subset\cdots$且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\supset A$，记 $w_n=w\chi_{A_n}\chi_{B_n}$（其中 B_n

$=\{t \mid w(t) \leqslant n\}$），于是 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots$ 且 $w_n \to w$（点点收敛）。由积分的 Levi 引理，$\|w-w_n\|_p=\left(\int (w-w_n)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$ 因而有 n_0 使 $\|w-w_{n_0}\|_p<\varepsilon$.

由于 w_{n_0} 是在紧集 A_{n_0} 外为 0 的有界函数，$w_{n_0} \leqslant n_0$，所以有 $x \in L^+(G)$ 使 $x \leqslant n_0$ 且 $\|x-w_{n_0}\|_1<\left(\dfrac{\varepsilon}{2n_0}\right)^p$. 因为

$$|x-w_{n_0}|^p \leqslant (2n_0)^{p-1}|x-w_{n_0}|,$$

$$(\|x-w_{n_0}\|_p)^p=\int |x-w_{n_0}|^p d\mu$$

$$\leqslant (2n_0)^{p-1}\int |x-w_{n_0}| d\mu \leqslant (2n_0)^{p-1} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2n_0}\right)^p$$

$$<\varepsilon^p,$$

即 $\|x-w_{n_0}\|_p<\varepsilon$，由此 $\|w-x\|_p<2\varepsilon$，$L(G)$ 在 $(L^p(G), \|\cdot\|_p)$ 中稠密. 证毕.

引理 2 设 G 是局部紧群，$x, y \in L(G)$，则对于 $t \in G$，$x(s)y(s^{-1}t)$（作为 s 的函数）仍在 $L(G)$ 中.

证 由 G 是拓扑群，即知 $x(s)y(s^{-1}t)$ 是 G 上的连续函数，又因 x 在某个紧集外为 0，$x(s)y(s^{-1}t)$ 在这个紧集外为 0，所以 $x(s)y(s^{-1}t) \in L(G)$. 证毕.

引理 3 设 G 是局部紧群，$x, y \in L(G)$，令

$$z(t)=\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s),$$

则 $z \in L(G)$，且 $\|z\|_1 \leqslant \|x\|_1\|y\|_1$.

证 对 $t \in G$，因为 $x(s)y(s^{-1}t)$ 是 $L(G)$ 中元，所以 $z(t)$ 有确定意义. 设 x 在紧集 A 外为 0，y 在紧集 B 外为 0，由于 $AB=\{ts \mid t \in A, S \in B\}$ 是紧集，当 $t \overline{\in} AB$ 时，由 $s(s^{-1}t)=t$，因而 $s \in A$ 与 $s^{-1}t \in B$ 不会都成立，所以 $x(s)y(s^{-1}t)$ 恒为 0，可见 $z(t)=0$（当 $t \overline{\in} AB$

时)，所以 z 在紧集 AB 外为 0．

又因 $y\in L(G)$，对 $\varepsilon>0$，有 e 的邻域 V，使当 $t_1,t_2\in G$ 且 $t_1^{-1}t_2\in V$ 时，$|y(t_1)-y(t_2)|<\varepsilon$．因而对于 $s\in G$，也有 $|y(s^{-1}t_1)-y(s^{-1}t_2)|<\varepsilon$ 并因 x 是有界函数，

$$|x(s)y(s^{-1}t_1)-x(s)y(s^{-1}t_2)|\leqslant\varepsilon\max_{s\in G}|x(s)|\chi_A(t_1,\ t_2\in G,$$

$t_1^{-1}t_2\in V$ 时)，从而 $|z(t_1)-z(t_2)|\leqslant\varepsilon\max\limits_{s\in G}|x(s)|\mu(A)$．所以 z 是连续的，即有 $z\in L(G)$．

如果 $x,y\in L^+(G)$，这时 $\|z\|_1=\iint x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)d\mu(t)$，

由 Fubini 定理，

$$\|z\|_1=\int\left(\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)\right)d\mu(t)=\int x(s)\left(\int y(s^{-1}t)d\mu(t)\right)d\mu(s)=\|x\|_1\|y\|_1,$$

对于 $x,y\in L(G)$，由 Fubini 定理，$\|z\|_1\leqslant\|x\|_1\|y\|_1$．证毕．

定理 2 设 G 是局部紧群，$x,y\in L^1(G)$，则对于几乎所有的 $t\in G$，$x(s)y(s^{-1}t)$ 关于 μ 可积，且当 t 使 $x(s)y(s^{-1}t)$ 关于 μ 可积时，令 $z(t)=\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)$，则 $z\in L^1(G)$ 且 $\|z\|_1\leqslant\|x\|_1\|y\|_1$．

证 同样由 Fubini 定理，由于

$$\iint x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)d\mu(t)\leqslant\|x\|_1\|y\|_1,$$

可知对于几乎所有的 $t\in G$，$\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)$ 是有限数，(在不可积的 t 上规定 $z(t)$ 为 0)，且 $z(t)$ 也是关于 μ 可积的，且

$$\int|z(t)|d\mu(t)\leqslant\|x\|_1\|y\|_1,$$

这里对于 $x(s)y(s^{-1}t)$ 的二元可测性(关于乘积测度 $\mu\times\mu$ 的可测性)不加讨论了．证毕．

定理 3　设 $x\in L^1(G), y\in L^p(G), (p\geqslant 1)$，则对于几乎所有的 $t\in G, x(s)y(s^{-1}t)$ 关于 μ 可积，且记 $z(t)=\int x(s)y(s^{-1}t)\,d\mu(s)$ 时，$z\in L^p(G)$，而且 $\|z\|_p\leqslant\|x\|_1\|y\|_p$.

证　只要对于非负函数 x，y 来证. 令 q 使 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，($p=1$ 时已证，故设 $p>1$) 任取 $z\in L^q(G)$，由 Fubini 定理

$$\begin{aligned}&\int\left(\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)\right)z(t)d\mu(t)\\&=\iint x(s)y(s^{-1}t)z(t)d\mu(t)d\mu(s)\\&\leqslant\|y\|_p\|z\|_q\int x(s)d\mu(s)=\|y\|_p\|z\|_q\|x\|_1,\end{aligned}$$

上式中对于固定 s 而对于 t 积分时，由 $y\in L^p, z\in L^q$，使用了 Hölder 不等式. 由于 $\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)$ 与任一 L^q 中的 z 的乘积是 $L^1(G)$ 中函数，因而对几乎所有的 $t\in G$，$\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)$ 是有限数，且作为 t 的函数，$\int x(s)\ y(s^{-1}t)\ d\mu(s)\ \in L^p(G)$，而且 $\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)$ 在 $L^p(G)$ 中的范数 $\leqslant\|x\|_1\|y\|_p$. 证毕.

定义　设 G 是局部紧群，$x, y\in L^1(G)$，称

$$z(t)=\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)\quad(t\in G)$$

(当 $t\in G$ 使上述积分不存在时，规定 $z(t)=0$) 为 x 与 y 的卷积，记为 $x*y$. 当 $x\in L^1$. $y\in L^p(p>1)$ 时，也称上式定义的 z 为 x 与 y 的卷积并记为 $x*y$.

由定理 2、3，当 $x, y\in L^1(G)$ 时，$x*y\in L^1(G)$ 且 $\|x*y\|_1\leqslant\|x\|_1\|y\|_1$，当 $x\in L^1, y\in L^p(p>1)$ 时，$x*y\in L^p$ 且 $\|x*y\|_p\leqslant\|x\|_1\|y\|_p$.

引理 4　如果 $x\in L^1(G)$，$y\in L^\infty(G)$，则 $x*y\in L^1$ 且 $\|x*y\|_1\leqslant\|x\|_1\|y\|_\infty$.

证 由 y 是本性有界函数，$|x(s)y(s^{-1}t)|\dot{\leqslant}\|y\|_\infty|x(s)|$（$\dot{\leqslant}$ 表示几乎处处$\leqslant$），即知$\|x*y\|_1\leqslant\|y\|_\infty\|x\|_1$. 证毕.

定理 4 设G是局部紧群，在 Banach空间 $L^1(G)$中规定以卷积为乘法，则 $L^1(G)$是个 Banach 代数.

证 由于卷积是 $L^1(G)\times L^1(G)\to L^1(G)$ 的双线性映射且满足范数的不等式 $\|x*y\|_1\leqslant\|x\|_1\|y\|_1$，只要证明乘法满足结合律，且由于卷积的双线性，只要对非负函数来证明.

由于积分的左不变性，在卷积的定义中，

$$(x*y)(t)=\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)=\int x(ts)y(s^{-1})d\mu(s),$$

由此，当 $x,y,z\in L^1(G)$时，由 Fubini 定理，

$$\begin{aligned}((x*y)*z)(t)&=\int(x*y)(ts)z(s^{-1})d\mu(s)\\&=\iint x(tsv)y(v^{-1})z(s^{-1})d\mu(s)d\mu(v)\\&=\int x(tv)y(v^{-1})z(vs^{-1})d\mu(v)d\mu(s)\\&=\int x(tv)(y*z)(v^{-1})d\mu(v)\\&=(x*(y*z))(t).\end{aligned}$$

式中，由 μ 的左不变性，当计算积分时，$\int w(t)d\mu(t)$中，用 $w(ut)$ 代替 $w(t)$，积分之值相同. 即 t 可用 ut 代替（u 是G中任何元）. 证毕.

当G是局部紧群时，以卷积为乘法的Banach 代数 $L^1(G)$ 称为群代数.

定理 5 $L^1(G)$是交换的充分必要条件为: G是交换群.

证 **充分性** 当G是交换群时，G是单模群，所以积分中变元可换成逆元，从而

$$\int x(s)y(s^{-1}t)d\mu(s)=\int x(s^{-1})y(st)d\mu(s)$$

$$=\int y(ts)x(s^{-1})d\mu(s),$$

即 $(x*y)(t)=(y*x)(t)$，所以 $x*y=y*x$.

必要性 如果 $L^1(G)$ 是交换的，则对于 $x,y\in L^1(G)$，

$$0=x*y-y*x=\int[x(ts)y(s^{-1})-y(s)x(s^{-1}t)]d\mu(s)$$

$$=\int y(s)[x(ts^{-1})\Delta(s^{-1})-x(s^{-1}t)]d\mu(s),$$

因为对于任何 $x,y\in L^1(G)$ 成立上式，所以对 $x\in L(G)$，

$$x(ts)\Delta(s)-x(st)=0,$$

取 t 为 G 的单位元 e 时，$x(s)\Delta(s)-x(s)=0$，所以 $\Delta(s)=1(s\in G)$，因而 $x(st)=x(ts)$. 由于 $L(G)$ 中函数分离 G 中的点，所以对 $t,s\in G$，$ts-st$，即 G 是交换群. 证毕.

定理 6 $L^1(G)$ 有单位元的充分必要条件是 G 是离散的.

证 充分性 如果 G 是离散的，即 G 的拓扑是离散拓扑. 这时，G 的 Haar 测度也即在每个单点集上取值为 1 的测度（单点集是开集又是紧集，μ 的值在 $(0,+\infty)$ 中，不妨设为 1）. 在 G 的单位元上取值 1，在其余点上取值为 0 的函数记为 $\tilde{e}$，则 $\tilde{e}\in L^1(G)$，$\|\tilde{e}\|=1$. $L^1(G)$ 中函数也即在 G 的至多可列个点上取值不为 0 而且 $\sum\limits_{t\in G}|x(t)|<+\infty$ 的函数，而且

$$\|x\|=\int|x(t)|d\mu(t)=\sum_{t\in G}|x(t)|,$$

对 $x\in L^1(G)$，

$$(x*\tilde{e})(t)=\int x(s)\tilde{e}(s^{-1}t)d\mu(s)=x(t),$$

$$(\tilde{e}*x)(t)=\int\tilde{e}(s)x(s^{-1}t)d\mu(s)=x(t),$$

所以 $\tilde{e}$ 是$L^1(G)$中单位元.

必要性 设 $L^1(G)$有单位元 x,对于 e 的邻域 V(设 $\bar{V}$ 是 G 中紧集),下面用反证法证明 $\inf\{\mu(V)|V$是 e 的邻域. V 为紧集$\}$是正数. 如果下确界为 0, 由积分的全连续性定理,对 $\varepsilon>0$,有 e的邻域 V 使使$\int_V |x| d\mu<\varepsilon$. 取 e 的邻域 W 使得 $W=W^{-1}$, $WW\subset V$,并令 y 是W的特征函数. 这样,

$$|(x*y)(t)|\leqslant\int|x(s)y(s^{-1}t)|d\mu<\varepsilon \quad (t\in W\text{时}),$$

这与 $x*y=y$ 相矛盾,所以

$$\inf\{\mu(V)|V\text{是 } e \text{ 的邻域 } \bar{V} \text{ 紧}\}=a>0.$$

由此,取 e 的邻域U使 $\bar{U}$ 是紧集且 $\mu(U)<2a$ 时, U 只能是单点集$\{e\}$. 由$\{e\}$是开集,因而G 的单点集都是开集, 所以G 是离散的. 证毕.

§4.4 对称 Banach 代数

本节讨论更为特殊的一类 Banach 代数, 即有对合的 Banach 代数及对称 Banach 代数. 前面所举的一些 Banach 代数中,大都可以规定对合使之成为对称 Banach 代数. 对于这类代数, 正泛函是主要的工具,这节中讨论了正泛函与表示的关系,并讨论了不可分解的正泛函与既约表示的关系.

4.4.1 对合

定义 设R是代数, 如果映射 $*:R\to R$: $x\longmapsto x^*$ 具有下列性质:

(i) $(x^*)^*=x$;

(ii) $(x+y)^*=x^*+y^*$;

(iii) $(\lambda x)^*=\bar{\lambda}x^*$;

(iv) $(xy)^*=y^*x^*$,

则称 $*$ 是 R 中的**对合**. 如果在代数 R 中规定了对合$*$,就称 R 是**带对合的代数**.

引理 1 设 R 是有单位元 e 的代数, $*$ 是 R 中的对合, 则 $e^*=e$.

证 由 $e^*=e^*e$ 及对合的性质(i),(iv),即得

$$e=(e^*)^*=(e^*e)^*=e^*(e^*)^*=e^*e=e^*.$$

证毕.

系 设 R 是有单位元的代数, $*$ 是 R 中的对合,如果 x 是 R 中正则元,则 x^* 也是 R 中正则元.

证 因为 x 是 R 中正则元, 故有 $y\in R$ 使 $xy=yx=e$, 由对合的性质(iv)及引理 1,可知

$$e=e^*=(xy)^*=y^*x^*=(yx)^*=x^*y^*,$$

所以 x^* 是正则元且 $(x^*)^{-1}=(x^{-1})^*$. 证毕.

引理 2 设 R 是没有单位元的代数, $*$ 是 R 中的对合,在 R 加入形式单位元所成的代数 R_1 中,令 $(\lambda,x)^*=(\bar{\lambda},x^*)$,则 $*$ 是 R_1 中的对合. 又如果 R 是没有单位元的 Banach 代数, $*$ 是 R 中对合,则在 R 加入形式单位元后的代数 R_1 中,再令 $\|(\lambda,x)\|=|\lambda|+\|x\|$, R_1 是有对合的 Banach 代数.

证 由作法直接验证即知. 证毕.

定理 1 设 R 是有单位元 e 的交换复 Banach 代数, $*$ 是 R 中的对合,则下列命题等价

(i) R 的每个极大理想 M 都对于对合 $*$ 封闭, 即 $x\in M$ 时 $x^*\in M$.

(ii) $f(x^*)=\overline{f(x)}$ $(f\in\mathscr{M}, x\in R)$.

(iii) $e+x^*x$ 是正则元$(x\in R)$.

证 (i)⇒(ii). 设 $f\in\mathscr{M}$, f 的零空间 M 是 R 的极大理想, 对 $x\in R$, 记 $f(x)$ 为 λ, 则 $f(\lambda e-x)=\lambda-f(x)=0$, 故 $\lambda e-x\in M$, 由假设 $(\lambda e-x)^*\in M$, 即 $\bar{\lambda}e-x^*\in M$, 故 $f(x^*)=f(\bar{\lambda}e)=\bar{\lambda}$.

(ii)⇒(iii) 对于 $f\in\mathscr{M}$, 因

$$f(e+x^*x)=f(e)+f(x^*)f(x)=1+|f(t)|^2\geqslant 1,$$

因而 $f(e+x^*x)\neq 0$, 但 $\sigma_{e+x^*x}=\{f(e+x^*x)\mid f\in\mathscr{M}\}$. 所以 0 不是 $e+x^*x$ 的谱点, 即 0 是正则点, $e+x^*x$ 是正则元.

(iii)⇒(i) 用反证法. 设 M 是 R 的极大理想, $x\in M$ 但 $x^*\overline{\in}M$, 故以 M 为零空间的 $f\in\mathscr{M}$ 使 $f(x)=0$ 而 $f(x^*)\neq 0$, 不妨设 $f(x^*)=i$. 记 $y=x^*+x$, 于是 $y^*=y$, 故 $e+y^*y=e+y^2$, 而 $f(e+y^*y)=f(e)+[f(y)]^2=0$, 因而 $0\in\sigma_{e+y^*y}$, $e+y^*y$ 不是正则的, 矛盾. 这就证明了 R 的每个极大理想都关于对合封闭. 证毕.

定理 2 设 R 是有单位元 e 的交换复 Banach 代数, $*$ 是 R 中的对合, 且对任何 $x\in R$, $e+x^*x$ 都是 R 中正则元, 则 R 的 Гельфанд 表示 Γ 的象在 $C(\mathscr{M})$ 中稠密.

证 R 的 Гельфанд 表示 Γ 是 $R\to C(\mathscr{M})$ 的代数同态, 由定理 1 的(ii), Γx^* 是 Γx 的共轭函数, 又因 Γe 是恒等于 1 的函数, $\Gamma(R)$ 显然分离 $\mathscr{M}$ 的点, 由 Stone-Weierstrass 定理, $\Gamma(R)$ 在 $C(\mathscr{M})$ 中稠密. 证毕.

引理 3 设 R 是有单位元 e 的复 Banach 代数, $*$ 是 R 中的对合, 则对 $x\in R$, x 与 x^* 的谱半径相等.

证 设 $x\in R$, $\lambda\in\rho_x$, 则 $\lambda e-x$ 是正则元, 由引理 1 的系. $(\lambda e-x)^*$ 是正则元, 故 $\bar{\lambda}e-x^*$ 正则, $\bar{\lambda}\in\rho_{x*}$, 由此对 $x\in R$, $\bar{\rho}_x(=\{\bar{\lambda}\mid\lambda\in\rho_x\})\subset\rho_{x*}$. 同样对于 x^* 有 $\bar{\rho}_{x*}\subset\rho_x$, 所以 $\rho_{x*}=\bar{\rho}_x$. 由此, x^* 与 x 的谱半径相等. 证毕.

定义 设 R 是有单位元的复 Banach 代数 (单位元 e 的范数为 1), 且 $*$ 是 R 中的对合, 如果 $\|x^*\|=\|x\|$ $(x\in R)$, 则称 R 是对称

Banach代数. 如果 R 是对称 Banach 代数，且对于任何 $x\in R$, $e+x^*x$ 是 R 中正则元，则称 R 是**完全对称 Banach 代数**.

上面对于有单位元 e (且 $\|e\|=1$) 的复 Banach 代数引进了对称和完全对称的概念. 当 R 没有单位元时，可以利用加入形式单位元后的 Banach 代数是对称或完全对称的来定义. 但下面所用的对称或完全对称的 Banach 代数这些概念，都包含了有单位元的要求. 在有的书上，把上面的对称 Banach 代数称为有对合的 Banach 代数，而把上面的完全对称的 Banach 代数称为对称 Banach 代数.

定理 3　设 R 是交换的完全对称的 Banach 代数，且对于任何 $x\in R$, $\|x\|$ 等于 x 的谱半径，则 R 的 Гельфанд 表示 Γ 保持范数，且对于 $x\in R$, Γx^* 是 Γx 的共轭函数.

证　由定理 1, $f(x^*)=\overline{f(x)}$ $(f\in\mathscr{M}, x\in R)$, 当 R 交换时，对 $x\in R$, $\sigma_x=\{f(x)\mid f\in\mathscr{M}\}$, 由于 $(\Gamma x^*)(f)=\overline{(\Gamma x)(f)}$, 所以 Γx^* 是 Γx 的共轭函数，而且 $\|\Gamma x\|=r(x)=\|x\|$, $(x\in R)$, 即 Γ 是保范的. 证毕.

系　设 R 是交换的完全对称的 Banach 代数，且 $\|x\|=r(x)$ $(x\in R)$, 则 R 的 Гельфанд 表示 Γ 是 $R\to C(\mathscr{M})$ 的满射.

证　由定理 2, $\Gamma(R)$ 在 $C(\mathscr{M})$ 中稠密，又因 Γ 是保范的，故 Γ 的值域等于 $C(\mathscr{M})$. 证毕.

例 1　设 Ω 是紧 Hausdorff 空间，$C(\Omega)$ 是 Ω 上复值连续函数全体所成的 Banach 代数，对于 $x\in C(\Omega)$. 令 x^* 是函数

$$x^*(t)=\overline{x(t)}\quad (t\in\Omega),$$

则 $C(\Omega)$ 是以 $*$ 为对合的 Banach 代数.

例 2　在 Wiener 代数 W 中，对于 $x\in W$, 以 $\overline{x(t)}$ $(t\in[0, 2\pi])$ 作为 x^*, 则 $*$ 是 W 中的对合.

例 3　在 Banach 代数 $\mathscr{A}$ (复平面的单位闭圆上连续、单位开圆内解析的函数全体) 中，以 $\overline{x(-\bar{t})}$ $(t\in\mathrm{C}\,|\,|t|\leqslant 1)$ 作为 $x\in\mathscr{A}$ 的对

合，则这是$\mathscr{A}$中的对合.

例 4 在 $L(\mathrm{R})$中，以$\overline{x(t)}$为 x^*，$*$ 是个对合. 又如果以$\overline{x(-t)}$作为x^*，也是$L(\mathrm{R})$中的对合.

例 5 设H是复 Hilbert 空间，$(B(H\to H),\ \|\cdot\|)$是 Banach 代数，$A\longmapsto A^*$（A 的共轭算子）是$B(H\to H)$的对合.

在上面的各例中的对合都使 $\|x^*\|=\|x\|$，直接验证可知，例 1 的 $C(\Omega)$ 及例 2 的W在对合下是完全对称的. 例 3 的$\mathscr{A}$是对称的 Banach 代数，但由$\mathscr{A}$的线性可乘泛函的形式及定理 1，因为条件(ii)并不成立，所以$\mathscr{A}$不是完全对称的. 例 4 的 $L(\mathrm{R})$没有单位元，在加入形式单位元后的 Banach 代数 $\tilde{L}(\mathrm{R})$中，所给的两个对合都使 $\tilde{L}(\mathrm{R})$是对称 Banach 代数，而由 $L(\mathrm{R})$上非零线性可乘泛函的一般形式是 Fourier 变换，由定理 1 的条件(ii)，在第一个对合 $x^*(t)=\overline{x(t)}$下不是完全对称的，但在对合 $x^*(t)=\overline{x(-t)}$ 下是完全对称的. 例 5 的$B(H\to H)$是完全对称的.

4.4.2 正泛函与表示

定义 设R是对称 Banach 代数，$f\in R'$，那么

(i) 如果 $f(x^*)=\overline{f(x)}\ (x\in R)$，则称 f 是 **Hermite 泛函**;

(ii) 如果 $f(x^*x)\geqslant 0\ (x\in R)$，则称 f 是**正泛函**.

引理 1 设R是对称 Banach 代数，$f\in R'$，那么

(i) f 是 Hermite 泛函的充分必要条件是：对于R中使得$x^*=x$的元x，$f(x)\in\mathrm{R}$.

(ii) 如果f是正泛函，则f是 Hermite 泛函.

证 (i) 的必要性显然，所以只要证充分性. 对$x\in R$，记$x_1=\dfrac{1}{2}(x+x^*)$，$x_2=\dfrac{1}{2i}(x-x^*)$，易见$x_1^*=x_1$，$x_2^*=x_2$ 且 $x=x_1+ix_2$，故 $x^*=(x_1+ix_2)^*=x_1-ix_2$，由假设，$f(x^*)=f(x_1)-if(x_2)$

$=\overline{f(x_1)}+i\overline{f(x_2)}=\overline{f(x)}$，所以 f 是 Hermite 泛函.

(ii) 设 f 是正泛函，由 (i) 只要证明如果 $x\in R$，$x^*=x$ 且 $\|x\|<1$ 时，$f(x)\in\mathbf{R}$. 这时，令

$$y=e-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}x^3-\cdots,$$

上式中的系数是函数 $\sqrt{1-t}$ 在 $t=0$ 处的幂级数展开式的系数. 由于 $\|x\|<1$，上面级数的 n 项的部分和 x_n 构成 $(R,\|\cdot\|)$ 中基本点列，因而级数收敛于元 y. 由于 $x_n^*=x_n$，所以 $y^*=y$，并由级数的乘法可知 $y^2=e-x$. 由 f 是正泛函，$f(y^2)=f(y^*y)\geqslant 0$，所以 $f(x)\in\mathbf{R}$，从而 f 是 Hermite 泛函. 证毕.

引理 2　设 R 是对称 Banach 代数，f 是 R 上正泛函，则

$$|f(y^*x)|^2\leqslant f(x^*x)f(y^*y)\quad (x,y\in R).\tag{1}$$

证　对于 $x,y\in R$，记 $f(y^*x)$ 为 $[x,y]$，易见 $[\cdot,\cdot]$ 满足内积的条件（但由 $[x,x]=0$ 不能推出 $x=0$），由 Schwarz 不等式即得 (1). 证毕.

定理 1　设 f 是对称 Banach 代数 R 上的正泛函，则 $f\in R^*$ 且 $\|f\|=f(e)$.

证　由引理①的证明，当 $x\in R$ 使 $x^*=x$，$\|x\|<1$ 时，$f(e-x)\geqslant 0$，故 $f(x)\leqslant f(e)$，同样 $f(-x)\leqslant f(e)$，因而 $|-f(x)|\leqslant f(e)$. 又如果 $y\in R$，$\|y\|<1$，则 $\|y^*y\|\leqslant\|y^*\|\cdot\|y\|<1$，且 $(y^*y)^*=y^*y$，因而 $f(y^*y)\leqslant f(e)$. 由引理 2，有

$$|f(y)|^2=|f(e^*y)|^2\leqslant f(e)f(y^*y)\leqslant f(e)^2,$$

因此，当 $y\in R$，$\|y\|<1$ 时，$|f(y)|\leqslant f(e)$，所以 $f\in R^*$ 且 $\|f\|\leqslant f(e)$，又显然 $\|f\|\geqslant f(e)$，因此 $\|f\|=f(e)$。证毕.

定义　设 R 是对称 Banach 代数，如果 H 是复 Hilbert 空间，$\Phi:R\to B(H\to H)$ 是保持对合的代数同态且 $\Phi(e)=I$，则称 Φ 是 **R 在 H 上的表示**. 又如果 $\xi\in H$ 使 $\{\Phi(x)\xi\,|\,x\in R\}$ 在 H 中稠密，就

称ξ是表示Φ的**循环向量**，有循环向量的表示称为**循环表示**. 如果H的闭子空间H_0使$\Phi(x)H_0\subset H_0(x\in R)$，就称$H_0$是表示$\Phi$的不变子空间. 只有$H$及$\{0\}$为不变子空间的表示称为**既约表示**.

如果Φ是对称 Banach 代数R在复 Hilbert 空间H上的表示，易见对于$\xi\in H$，令$f(x)=(\Phi(x)\xi,\ \xi)\ \ (x\in R)$，则$f$是$R$上的正泛函.

定理 2 设R是对称 Banach 代数，f是R上的正泛函，则有 Hilbert 空间H及R在H上的循环表示Φ使得

$$f(x)=(\Phi(x)\xi,\xi)\quad(x\in R),\tag{2}$$

其中ξ是表示Φ的循环向量.

证 f是零泛函的情况是平凡的，所以只要对于$f\neq 0$的情况来证. 不妨设$\|f\|=1$，下面具体作出满足定理要求的表示.

对于$x,y\in R$，记$[x,y]=f(y^*x)$. 除了$[x,\ x]=0$不能够保证$x=0$之外，$[\cdot,\cdot]$满足内积的其它条件. 记$R_0=\{x\,|\,x\in R,[x,\ x]=0\}$. 由 Schwarz 不等式，当$x\in R_0$时，对$y\in R$，$|[x,\ y]|^2\leqslant[x,\ x][y,y]=0$，所以$R_0=\{x\,|\,[x,y]=0$ 对 $y\in R$ 成立$\}$.

易见R_0是R的线性子空间，又当$x\in R_0$，$y\in R$时，由$f((yx)^*yx)=f((y^*yx)^*x)=[x,y^*yx]=0$，所以$yx\in R_0$，因而$R_0$是$R$的左理想.

作商空间$\tilde{R}=R/R_0$，$\tilde{R}$中元$x+R_0$以$\tilde{x}$表示，$\tilde{x}=\tilde{y}$等价于$x-y\in R_0$. 对于$\tilde{R}$中元$\tilde{x},\tilde{y}$，令$(\tilde{x},\tilde{y})=[x,y]$. $(\cdot,\cdot)$的意义是确定的，并且$(\cdot,\cdot)$是$\tilde{R}$的内积.

对于$z\in R$，作$A_z:\tilde{R}\to\tilde{R}:\tilde{x}\longmapsto\widetilde{zx}$，由于$R_0$是$R$的左理想，当$\tilde{x}=\tilde{y}$时，$x-y\in R_0$，故$zx-zy\in R_0$. 即$\widetilde{zx}=\widetilde{zy}$，所以$A_z$的定义是确定的. 显然$A_z$是$\tilde{R}\to\tilde{R}$的线性算子.

现证A_z是$\tilde{R}\to\tilde{R}$的线性有界算子：由于f是正泛函，对于任

一固定的 $x\in R$，易见 $g: y\longmapsto f(x^*yx)$ 是 R 上的正泛函，由定理 1，$\|g\|=g(e)$，由此

$$\|A_z\tilde{x}\|^2=\|\widetilde{zx}\|^2=f(x^*z^*zx)=g(z^*z)\leqslant g(e)\|z^*z\|$$
$$=f(x^*x)\|z^*z\|\leqslant\|\tilde{x}\|^2\|z\|^2,$$

即 $\|A_z\tilde{x}\|\leqslant\|z\|\|\tilde{x}\|$，所以 A_z 是 $\tilde{R}\to\tilde{R}$ 的有界算子，且 $\|A_z\|\leqslant\|z\|$. 在上面式子中，R 的范数及 $\tilde{R}$ 中的范数都用 $\|\cdot\|$ 来表示的.

记内积空间 $\tilde{R}$ 的完备化为 H，由于 $A_z\in B(\tilde{R}\to\tilde{R})$，因而 A_z 可唯一地延拓成 $H\to H$ 的线性有界算子，记作为 $\Phi(z)$. 于是对 $z\in R$，作出了 $\Phi(z)\in B(H\to H)$，而 Φ 是 $R\to B(H\to H)$ 的映射.

由 A_z 的作法，易见 $z\longmapsto A_z$ 是 $R\to B(\tilde{R}\to\tilde{R})$ 的代数同态，A_e 是 $\tilde{R}\to\tilde{R}$ 的恒等算子，又对于 $x, y, z\in R$，

$$(A_z\tilde{x},\tilde{y})=(\widetilde{zx},\tilde{y})=f(y^*zx)=f((z^*y)^*x)=(\tilde{x},\widetilde{z^*y})$$
$$=(\tilde{x},A_{z^*}\tilde{y}),$$

由于 $\tilde{R}$ 在 H 中稠密而 $\Phi(z)$ 是 A_z 的连续延拓，因此 $\Phi: R\to B(H\to H)$ 是代数同态，$\Phi(e)=I$ 且 $\Phi(z^*)=\Phi(z)^*(z\in R)$，所以 Φ 是 R 在 H 上的表示.

记 $\tilde{e}$ 为 ξ，由于 $\Phi(z)\xi=\tilde{z}(z\in R)$，因而 $\{\Phi(x)\xi|x\in R\}=\tilde{R}$，从而 Φ 是循环表示，ξ 是 Φ 的循环向量. 对 $z\in R$，

$$(\Phi(z)\xi,\xi)=(A_z\tilde{e},\tilde{e})=(\tilde{z},\tilde{e})=f(z),$$

故(2)式成立. 综上所述，所作的 H 及 R 在 H 上的表示 Φ 满足定理的全部要求. 证毕.

定义　设 R 是对称 Banach 代数，Φ_1，Φ_2 分别是 R 在复 Hilbert 空间 H_1, H_2 上的表示，如果有 $H_1\to H_2$ 的酉算子 U 使得对任何 $x\in R$，

$$\Phi_1(x)=U^{-1}\Phi_2(x)U,$$

则称表示 Φ_1 与 Φ_2 是酉等价.

定理 3 设R是对称 Banach代数，Φ_1,Φ_2分别是R在 Hilbert 空间H_1,H_2上的循环表示，而ξ_1,ξ_2分别是表示$\Phi_1\Phi_2$的循环向量，如果$(\Phi_1(x)\xi_1,\xi_1)=(\Phi_2(x)\xi_2,\xi_2)$ $(x\in R)$，则表示Φ_1与Φ_2是酉等价的.

证 由假设，对于$x,y\in R$,

$$(\Phi_1(x)\xi_1,\Phi_1(y)\xi_1)=(\Phi_1(y^*x)\xi_1,\xi_1)=(\Phi_2(y^*x)\xi_2,\xi_2)$$
$$=(\Phi_2(x)\xi_2,\Phi_2(y)\xi_2),$$

因而对任何$x\in R$, $\|\Phi_1(x)\xi_1\|=\|\Phi_2(x)\xi_2\|$. 而当$x$, $y\in R$使得$\Phi_1(x)\xi_1=\Phi_1(y)\xi_1$时，因为$\Phi_1(x-y)\xi_1=0$，所以$\Phi_2(x-y)\xi_2=0$，即$\Phi_2(x)\xi_2=\Phi_2(y)\xi_2$.

对于H_1中形为$\Phi_1(x)\xi_1(x\in R)$的元，令$V:\Phi_1(x)\xi_1\longmapsto\Phi_2(x)\xi_2$，由上所述，$V$的意义是确定的. V是$\{\Phi_1(x)\xi_1|x\in R\}$到$\{\Phi_2(x)\xi_2|x\in R\}$上的线性保范算子. 由假设$\xi_1,\xi_2$分别是$\Phi_1$, Φ_2的循环向量，因而V的定义域和值域分别在H_1,H_2中稠密，所以V可以唯一地延拓成$H_1\to H_2$的酉算子U.

由作法，对$x,y\in R$, $U\Phi_1(xy)\xi_1=V\Phi_1(xy)\xi_1=\Phi_2(xy)\xi_2=\Phi_2(x)\Phi_2(y)\xi_2=\Phi_2(x)U\Phi_1(y)\xi_1$，因而

$$U\Phi_1(x)\Phi_1(y)\xi_1=\Phi_2(x)U\Phi_1(y)\xi_1\quad(x,y\in R),$$

由此，对$x\in R$,$U\Phi_1(x)$与$\Phi_2(x)U$在$\{\Phi_1(y)\xi_1|y\in R\}$上取值相同，又因为这是$H_1$中稠密集，所以$U\Phi_1(x)=\Phi_2(x)U(x\in R)$，即

$$\Phi_1(x)=U^{-1}\Phi_2(x)U\quad(x\in R),$$

因而Φ_1与Φ_2是酉等价的. 证毕.

4.4.3 不可分解的正泛函与既约表示

引理 1 设R是对称 Banach 代数，Φ是R在 Hilbert空间H上的表示，则Φ是既约表示的充分必要条件是：与每个$\Phi(x)(x\in R)$都可交换的$T\in B(H\to H)$必是恒等算子的常数倍.

证 充分性 如果 H_0 是H的闭子空间且 $\Phi(x)H_0\subset H_0(x\in R)$，记 H_0 上的投影算子为P，所以 $P\Phi(x)P=\Phi(x)P(x\in R)$，因此 $P\Phi(x^*)P=P\Phi(x^*)$. 而由 $P\Phi(x^*)P=\Phi(x^*)P$，立即有

$$P\Phi(x^*)=\Phi(x^*)P \quad (x\in R),$$

因此对任何 $x\in R$，P 与 $\Phi(x)$可交换，由假设P 是 I 的倍数，因而 P 是 I 或 0，即 $H_0=H$ 或$\{0\}$，所以Φ 是既约表示.

必要性 用反证法，若有 $T\in B(H\to H)$ 使得 $T\Phi(x)=\Phi(x)T$ $(x\in R)$ 且 $T\neq\lambda I$，则 $T_1=\frac{1}{2}(T+T^*)$，$T_2=\frac{1}{2i}(T-T^*)$ 中总有一个不是 I 的常数倍，不妨设 $T_1\neq\lambda_1 I$，由于 T_1 仍使 $T_1\Phi(x)=\Phi(x)T_1(x\in R)$且 $T_1^*=T_1$，由自共轭算子的谱分解定理，在 T_1 的谱系中必有不等于 0 及 I 的投影算子P，且 $P\Phi(x)=\Phi(x)P$. P 的值域 H_0 不等于$\{0\}$、H，但 $\Phi(x)H_0\subset H_0$，这与Φ是既约表示相矛盾，这就说明了必要性成立. 证毕.

在引理的证明中用了自共轭算子的谱分解定理，在下面一节中将给出谱分解定理的一个证明.

系 设R是对称 Banach 代数，Φ是R在H 上的既约表示，ξ_1，$\xi_2\in H$，如果$(\Phi(x)\xi_1,\xi_1)=(\Phi(x)\xi_2,\xi_2)\ (x\in R)$，则有 $\lambda\in\mathbf{C}$，$|\lambda|=1$ 使 $\xi_1=\lambda\xi_2$.

证 不妨设 $\xi_1\neq0\neq\xi_2$. 由于Φ 是既约表示，H 中非零元都是 Φ 的循环向量，由 4.4.2 的定理 3，有 $H\to H$ 的酉算子U使 $\Phi(x)=U^{-1}\Phi(x)U(x\in R)$且$U\xi_1=\xi_2$. 由引理1，因$U\Phi(x)=\Phi(x)U(x\in R)$，$U$ 是 I 的常数倍，由U是酉算子，这数的模长为 1，可见有 $\lambda\in\mathbf{C}$，$|\lambda|=1$ 使 $\xi_1=\lambda\xi_2$. 证毕.

定义 设 R 是对称 Banach 代数，f,g 是 R 上的正泛函，如果有 $\lambda>0$ 使得 $\lambda f-g$ 是 R 上正泛函，则称 g **被** f **所控制**. 如果f是 R 上正泛函，且被f 所控制的正泛函必是 f 的非负倍数，则称 f 是

R 上不可分解的正泛函.

定理 2 设 R 是对称 Banach 代数, f 是 R 上正泛函, H 及 Φ 分别是按 4.4.2 定理 2 所作的 Hilbert 空间及 R 在 H 上的表示, ξ 是使 $f(x)=(\Phi(x)\xi,\xi)$ $(x\in R)$ 的 Φ 的循环向量. 如果 g 是被 f 控制的正泛函, 则有 $H\to H$ 的正算子 T 使得

$$g(x)=(T\Phi(x)\xi,\xi)\quad(x\in R),$$

且

$$T\Phi(x)=\Phi(x)T\quad(x\in R).$$

证 仍不妨设 $\|f\|=1$, ξ 即为 $\tilde{e}$(见 4.4.2 定理 2).

由 g 被 f 所控制, 故有 $\lambda>0$ 使 $\lambda f-g$ 是正泛函, 不妨设 $\lambda=1$ (否则对于 $\frac{1}{\lambda}g$ 来证明). 因为 $f-g$ 是正泛函, 故

$$g(x^*x)\leqslant f(x^*x)\quad(x\in R),\tag{3}$$

由于 g 是 R 上正泛函, 由 Schwarz 不等式, 有

$$|g(y^*x)|^2\leqslant g(y^*y)g(x^*x)\leqslant f(y^*y)f(x^*x)\quad(x,y\in R),\tag{4}$$

因而当 $x\in R_0(=\{x|x\in R, f(x^*x)=0\})$ 或 $y\in R_0$ 时, $g(y^*x)=0$.

令 $\varphi(\tilde{x},\tilde{y})=g(y^*x)$ $(\tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{R}=R/R_0)$, φ 的定义是确定的. 所作的 φ 是内积空间 $\tilde{R}$ 上的一个半线性泛函, 且因为(3), (4), 有 $|\varphi(\tilde{x},\tilde{y})|\leqslant\|\tilde{x}\|\|\tilde{y}\|$, φ 是有界的. 由 g 是正泛函, $\varphi(\tilde{x},\tilde{x})\geqslant 0$.

φ 可以延拓成 H 上的有界的一个半线性泛函, 从而有 $B(H\to H)$ 中的正算子 T 使得

$$\varphi(\tilde{x},\tilde{y})=(T\tilde{x},\tilde{y})\quad(\tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{R}),$$

对于 $x,y,z\in R$,

$$(T\Phi(z)\tilde{x},\tilde{y})=(T\widetilde{zx},\tilde{y})=\varphi(\widetilde{zx},\tilde{y})=g(y^*zx),$$

$$(T\tilde{x},\Phi(z^*)\tilde{y})=(T\tilde{x},\widetilde{z^*y})=\varphi(\tilde{x},\widetilde{z^*y})=g(y^*zx),$$

由此, $(\Phi(z)T\tilde{x},\tilde{y})=(T\Phi(z)\tilde{x},\tilde{y})$. 因为 $\tilde{R}$ 在 H 中稠密, 所以

$$T\Phi(z)=\Phi(z)T\quad(z\in R),$$

$$g(x)=g(e^*x)=\varphi(\tilde{x},\tilde{e})=(T\tilde{x},\tilde{e})=(T\Phi(x)\tilde{e},\tilde{e})\quad(x\in R),$$

所作的T符合定理的要求. 证毕.

定理 3 设R是对称 Banach 代数,f是R上正泛函,又Φ_1是R在 Hilbert 空间H_1上的循环表示,ξ_1是Φ_1的循环向量,且$f(x)=(\Phi_1(x)\xi_1,\xi_1)\quad(x\in R)$,则$f$是不可分解的充分必要条件是:$\Phi_1$是既约表示.

证 只要对$f\neq0$的情况来证.

充分性 设Φ_1是既约表示,由 4.4.2 定理 3,对于按 4.4.2 定理 2 所作的H及Φ及ξ,Φ与Φ_1酉等价,但与既约表示酉等价的表示,易见是既约的,所以Φ是既约的. 由定理 2,如果g是被f控制的正泛函,则有$B(H\to H)$的正算子T,$T\Phi(x)=\Phi(x)T$ $(x\in R)$,且$g(x)=(T\Phi(x)\xi,\xi)\ (x\in R)$. 由引理1,$T$是$I$的倍数,由$T$是正算子,故$T=\lambda I\ (\lambda\geqslant0)$,所以

$$g(x)=(\lambda\Phi(x)\xi,\xi)=\lambda(\Phi(x)\xi,\xi)=\lambda f(x)\quad(x\in R),$$

可见$g=\lambda f\ (\lambda\geqslant0)$,即$f$是不可分解的.

必要性 用反证法. 设Φ_1不是既约表示,于是有H_1的闭子空间$H_0\ (H_0\neq\{0\},H_0\neq H_1)$使$\Phi_1(x)H_0\subset H_0$,记$H_0$上的投影算子为$P$,$P\neq0$,$P\neq I$,而$P\Phi_1(x)=\Phi_1(x)P\quad(x\in R)$. 令

$$g(x)=(P\Phi_1(x)\xi_1,\xi_1)\quad(x\in R),$$

于是,

$$g(x^*x)=(P\Phi_1(x^*x)\xi_1,\xi_1)=(P\Phi_1(x)\xi_1,\Phi_1(x)\xi_1)$$
$$=\|P\Phi_1(x)\xi_1\|^2\quad(x\in R),$$

故$g(x^*x)\leqslant\|\Phi_1(x)\xi_1\|^2=f(x^*x)\quad(x\in R)$. 这样,$g$是被$f$控制的正泛函,所以有非负实数$\lambda$使$g=\lambda f$,即得

$$\|P\Phi_1(x)\xi_1\|=\sqrt{\lambda}\|\Phi_1(x)\xi_1\|\quad(x\in R),$$

由于$\{\Phi_1(x)\xi_1\mid x\in R\}$在$H_1$中稠密,所以对$H_1$中任何元$\xi$,

$$\|P\xi\|=\sqrt{\lambda}\|\xi\|,$$

但因 $P\neq 0, P\neq I$，不会有一个 λ 使得这式成立. 这就得出了矛盾，证毕.

§4.5 C^* 代 数

本节讨论的 C^* 代数是更为特殊的一种 Banach 代数，它是完全对称的 Banach 代数. 证明了交换 C^* 代数的表示定理，讨论了正常元的函数演算，正泛函以及态与纯态等概念，纯态与可乘性的关系，并证明了没有交换条件的表示定理. 作为一个应用还给出了有界自共轭算子谱分解定理的证明.

4.5.1 C^* 代数的基本性质

定义 设 R 是 Banach 代数，$*$ 是 R 中的对合，且

$$\|x^*x\|=\|x\|^2 \quad (x\in R),$$

则称 R 是 **C^* 代数**.

在 C^* 代数 R 中，如果元 x 使 $x^*=x$，就称 x 是**自伴元**. 如果元 x 使 $x^*x=xx^*$，就称 x 是**正常元**. 又如果 R 是有单位元 e 的 C^* 代数，R 中元 x 使 $x^*x=xx^*=e$ 时，就称 x 是**酉元**.

引理 1 设 R 是 C^* 代数，则 $\|x^*\|=\|x\|$ $(x\in R)$，又如果 R 有单位元 e，则 $\|e\|=1$.

证 对 $x\in R$，由于 $\|x^*x\|\leqslant\|x^*\|\cdot\|x\|$，故 $\|x\|^2\leqslant\|x^*\|\cdot\|x\|$，因而 $\|x\|\leqslant\|x^*\|$. 同样，$\|x^*\|\leqslant\|(x^*)^*\|=\|x\|$，所以 $\|x^*\|=\|x\|$. 又当 R 有单位元 e 时，$\|e\|=\|e^*e\|=\|e\|^2$，所以 $\|e\|=1$. 证毕.

定理 1 设 x 是 C^* 代数 R 中的正常元，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}=\|x\|$.

证 由于 $\|(x^*x)^2\|=\|(x^*x)^*(x^*x)\|=\|x^*x\|^2$，又

$\|(x^*x)^2\|=\|x^{*2}x^2\|=\|(x^2)^*(x^2)\|=\|x^2\|^2$ （后一式

中用到了 x 是正常元的条件)，所以$\|x^2\|=\|x^*x\|=\|x\|^2$.

当 x 是正常元时，x^2 仍是正常元，所以$\|x^4\|=\|x^2\|^2=\|x\|^4$，一般地可知$\|x^{2^n}\|=\|x\|^{2^n}$　$(n=1,2,\cdots)$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$存在且等于 $\inf\limits_n\sqrt[n]{\|x^n\|}$，又当 $n=2^k$，$k=1,2,\cdots$时，$\sqrt[n]{\|x^n\|}=\|x\|$，由此即知$\lim\limits_n\sqrt[n]{\|x^n\|}=\|x\|$，证毕.

系　如果 x 是 C^* 代数 R 中正常元，则$\|x^n\|=\|x\|^n(n=1,2,3,\cdots)$.

定理 2　设 R 是有单位元 e 的复 C^* 代数，x 是 R 中自伴元，则 $\sigma_x\subset\mathbf{R}$.

证　设 $x\in R$，$x^*=x$，先证明 $i\overline{\in}\sigma_x$. 用反证法，如果 i 是 x 的谱点，则$(n+1)i$ 是 $nie+x$ 的谱点，所以

$$n+1\leqslant\|nie+x\|\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

从而

$$(n+1)^2\leqslant\|nie+x\|^2=\|(-nie+x)(nie+x)\|=\|n^2e+x^2\|$$
$$\leqslant n^2+\|x^2\|,$$

即 $2n+1\leqslant\|x^2\|$　$(n=1,2,\cdots)$，矛盾.

如果 $\lambda\in\sigma_x$ 而 $\lambda=a+bi$　$(a,b\in\mathbf{R},b\neq0)$，于是 $\frac{1}{b}(x-ae)$ 是 R 中自伴元，且 i 是 $\frac{1}{b}(x-ae)$ 的谱点，与上面所证的矛盾. 因此 $\lambda\in\mathbf{R}$，即 $\sigma_x\subset\mathbf{R}$. 证毕.

定理 3　设 R 是有单位元的复 C^* 代数，R_0 是 R 的 C^* 子代数(即 R_0 是 R 的 Banach 子代数且当 $x\in R_0$ 时 $x^*\in R_0$)，且 $e\in R_0$，则对 $x\in R_0$，$\sigma_x(R_0)=\sigma_x(R)$.

证　如果 $y\in R_0$ 且 $y^*=y$，由于 R_0 本身也是个 C^* 代数，由定理 2，$\sigma_y(R_0)\subset\mathbf{R}$. 由 4.1.3 定理 1 的系，$\sigma_y(R_0)=\sigma_y(R)$.

现设 $x\in R_0$，因为 $\sigma_x(R_0)\supset\sigma_x(R)$，因而只要证明当 $\lambda\in\rho_x(R)$

时，$\lambda\in\rho_x(R_0)$，即当$\lambda e-x$在R中可逆时，$(\lambda e-x)^{-1}\in R_0$就可以了．设$\lambda e-x$是$R$中正则元，记$z=\lambda e-x$，因而$z^*$是$R$中正则元，从而$z^*z, zz^*$都是正则元．因为$z^*z, zz^*$是自伴元，由上所证，$(z^*z)^{-1}$，$(zz^*)^{-1}\in R_0$，而由$(z^*z)^{-1}z^*z=zz^*(zz^*)^{-1}=e$，即$z$在$R_0$中有左逆元及右逆元，所以$z$在$R_0$中是正则的．因而$z^{-1}\in R_0$，所以$\sigma_x(R_0)=\sigma_x(R)$．证毕．

在前面举过的例子中，当Ω是紧Hausdorff空间时，$C(\Omega)$以$\overline{x(t)}$作为x^*时，是个有单位元的交换的复C^*代数．

又如果H是复Hilbert空间，在$B(H\to H)$中用T^*(T的共轭算子)作为T的对合时，$B(H\to H)$是有单位元的复C^*代数，当H的维数大于1时，$B(H\to H)$不是交换的．

上面所举的例子是有单位元的复C^*代数，而且差不多是有单位元的复C^*代数的全部例子了．4.5中的两条定理(Гельфанд-Наймарк定理)说明了这一事实．

$C_r(\Omega)$以及对于实Hilbert空间H的$B(H\to H)$是实C^*代数的例子，这两个实C^*代数都有单位元．而当Ω_1是局部紧的Hausdorff空间(但设Ω_1不是紧的)时，Ω_1可以作单点紧化扩张为紧Hausdorff空间．或者在紧Hausdorff空间Ω中，取一个点t_0而且$\{t_0\}$不是Ω中开集，这时，$\Omega\backslash\{t_0\}$在Ω的诱导拓扑下是局部紧但不紧的空间．$C(\Omega)$中在t_0处为0的函数全体记为$C(\Omega\backslash\{t_0\})$，(或者记$C(\Omega_1)$为在"无穷远点"处为0的$\Omega_1$上复值连续函数全体)，这样的空间是没有单位元的交换复C^*代数．又$B(H\to H)$中的紧算子(即全连续算子)全体是没有单位元的复C^*代数的例(H是无限维的复Hilbert空间)．

下面只讨论有单位元的复C^*代数，即"C^*代数"就是指"有单位元e的复C^*代数"．

定义　设R_1, R_2是C^*代数，$\Phi: R_1\to R_2$，

(i) 如果Φ是 $R_1\to R_2$的代数同态，且Φ保持对合，即$\Phi(x^*)=(\Phi(x))^*$　$(x\in R_1)$，并且$\Phi(e)=e$(式中两个 e 分别是 R_1 及 R_2 的单位元)，则称Φ是 $R_1\to R_2$ 的 **$*$-同态**.

(ii)如果Φ是$R_1\to R_2$的$*$-同态，而且$(\Phi R_1)=R_2$，$\|\Phi(x)\|=\|x\|$　$(x\in R_1)$，则称Φ是 $R_1\to R_2$ 的**完全同构**.

完全同构的两个 C^* 代数可以认为实质上是相同的.

定理 4(Гельфанд-Наймарк)　设R是交换的 C^* 代数，则R的 Гелбфанд 表示 Γ 是 $R\to C(\mathscr{M})$的完全同构.

证　R 是交换的 C^* 代数，由定理 2，当$x\in R$，$x^*=x$ 时，$\sigma_x\subset\mathbb{R}$，所以对于 $f\in\mathscr{M}$，$f(x)\in\mathbb{R}$，由 4.4.2 引理 1，f 是 Hermite 泛函，由 4.4.1 定理 1，R 是完全对称的. 又因 R 是交换的，所以R中元都是正常元，由定理 1，$\|x\|=\lim\limits_n\sqrt[n]{\|x^n\|}=r(x)$　$(x\in R)$，由 4.2.3 定理 2，$\|\Gamma x\|=r(x)=\|x\|$　$(x\in R)$，即Γ是保范的. 而由 4.4.1 的定理 3 及系，即和Γ 是 $R\to C(\mathscr{M})$的完全同构. 证毕.

由定理 4，可知交换的有单位元的复 C^* 代数实质上只有一种：紧 Hausdorff 空间上的复值连续函数全体.

系　设 R 是 C^* 代数，$x\in R$ 且 x 是正常元，那末，

(i) 如果 $\sigma_x\subset\mathbb{R}$，则 x 是自伴元；

(ii) 如果 $\sigma_x\subset\mathbf{I}(=\{\lambda\,|\,\lambda\in\mathbf{C},\,|\lambda|=1\})$，则 x 是酉元.

证　由于 x 是正常元，由$\{e,x,x^*\}$张成的R的 Banach 子代数记为 R_0，易见 R_0 是

$$\left\{\sum_{k,l=0}^{n}a_{kl}x^kx^{*l}\,\Big|\,n\text{ 是自然数},a_{k,l}\in\mathbf{C}\right\}$$

的闭包，R_0 是 R 的 C^* 子代数且 R_0 是交换的. 由定理 3，作为 R^0 中的元来看，$\sigma_x(R_0)\subset\mathbb{R}$ 或 $\sigma_x(R_0)\subset\mathbf{I}$ 依然成立.

记 R_0 上的非零线性可乘泛函全体为 $\mathscr{M}_0$，R_0 的 Гелбфанд 表

示为Γ，则Γ是 $R_0\to C(\mathscr{M}_0)$的完全同构。

当 $\sigma_x\subset\mathrm{R}$ 时，$\Gamma x^*=\Gamma x$，由 Γ 是保范的，故Γ一对一，因而 $x^*=x$，即 x 是自伴元。

当 $\sigma_x\subset\mathrm{I}$ 时，$\Gamma(x^*x)$与 $\Gamma(xx^*)$都是 $\mathscr{M}_0$ 上恒等于 1 的函数，所以 $\Gamma(xx^*)=\Gamma(x^*x)=\Gamma e$，从而 $xx^*=x^*x=e$，即 x 是酉元。证毕。

引理 2 设 Ω_1，Ω_2 是两个紧 Hausdorff 空间，ζ 是 $\Omega_1\to\Omega_2$ 的同胚，则 $C(\Omega_1)\to C(\Omega_2)$的映射 $x\mapsto x\circ\zeta^{-1}$ 是完全同构。

证 直接验证即得。证毕。

由引理 2，从两个紧 Hausdorff 空间之间的同胚ζ 可以作出 $C(\Omega_1)\to C(\Omega_2)$的完全同构。记 $C(\Omega_1)\to C(\Omega_2)$的映射 $x\mapsto x\circ\zeta^{-1}$ 为 Φ_ζ。

定理 5 设 R 是交换 C^* 代数，$x_0\in R$，如果$\{e, x_0, x_0^*\}$张成的 Banach 子代数等于 R，则 R 与 $C(\sigma_{x_0})$完全同构。

证 由定理 4，R 的 Гельфанд 表示 Γ是 $R\to C(\mathscr{M})$的完全同构。而当 f_1，$f_2\in\mathscr{M}$ 使 $f_1(x_0)=f_2(x_0)$时，由于 $f_1(x_0^*)=f_2(x_0^*)$，所以 $f_1=f_2$，从而 $\zeta:\mathscr{M}\to\sigma_{x_0}:f\longmapsto f(x_0)$是同胚。由此 Φ_ζ 是 $C(\mathscr{M})\to C(\sigma_{x_0})$的完全同构，因而 $\Phi_\zeta\circ\Gamma$是R到 $C(\sigma_{x_0})$的完全同构。证毕。

系 在定理 5 中所作的完全同构 $\Phi_\zeta\circ\Gamma$下，x_0 的象是 σ_{x_0} 上的恒等函数 ι(即对于 $\lambda\in\sigma_{x_0}$，$\iota(\lambda)=\lambda$)。

证 直接计算$(\Phi_\zeta\circ\Gamma)(x_0)$，由于$\zeta$ 是$\mathscr{M}\to\sigma_{x_0}$ 的同胚，对于 $\lambda_0\in\sigma_{x_0}$，有 $f_0\in\mathscr{M}$ 使 $f_0(x_0)=\lambda_0$，而 $\zeta(f_0)=\lambda_0$，$\zeta^{-1}(\lambda_0)=f_0$，$(\Phi_\zeta\circ\Gamma)(x_0)=\Phi_\zeta(\Gamma x_0)=(\Gamma x_0)\circ\zeta^{-1}$，所以

$$((\Gamma x_0)\circ\zeta^{-1})(\lambda_0)=(\Gamma x_0)(\zeta^{-1}\lambda_0)=(\Gamma x_0)(f_0)=\hat{x}_0(f_0)$$

$$=f_0(x_0)=\lambda_0,$$

即对任何$\lambda_0\in\sigma_{x_0}$，$(\Phi_\zeta\circ\Gamma)(x_0)$(这是$C(\sigma_{x_0})$中元，即是在 σ_{x_0} 上的

连续函数)在λ_0上的值即为λ_0. 故$(\Phi_\zeta\circ\Gamma)(x_0)$是$\sigma_{x_0}$上的恒等函数. 证毕.

下面以ι表示恒等函数,即$\iota:\mathbf{C}\to\mathbf{C}:\lambda\mapsto\lambda$. 在具体情况下,只把$\iota$的定义域限于$\mathbf{C}$的某一子集上.

定理 6　设Ω_1,Ω_2是紧Hausdorff空间,Φ是$C(\Omega_1)\to C(\Omega_2)$的完全同构,则有$\Omega_1\to\Omega_2$的同胚$\zeta$使$\Phi(x)=x\circ\zeta^{-1}(x\in C(\Omega_1))$.

证　对于$t\in\Omega_1$,记$M_t=\{x\mid x\in C(\Omega_1),x(t)=0\}$,同样对于$s\in\Omega_2$,记$N_s=\{y\mid y\in C(\Omega_2),y(s)=0\}$. 由于$\Phi$是代数同态,且$\Phi$是双射,余维数为1的线性子空间的象是余维数为1的线性子空间,理想的象仍为理想,而极大理想的象仍为极大理想,因而$\Phi(M_t)$是$C(\Omega_2)$的极大理想,从而有$s\in\Omega_2$,使$\Phi(M_t)=N_s$. 这样,对于Ω_1中元t,以$\Phi(M_t)=N_s$所得的Ω_2中元s记为$\zeta(t)$,就作出了$\Omega_1\to\Omega_2$的映射ζ. 因为对任何一个Ω_2中s,$\Phi^{-1}(N_s)$是$C(\Omega_1)$中极大理想,即有t使$\Phi^{-1}(N_s)=M_t$,可见ζ是到上的,显然ζ是$\Omega_1\to\Omega_2$的双射.

由于$C(\Omega_1)$中单位元e的象$\Phi(e)$是$C(\Omega_2)$中单位元e,对于$C(\Omega_1)$中的x及Ω_1中的t,记$\Phi(x)=y$　$\zeta(t)=s$,并记$x(t)$为λ. 由于$x-\lambda e\in M_t$,由ζ的作法,$\Phi(x-\lambda e)\in N_s$,所以$y-\lambda e\in N_s$,$y(s)-\lambda=0$,即$y(s)=\lambda$,由此

$$x(t)=\Phi(x)(\zeta(t))\quad(x\in C(\Omega_1),t\in\Omega_1),$$

也即$x(\zeta^{-1}(s))=(\Phi(x))(s))$　$(x\in C(\Omega_1),s\in\Omega_2)$. 所以

$$\Phi(x)=x\circ\zeta^{-1}.$$

下面证明ζ是同胚. 设B是Ω_2中闭集,记$A=\zeta^{-1}(B)$. 要证A是Ω_1中闭集. 对$t_0\overline{\in}A$,于是$s_0=\zeta(t_0)\overline{\in}B$,故有$y\in C(\Omega_2)$使$y(s_0)=1$,$y$在$B$上为0,记$x=\Phi^{-1}(y)$,则$x(t_0)=y(s_0)=1$,同样$x$在$A$上为0,由$x\in C(\Omega_1)$,易见$t_0\overline{\in}\bar{A}$. 因而$A$是闭集. 由此$\zeta$是连续的,因而$\zeta$是$\Omega_1\to\Omega_2$的同胚. 证毕.

4.5.2 正常元的函数演算

定理1 设 R 是 C^* 代数，x_0 是 R 中的正常元，则有唯一的 $C(\sigma_{x_0})\to R$ 的保持范数的 $*$-同态满足(i) $1\longmapsto e$；(ii) $\iota\longmapsto x_0$，其中 1 是在 σ_{x_0} 上恒等于 1 的函数，ι 是恒等函数.

证 记 $\{e,x_0,x_0^*\}$ 张成的 Banach子代数为R_0，R_0 本身是个C^*代数 由 4.5.1 定理 5 及系，以 $\mathscr{M}_0$ 记 R_0 上的非零线性可乘泛函全体，Γ为 R_0 的Гельфанд 表示，$\zeta:\mathscr{M}_0\to\sigma_{x_0}:f\longmapsto f(x_0)$，则$\Phi_\zeta\circ\Gamma$ 是 $R_0\to C(\sigma_{x_0})$的完全同构，因而$(\Phi_\zeta\circ\Gamma)^{-1}=\Gamma^{-1}\circ\Phi_\zeta^{-1}$是$C(\sigma_{x_0})\to R_0$ 的完全同构. 它把 1 映射为 e，把 ι 映射为 x_0，作为 $C(\sigma_{x_0})\to R$ 的映射，$\Gamma^{-1}\circ\Phi_\zeta^{-1}$ 是保范的$*$-同态且满足(i)，(ii)，这就说明了定理所要求的映射的存在性.

如果Φ是 $C(\sigma_{x_0})\to R$ 的保持范数的$*$-同态且 $\Phi(1)=e$，$\Phi(\iota)=x_0$，记$A=\{\varphi\mid\varphi\in C(\sigma_{x_0}),\Phi(\varphi)=(\Gamma^{-1}\circ\Phi_\zeta^{-1})(\varphi)\}$，则$A$是 $C(\sigma_{x_0})$ 的关于对合封闭的闭子代数且 1，$\iota\in A$，由此可知$A=C(\sigma_{x_0})$，因而定理所要求的映射是唯一的. 证毕.

当 R 是 C^* 代数，x_0 是 R 中正常元时，$\varphi(\in C(\sigma_{x_0}))$在定理1的映射下的象记为 $\varphi(x_0)$，因而，$\varphi(x_0)$ 可以看成是二元映射，一个变元是 R 中的正常元 x_0，另一个变元是在 σ_{x_0} 上的复值连续函数 φ. 当固定 x_0 时，$\varphi\longmapsto\varphi(x_0)$称为元 x_0 的一种**函数演算**.

系 设 R是 C^*代数，则

(i) 当 x_0 是R中正常元时，$\{\varphi(x_0)\mid\varphi\in C(\sigma_{x_0})\}$等于$\{e,x_0,x_0^*\}$张成的 Banach 子代数，

(ii) 当 x_0 是R中正常元，$\varphi\in C(\sigma_{x_0})$时，$\sigma_{\varphi(x_0)}=\varphi(\sigma_{x_0})$.

证 由于 $\varphi\longmapsto\varphi(x_0)$是 $C(\sigma_{x_0})\longmapsto R_0(=\{e,x_0,x_0^*\}$张成的 Banach 子代数)的完全同构，即知(i)(ii)成立. 证毕.

定理2 设 R是 C^*代数，x 是 R 中正常元，$\varphi\in C(\sigma_x)$，$\psi\in C$

$(\varphi(\sigma_x))$，则$(\psi\circ\varphi)(x)=\psi(\varphi(x))$.

证　记$y=\varphi(x)$，由定理 1 的系，$\sigma_y=\varphi(\sigma_x)$，故当$\psi\in C(\varphi(\sigma_x))$时，即 $\psi\in C(\sigma_y)$，所以 $\psi(y)$有意义．又 $\psi\circ\varphi\in C(\sigma_x)$，$(\psi\circ\varphi)(x)$也是有意义的.

任意取定 $\varphi\in C(\sigma_x)$，记 $\varphi(x)$为 y，考虑

$$\{\psi\mid\psi\in C(\varphi(\sigma_x)),\ (\psi\circ\varphi)(x)=\psi(y)\},$$

记这集为 A．易见 1(在 $\varphi(\sigma_x)=\sigma_y$ 上恒等于 1 的函数)及 ι 使得 $1\circ\varphi=1$(式中右面的 1 是在 σ_y 上恒等于 1 的函数) $\iota\circ\varphi=\varphi$，因而 1，$\iota\in A$．又由 $\psi^*\circ\varphi=(\psi\circ\varphi)^*$，$(\psi_1+\psi_2)\circ\varphi=\psi_1\circ\varphi+\psi_2\circ\varphi$，$(\psi_1\psi_2)\circ\varphi=(\psi_1\circ\varphi)(\psi_2\circ\varphi)$　$(\psi,\psi_1,\psi_2\in C(\varphi(\sigma_x))$，$\psi^*$中的 * 表示共轭函数，$\psi_1\psi_2$ 则表示函数的逐点相乘)．因而 A 是 $C(\varphi(\sigma_x))$中关于对合封闭的子代数，又当 $\psi_n\to\psi$(在 $C(\varphi(\sigma_x))$中收敛，即在$\varphi(\sigma_x)$上一致收敛)时，$\psi_n\circ\varphi\to\psi\circ\varphi$(在 σ_x 上一致收敛)，并因固定元时，函数演算是保范的，所以 A 是$(C(\varphi(\sigma_x))$，$\|\cdot\|)$中闭集，由 Stone-Weierstrass 定理，$A=C(\varphi(\sigma_x))$，所以对于 $\varphi\in C(\sigma_x)$ 及 $\psi\in C(\varphi(\sigma_x))$，$(\psi\circ\varphi)(x)=\psi(\varphi(x))$．证毕.

4.5.3　谱分解定理

这一小节中设H是复Hilbert 空间，$B(H\to H)$是 C^*代数.

引理 1　设 R 是 $B(H\to H)$的 *-子代数(即关于对合封闭的子代数)且 $I\in R$，则$\overline{R}^{(WOT)}$是 $B(H\to H)$的 *-子代数．又如果R是交换的，则 $\overline{R}^{(WOT)}$是交换的.

证　记 $R_1=\overline{R}^{(WOT)}$．显然 R_1 是 $B(H\to H)$的线性子空间．当 $T\in R_1$ 时，有 R 中网$\{T_\alpha\}$使 $T_\alpha\to T(WOT)$，从而 $T_\alpha^*\to T^*(WOT)$，因为 $T_\alpha^*\in R$，故 $T^*\in R_1$，所以 R_1 关于对合封闭．又由 3.4.5引理3，固定 $T\in B(H\to H)$时，$S\longmapsto ST$ 及 $S\longmapsto TS$ 是 WOT 连续的，因而当 $S\in R$，$T\in R_1$ 时，有 R 中网$\{T_\alpha\}$使 $T_\alpha\to T(WOT)$，所以$ST_\alpha\to$

$ST(WOT)$，由 $ST_\alpha\in R$，即得 $ST\in R_1$，再一次用这方法即知当 S，$T\in R_1$ 时，$ST\in R_1$，因而 R_1 是 $*$-子代数.

又如果 R 是交换的，由于固定 $T\in B(H\to H)$ 时，$S\longmapsto TS-ST$ 是 WOT 连续的. 因而对于 $T\in R$，$\{S\mid S\in B(H\to H), TS-ST=0\}$ 是包含 R 的 WOT 闭集，所以它包含 R_1. 由此当 $T\in R_1$ 时，$\{S\mid S\in B(H\to H),\ TS-ST=0\}$ 是包含 R 的 WOT 闭集，它仍包含 R_1，这就说明对于 S，$T\in R_1$，$TS-ST-0$，即 R_1 是交换的. 证毕.

定义　$B(H\to H)$ 的包含 I 的 WOT 闭的 $*$-子代数称为 ($B(H\to H)$ 中的) **Von Neumann** 代数.

由于 WOT 比范数拓扑 $\|\cdot\|$ 弱，所以 Von Neumann 代数是 C^* 代数.

引理 2　设 $T\in B(H\to H)$. 则 T 是正算子 (即对 $\xi\in H$，$(T\xi,\xi)\geqslant 0$) 的充分必要条件是：$T-T^*$ 且 $\sigma_T\subset[0,\infty)$.

证　充分性　记 $\varphi(t)=\sqrt{t}\ (t\geqslant 0)$，故 $\varphi\in C(\sigma_T)$，记 $T_1=\varphi(T)$，由于 $\varphi^2=\iota$，所以 $T_1^2=\iota(T)=T$，又 T_1 是自共轭的，所以对 $\xi\in H$，$(T\xi,\xi)=(T_1^2\xi,\xi)=\|T_1\xi\|^2\geqslant 0$.

必要性　设 T 是正算子. 在复 Hilbert 空间中，如果算子 T 使 $(T\xi,\xi)\in\mathbf{R}\ (\xi\in H)$，$T$ 是自共轭的. 因此，由 $\sigma_T\subset\mathbf{R}$，只要证明负数都是 T 的正则点. 设 $\lambda>0$，下面证明 $T+\lambda I$ 是正则算子：

对 $\xi\in H$，$((T+\lambda I)\xi,\xi)=(T\xi,\xi)+\lambda(\xi,\xi)\geqslant\lambda(\xi,\xi)$，所以 $\|(T+\lambda I)\xi\|\geqslant\lambda\|\xi\|$. 由此易见 $T+\lambda I$ 是一对一的. 由于 $T+\lambda I$ 是自共轭算子，$(T+\lambda I)H$ 的正交补是 $T+\lambda I$ 的零空间，因而 $(T-\lambda I)H$ 的正交补是 $\{0\}$，即 $T+\lambda I$ 的值域在 H 中稠密，再因为 $(T+\lambda I)^{-1}$ 是有界的，所以 $T+\lambda I$ 的值域等于 H，而 $(T+\lambda I)^{-1}\in B(H\to H)$，从而 $T+\lambda I$ 是正则的，$-\lambda\in\rho_T$. 从而 $\sigma_T\subset[0,\infty)$. 证毕.

定理 1 设 R 是 $B(H\to H)$ 的交换 Von Neumann 代数，则 R 上非零线性可乘泛函全体 $\mathscr{M}$(用弱 * 拓扑)是极度不连通的.

证 R 的 Гельфанд 表示 Γ 是 $R\to C(\mathscr{M})$ 的完全同构. 对于 $T\in R$, 记 $\Gamma(T)$ 为 $\hat{T}$. 由于 $\hat{T}$ 的值域等于 σ_T, 由 4.5.1 定理 4 的系以及引理 2, 可知 R 中自共轭算子全体在 Γ 下的象就是 $C_r(\mathscr{M})$, 而 R 中正算子的象是 $C_r(\mathscr{M})$ 中非负函数.

在 $C_r(\mathscr{M})$ 中, 以 $\leqslant$ 作为半序, 对于 φ, $\psi\in C_r(\mathscr{M})$, $\varphi\leqslant\psi$ 是指 $\varphi(f)\leqslant\psi(f)$ $(f\in\mathscr{M})$.

设 $\{\varphi_\alpha\}$ 是一族 $C_r(\mathscr{M})$ 中范数有界的函数. 对于足标集的有限子集 F, 记 $\varphi_F=\max\limits_{\alpha\in F}(\varphi_\alpha)$, 而以 $\subset$ 作为足标集的有限子集之间的序, $\{\varphi_F\}$ 是 $C_r(\Omega)$ 中的网, 而且 $\{\varphi_F\}$ 是单调上升的. 记 $\Gamma^{-1}(\varphi_F)$ 为 T_F, 即 $\hat{T}_F=\varphi_F$, 于是 $\{T_F\}$ 是 R 中范数有界的, 由自共轭算子所成的网, 且 $\{T_F\}$ 是单调上升的.

由 3.4.5 定理 7, $\{T_F\}$ WOT 收敛于 T, 因为 R 是 WOT 闭的, 所以 $T\in R$, 且 $T_F\leqslant T$, T 是满足 $T\geqslant T_F$ 的最小算子. 所以 $\hat{T}$ 是比每个 φ_F 大的最小函数, 由此 $\hat{T}=\sup\{\varphi_\alpha\}$.

因为 $C_r(\mathscr{M})$ 中范数有界的函数族都有上确界, 由 3.4.4 定理 6, $\mathscr{M}$ 是极度不连通的. 证毕.

定义 设 $P(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ 是 $B(H\to H)$ 的投影算子, 如果

(i) $P(t)P(s)=P(t)$ (当 $t\leqslant s$);

(ii) $P(t)$ 右连续(WOT 连续);

(iii) 当 $t\to+\infty$ 时 $P(t)\to I(WOT)$, 当 $t\to-\infty$ 时 $P(t)\to 0$ (WOT). 则称 $P(\cdot)$ 是 $B(H\to H)$ 中的**谱系**. 如果有 a, $b\in\mathbb{R}$ 使 $P(a)=0$, $P(b)=I$, 则称 $P(\cdot)$ 是**有界谱系**.

定理 2(有界自共轭算子的谱分解定理) 设 $T\in B(H\to H)$ 是自共轭算子, 则有 $B(H\to H)$ 中谱系 $P(\cdot)$ 使得:

(i) 当 $t\geqslant\max\{\lambda|\lambda\in\sigma_T\}$时 $P(t)=1$,

当 $t<\min\{\lambda|\lambda\in\sigma_T\}$时 $P(t)=0$;

(ii) $T=\int t\,dP(t)$.

(ii)中积分的意义是: 积分在$[a,b]$上取, $a<\min\{\lambda|\lambda\in\sigma_T\}$ $b\geqslant\max\{\lambda|\lambda\in\sigma_T\}$, 而且对任何 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 使得当

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

使 $\max\limits_{k=1,2,\cdots,n}(t_k-t_{k-1})<\delta$ 时, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}s_k(P(t_k)-P(t_{k-1}))-T\right|<\varepsilon$,

(s_k 是$[t_{k-1},t_k]$中数)

证 由T及I张成的$B(H\to H)$的子代数再取 WOT 闭包, 记为R. 易见R是个交换的 Von Neumann 代数且$T\in R$.

R的 Гельфанд 表示Γ是$R\to C(\mathscr{M})$的完全同构. 记$\Gamma(T)$为$\hat{T}$, $\hat{T}$是$\mathscr{M}$上的连续实值函数, 且$\hat{T}$的值域为σ_T.

对于$t\in\mathbb{R}$, 记$A(t)=\{f|f\in\mathscr{M},\ \hat{T}(f)\leqslant t\}$, 因为$\hat{T}$连续, $A(t)$是$\mathscr{M}$中闭集. 记$A(t)$的开核即$A(t)$的内点全体为$B(t)$, 由于$\mathscr{M}$是极度不连通的, $B(t)$是$\mathscr{M}$中既开又闭的集.

$B(t)$的特征函数是$\mathscr{M}$上连续函数, $\Gamma^{-1}(\chi_{B(t)})$是R中元, 记为$P(t)$. 这样, 对每个$t\in\mathbb{R}$, 作出了R中算子$P(t)$.

因为$\chi_{B(t)}$是特征函数, $\chi_{B(t)}^2=\chi_{B(t)}$, 由此, 从$\Gamma$是完全同构, $P(t)$是幂等的, $P(t)$是自共轭的, 所以$P(t)$是投影算子. 当$t_1\leqslant t_2$时, $A(t_1)\subset A(t_2)$, 所以$B(t_1)\subset B(t_2)$, 因而

$$\chi_{B(t_1)}\chi_{B(t_2)}=\chi_{B(t_1)},$$

即得$P(t_1)P(t_2)=P(t_1)$.

由于$\hat{T}$的值域为σ_T, 当$t\geqslant\max\{\lambda|\lambda\in\sigma_T\}$时, $A(t)=\mathscr{M}$, 从而$B(t)=\mathscr{M}$, 而$\chi_{B(t)}=1$, 所以$P(t)=I$. 类似地当$t<\min\{\lambda|\lambda\in\sigma_T\}$时, $A(t)=\varnothing$, $B(t)=\varnothing$, $\chi_{B(t)}$为0, $P(t)$是零算子.

下面证明 $P(\cdot)$是右 WOT 连续的. 设 $t_0\in\mathbb{R}$, 当$t\to t_0+0$时, $\{P(t)\}$是范数有界的单调下降的网, 所以 $P_t\to P(WOT)$, 而且这时是 SOT 的极限. P 仍是个投影算子且 $P\in R$, 所以 $\hat{P}$ 是个特征函数, $\hat{P}\leqslant\widehat{P(t)}=\chi_{B(t)}\quad(t>t_0)$, 并且 $\hat{P}$ 是使这不等式成立的最大函数, 即 $\hat{P}=\inf\{\chi_{B(t)}\mid t>t_0\}$. 设 $\hat{P}$ 是 B 的特征函数, B 是$\mathscr{M}$中的既开又闭的集, 由此, B 是

$$\bigcap\{B(t)\mid t>t_0\}$$

的最大的既开又闭的子集. 由 $A(t_0)=\bigcap\{A(t)\mid t>t_0\}$, $B(t_0)$是$A(t_0)$的最大开子集, 即知 $B(t_0)$是$\bigcap\{B(t)\mid t>t_0\}$的最大开子集, 所以 $B=B(t_0)$, 即 $P=P(t_0)$, 因而 $P(t)\to P(t_0)\,(WOT)$ (当 $t\to t_0+0$ 时) 即 $P(\cdot)$是右连续的.

最后证明(ii)式成立. 对 $\varepsilon>0$, 就令 $\delta=\varepsilon$, 任取一个分点组 $t_0<t_1<\cdots<t_n$ $(t_0<\min\{\lambda\mid\lambda\in\sigma_T\},\ t_n\geqslant\max\{\lambda\mid\lambda\in\sigma_T\})$, 使得 $\max(t_k-t_{k-1})<\varepsilon$, 再任取 $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$, 记

$$S=\sum_{k=1}^{n}\xi_k(P(t_K)-P(t_{k-1})),$$

易见$\Gamma(S)=\hat{S}=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\quad\chi_{B(t_k)\setminus B(t_{k-1})}$. 因为$B(t_n)=\mathscr{M}$, $B(t_0)=\varnothing$, 由 $B(t)$的作法, 可知 $\hat{S}-\hat{T}$ 在$\mathscr{M}$的每个点的值在$(-\varepsilon,\varepsilon)$中, 由此 $\|\hat{S}-\hat{T}\|<\varepsilon$, 由 Γ 的保范性, $\|S-T\|=\|\hat{S}-\hat{T}\|<\varepsilon$. 所以积分(ii)成立, 因而所作的 $P(\cdot)$满足一切要求. 证毕.

定理 2 中所作的 $P(\cdot)$称为自共轭算子 T 的**谱系**.

系 设 $T\in B(H\to H)$, $T=T^*$, $P(\cdot)$是 T 的谱系, 那末,

(i) 如果 $T_1\in B(H\to H)$且 $T_1T=TT_1$, 则 $T_1P(t)=P(t)T_1$ $(t\in\mathbb{R})$;

(ii) $t_0\in\mathbb{R}$, 则 $t_0\in\rho_T$ 的充分必要条件是: 在 t_0 的某一邻域中 $P(\cdot)$是常算子.

证 (i) 易见$\{S|S\in B(H\to H), ST_1-T_1S=0\}$是 WOT 闭的，由作法可知这集包含了 R. 但 $P(t)\in R$ $(t\in\mathbf{R})$，所以$P(t)T_1=T_1P(t)$ $(t\in\mathbf{R})$.

(ii) **必要性** 如果 $t_0\in\rho_T$，由于 ρ_T 是开集，所以有 $\varepsilon>0$，使$(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\subset\rho_T$，对于 $t_1, t_2\in(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$，因为 $\hat{T}$ 的值域等于 σ_T，所以 $A(t_1)=A(t_2)$，从而 $B(t_1)=B(t_2)$，并由此 $P(t_1)=P(t_2)$，即在$(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$中，$P(\cdot)$是常算子.

充分性 用反证法，如果 t_0 是T的谱点，于是有 $f\in\mathscr{M}$使$\hat{T}(f)=t_0$，当 $t_1<t_0<t_2$ 时，f 是 $A(t_2)$的内点而且$f\overline{\in}A(t_1)$，所以$B(t_2)\neq B(t_1)$，并由此 $P(t_2)\neq P(t_1)$. 证毕.

定理 3 设 $T\in B(H\to H)$且 $T=T^*$, $a<\min\{\lambda|\lambda\in\sigma_T\}$ $b\geqslant\max\{\lambda|\lambda\in\sigma_T\}$，则使 $T=\int tdP(t)$的$[a,b]$上谱系 $P(\cdot)$是唯一的.

证 如果 $Q(\cdot)$是谱系，$Q(a)=0, Q(b)=I$，且$T=\int tdQ(t)$. 由于积分是按 Riemann 意义的和式并按算子范数收敛，易知$T^n=\int t^n dQ(t)$，对于多项式 $p(p(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kt^k)$，有

$$\sum_{k=0}^{n}a_kT^k=\int p(t)dQ(t).$$

对于前面所作的 $P(\cdot)$也同样如此. 于是，对 $\xi\in H$，

$$\int p(t)d(Q(t)\xi, \xi)=\int p(t)d(p(t)\xi, \xi)\quad (p\text{ 是多项式}),$$

式中的积分可作为 Riemann-Stieltjes 积分或Lebesgue-stieltjes 积分理解. 对于任何 $s\in(a,b]$，可取一列实系数多项式$\{p_l\}$使得在$[a, b]$上 $p_1\geqslant p_2\geqslant p_3\geqslant\cdots$且$\{p_l\}$点点收敛于 $\chi_{[a,s]}$. 由积分的 Levi 引理，由$(Q(t)\xi,\xi)$及$(P(t)\xi,\xi)$所作出的 Lebesgue-Stieltjes 测度在$[a, s]$上的测度值相等. 而这两个都是右连续的函数，

所以

$$(Q(s)\xi,\xi)=(P(s)\xi,\xi)\quad(s\in[a,b],\xi\in H),$$

从而 $Q(s)=P(s)$　$(s\in[a,b])$，即P与Q是同一个谱系．证毕．

对于 $B(H\to H)$中酉算子，也可证明类似的谱分解定理，对于正常算子，略为麻烦一些。

4.5.4　正元

定义　设 R 是 C^*代数，$x\in R$，如果 $x=x^*$且 $\sigma_x\subset[0,+\infty)$，则称 x 是 R 中的**正元**．R 中正元全体记为 R^+．

引理 1　设 R 是 C^*代数，如果 $x\in R^+$，则有唯一的 $y\in R^+$ 使得 $y^2=x$．

证　记φ为函数 $\varphi(t)=\sqrt{t}$，易见 $\varphi^2=\iota$，所以 $\varphi(x)^2=\iota(x)=x$，而 $\varphi(x)$是正常元且 $\sigma_{\varphi(x)}\subset[0,+\infty)$，所以 $\varphi(x)$是自伴元并是正元，记 $y=\varphi(x)$，则 $y\in R^+$且 $y^2=x$．

又如果 $z\in R^+$且 $z^2=x$，易见$zx=xz$，记$\{e,x,z\}$张成的Banach子代数为 R_0，R_0 是个交换的 C^*代数．R_0 的 Гельфанд 表示 Γ是$R_0\to C(\mathscr{M}_0)$的完全同构．Γy，Γz都是$\mathscr{M}_0$上非负值的函数且$(\Gamma y)^2=\Gamma x=(\Gamma z)^2$，所以$\Gamma y=\Gamma z$，从而 $y=z$．证毕．

定义　对于 R 中正元 x，使 $y^2=x$ 的 $y\in R^+$称为x的**正平方根**，记为 $x^{\frac{1}{2}}$．

引理 2　设 R 是 C^*代数，$x\in R$ 且 $x=x^*$，则 $x\in R^+$的充分必要条件是：有数 $a>0$ 使$\|ae-x\|\leqslant a$．

证　**必要性**　设 $x\in R^+$，取 $a\geqslant\|x\|$，则 $\sigma_x\subset[0,a]$，因此$ae-x$的谱在$[0,a]$中．由于 $ae-x$ 是自伴元，$ae-x$的范数等于谱半径，所以$\|ae-x\|\leqslant a$．

充分性　如果有数 $a>0$ 使$\|ae-x\|\leqslant a$，因为 $ae-x$ 是自伴元，$\sigma_{ae-x}\subset[-a,a]$，所以 $\sigma_x\subset[0,2a]$，$x\in R^+$．证毕．

系 设 R 是 C^*代数, $x, y\in R^+$, 则 $x+y\in R^+$.

证 由于 x, y 都是自伴元, 所以 $x+y$ 是自伴元.

记 $a=\max(\|x\|, \|y\|)$, 由引理 2, $\|ae-x\|\leqslant a$, $\|ae-y\|\leqslant a$, 所以, $\|2ae-(x+y)\|\leqslant 2a$, 由引理 2, $x+y$ 是正元. 证毕.

定理 1 设 R 是 C^*代数, x 是 R 中自伴元, 则有唯一的 R^+ 中一对元 y, z 使得 $x=y-z$ 且 $yz=0$.

证 记 $\varphi_1(t)=\max(0, t)$, $\varphi_2(t)=-\min(0, t)(t\in\mathbf{R})$, 又记 $y=\varphi_1(x), z=\varphi_2(x)$, 由于 φ_1, φ_2 是非负函数, $y, z\in R^+$, 又因 $\varphi_1\varphi_2$ 是恒等于 0 的函数, $\varphi_1-\varphi_2=t$, 所以 $yz=0$ 且 $y-z=x$. y, z 符合要求.

如果 $y_1, z_1\in R^+$ 且 $y_1z_1=0, y_1-z_1=x$, 则

$$x^2=(y_1-z_1)^2=y_1^2+z_1^2=(y_1+z_1)^2.$$

同样上面的 y, z 使 $x^2=(y+z)^2$. 由于 $y+z, y_1+z_1$ 都在 R^+ 中, 且这两元的平方相等, 由正元的正平方根唯一, 所以 $y+z=y_1+z_1$, 于是结合 $y-z=y_1-z_1$ 即知 $y=y_1, z=z_1$. 证毕.

当 x 是 R 中自伴元时, 定理 1 中的二个正元 y, z 分别称为 x 的正部和负部, 记为 x^+ 及 x^-.

引理 3 设 R 是 C^*代数, $x\in R$, 如果 $\sigma_{x^*x}\subset(-\infty, 0]$, 则 $x=0$.

证 对于 $x\in R$, x^*x 显然是自伴元.

记 $x_1=\dfrac{1}{2}(x+x^*), x_2=\dfrac{1}{2i}(x-x^*)$, 于是

$$x=x_1+ix_2, x^*=x_1-ix_2.$$

直接计算可知, $x^*x+xx^*=2(x_1^2+x_2^2)$.

由于 x_1, x_2 是自伴元, x_1^2, x_2^2 也是自伴元, 且

$$\sigma_{x_1^2}=\{\lambda^2|\lambda\in\sigma_{x_1}\},$$

所以 x_1^2 是正元. 同样 x_2^2 是正元. 由引理 2 的系, 可知 $x_1^2+x_2^2\in$

R^+，即 $x^*x+xx^*\in R^+$. 由假设 $\sigma_{x^*x}\subset(-\infty,0]$，由此 $-x^*x$ 是正元，再由引理 2，$xx^*\in R^+$.

由 4.1.1 的定理 1，$\sigma_{x^*x}\cup\{0\}=\sigma_{xx^*}\cup\{0\}$，而 $\sigma_{x^*x}\subset(-\infty,0]$，$\sigma_{xx^*}\subset[0,+\infty)$，可见 $\sigma_{x^*x}=\sigma_{xx^*}=\{0\}$，从而 $\|x^*x\|=0$，所以 $\|x\|=0$，即 $x=0$. 证毕.

定理 2 设 R 是 C^* 代数，则对任何 $x\in R$，$x^*x\in R^+$.

证 用反证法，如果 $x^*x\overline{\in}R^+$，则 x^*x 有负的谱点. 设 $t_0<0$ 且 $t_0\in\sigma_{x^*x}$. 作 φ 是 $\mathbf{R}$ 上连续函数，使 φ 在 t_0 处不等于 0，但 φ 在 $[0,+\infty)$ 上为 0，这样的实值连续函数显然存在. 记 $\psi=\iota\varphi^2$.

由于 ψ 的函数值都在 $(-\infty,0]$ 中，$\psi(x^*x)$ 的谱在 $(-\infty,0]$ 中. 由函数演算是代数同态，

$$\psi(x^*x)=\varphi(x^*x)\iota(x^*x)\varphi(x^*x)=\varphi(x^*x)x^*x\varphi(x^*x).$$

记 $y=\varphi(x^*x)$，由于 φ 是实值的，$y=y^*$，因为 $\psi(x^*x)=yx^*xy=(xy)^*(xy)$. 由引理 3，$xy=0$，即 $x\varphi(x^*x)=0$，所以 $x^*x\varphi(x^*x)=0$，$(\iota\varphi)(x^*x)=0$. 由于 $\iota\varphi$ 在 t_0 处不为 0，并因 $(\iota\varphi)(\sigma_{x^*x})=\sigma_{(\iota\varphi)(x^*x)}$ 即得矛盾. 证毕.

系 1 设 R 是 C^* 代数，对 $x\in R$，$y\in R^+$，$x^*yx\in R^+$.

证 $x^*yx=x^*y^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}x^*=(y^{\frac{1}{2}}x^*)^*(y^{\frac{1}{2}}x^*)\in R^+$. 证毕.

系 2 设 R 是 C^* 代数，则

$$R^+=\{x^*x\,|\,x\in R\}=\{x^2\,|\,x\in R,x=x_*\}=\{x^2\,|\,x\in R^+\}.$$

引理 4 设 R 是 C^* 代数，则 R^+ 是 $(R,\|\cdot\|)$ 中闭集.

证 设 $\{x_n\}$ 是 R^+ 中点列且 $x_n\to x(\|\cdot\|)$. 由于 $\|x_n-x\|\to 0$，所以 $\|x_n^*-x^*\|\to 0$，因 $x_n=x_n^*$，即知 $x^*=x$.

下面用反证法证明 $\sigma_x\subset[0,+\infty)$. 如果 $t_0\in\sigma_x$，$t_0<0$，记 $a=\sup\limits_n\|x_n\|$，由引理 2，$\|ae-x_n\|\leqslant a$，且按 $\|\cdot\|$，$ae-x_n\to ae-x(n\to\infty)$ 所以 $\|ae-x\|\leqslant a$，但 $ae-x$ 有谱点 $a-t_0>a$，矛盾. 因而 x 是正元.

即 R^+是$(R,\|\cdot\|)$中闭集. 证毕.

在 C^*代数中,如果 x, y 是自伴元且 $y-x\in R^+$, 就记为 $x\leqslant y$. $\leqslant$是R的自伴元全体中的半序. 而 $R^+=\{x\mid 0\leqslant x\}$.

定理 3 设R是 C^*代数, 如果 x, $y\in R$ 使 $0\leqslant x\leqslant y$, 则

$$x^{\frac{1}{2}}\leqslant y^{\frac{1}{2}}.$$

证 先设 x,y 都是正则元(其实由 $x\leqslant y$,当 x 是正则元时 y就一定是正则的),这时,x^{-1},y^{-1} 仍在 R^+中.

由定理 2 的系 1,因 $x\leqslant y$,$y^{-\frac{1}{2}}(y-x)y^{-\frac{1}{2}}\in R^+$,即$y^{-\frac{1}{2}}xy^{-\frac{1}{2}}\leqslant e$ 这说明$y^{-\frac{1}{2}}xy^{-\frac{1}{2}}$的谱在$[0,1]$中,所以$\|y^{-\frac{1}{2}}xy^{-\frac{1}{2}}\|\leqslant 1$. 由此$\|x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\|\leqslant 1$. 由 4.1.1 的定理 1, 因为 $x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}$的谱半径$\leqslant 1$,所以$y^{-\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}$的谱半径$\leqslant 1$. 但这个元是在 R^+中的,由此$y^{-\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}$ 的谱在$[0,1]$中,于是

$$e-y^{-\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}\in R^+,$$

再从定理 2 的系 1, $y^{\frac{1}{4}}(e-y^{-\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}})y^{\frac{1}{4}}\in R^+$,即 $y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\in R^+$, $x^{\frac{1}{2}}\leqslant y^{\frac{1}{2}}$.

在上面证明中的$x^{\frac{1}{4}}$, $y^{-\frac{1}{2}}$等, 可以理解为$(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$及 $(y^{-1})^{\frac{1}{2}}$, 而$(y^{-1})^{\frac{1}{2}}$也可作$(y^{\frac{1}{2}})^{-1}$ 理解, 或者作函数 $\psi(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$或$\sqrt[4]{t}$ $(t>0)$,作为 $\psi(y)$来理解也可. 由于 $0\in\rho_y$, $\psi\in C(\sigma_y)$, 函数演算可以进行.

现对一般情况来证, 令 $\varphi_n(t)=\sqrt{\frac{1}{n}+t}\,(t\geqslant 0, n=1,2,\cdots)$, 于是 $\varphi_n(x)=\left(\frac{1}{n}e+x\right)^{\frac{1}{2}}$, $\varphi_n(y)=\left(\frac{1}{n}e+y\right)^{\frac{1}{2}}$. 由上所证,

$$\varphi_n(x)\leqslant\varphi_n(y)\quad(n=1,2,\cdots).$$

又令

$$\varphi(t)=\sqrt{t}\ \ (t\geqslant 0),\ \varphi(x)=x^{\frac{1}{2}},\ \varphi(y)=y^{\frac{1}{2}},$$

因为 $\varphi_n\to\varphi$(在$[0,a]$上一致收敛,$a\geqslant\max(\|x\|,\|y\|)$)因而

$$\|\varphi_n(x)-\varphi(x)\|\to 0,\ \|\varphi_n(y)-\varphi(y)\|\to 0.$$

由于$\varphi_n(y)-\varphi_n(x)\in R^+$,并按$\|\cdot\|$,$\varphi_n(y)-\varphi_n(x)\to\varphi(y)-\varphi(x)\ (n\to\infty)$,由引理4,$\varphi(y)-\varphi(x)\in R^+$,即$x^{\frac{1}{2}}\leqslant y^{\frac{1}{2}}$. 证毕.

这里,并不要求 x,y 的交换性. 当 x,y 可交换时,以及引理 3 与定理 2 中如果 x 与 x^* 交换时, 只要对由$\{x,y,e\}$或$\{x,x^*,e\}$张成的 Banach 子代数 R_0 这个交换的 C^*代数中, 用 Гельфанд 表示变成函数,而正元即为相应的函数,是非负的. 这些结论就立即可以得到了.

4.5.5 正泛函,态与纯态

定义 设 R 是 C^*代数, $R_0\subset R$, 如果 R_0 是 R 的线性子空间. $e\in R_0$ 且 R_0 关于对合封闭,则称 R_0 是 R 的**自伴子空间**. 在自伴子空间 R_0 上定义的线性泛函 f,如果使

$$f(x)\geqslant 0\quad(\text{当 } x\in R_0\cap R^+\text{时}),$$

就称 f 为 R_0 上的正泛函. 如果 f 是自伴子空间 R_0 上的正泛函且 $f(e)=1$,就称 f 是 R_0 上的**态**(state). R_0 上的态全体记为$\mathscr{S}(R_0)$.

下面总设 R_0 是 C^*代数 R 的自伴子空间. 由于 $R^+=\{x^*x|x\in R\}$, 因此 R 上的正泛函与前面的作为对称 Banach 代数时所定义的正泛函是一致的.

定理 1 设 R_0 是 C^*代数 R 的自伴子空间, $f\in R'_0$, 则 f 是 R_0 上正泛函的充分必要条件是: $f\in R_0^*$ 且 $\|f\|=f(e)$.

证 必要性 R_0 中的自伴元 x 可以写成为 R_0 中的两个正元

之差：$x=\|x\|e-(\|x\|e-x)$. 因而 R_0 上的正泛函在自伴元上的取值是实数. 又因为 R_0 中元 y 的实部 $\frac{1}{2}(y+y^*)$ 与虚部 $\frac{1}{2i}(y-y^*)$ 都在 R_0 中，所以 f 具有 Hermite 性，即

$$f(y^*)=\overline{f(y)}\quad (y\in R_0).$$

设 x 是 R_0 中自伴元且 $\|x\|\leqslant 1$，由于 $e+x, e-x\in R_0\cap R^+$，从而 $f(e+x)\geqslant 0, f(e-x)\geqslant 0$. 所以 $|f(x)|\leqslant f(e)$.

现设 $y\in R_0$ 且 $\|y\|\leqslant 1$，先取 $\lambda\in\mathbf{T}$ $(\mathbf{T}=\{\lambda \mid |\lambda|=1, \lambda\in\mathbf{C}\})$ 使得 $\lambda f(y)=|f(y)|$，记 $y_1=\mathrm{Re}(\lambda y)=\frac{1}{2}(\lambda y+\bar{\lambda}y^*)$，于是

$$\begin{aligned}f(y_1)&=\frac{1}{2}(f(\lambda y)+\overline{f(\lambda y)})=\frac{1}{2}(|f(y)|+|f(y)|)\\&=|f(y)|.\end{aligned}$$

由于 y_1 是 R_0 中自伴元且 $\|y_1\|\leqslant 1$，由上所证 $|f(y)|=f(y_1)\leqslant f(e)$. 所以 $f\in R_0^*$ 且 $\|f\|\leqslant f(e)$. 又显然 $\|f\|\geqslant f(e)$，从而 $\|f\|=f(e)$.

充分性　设 $f\in R_0^*$ 且 $\|f\|=f(e)$. 不妨设 $\|f\|=f(e)=1$. 先用反证法证 f 在 R_0 的自伴元上取值必是实数. 设 x 是 R_0 中自伴元，$f(x)=a+bi\quad (a,b\in\mathbf{R}, b\neq 0)$，记 $y=\frac{1}{b}(x-ae)$，则 y 是 R_0 中自伴元且 $f(y)=i$，对于自然数 n，$f(nie+y)=(n+1)i$，由 $\|f\|=1$，所以，$n+1\leqslant\|nie+y\|$，因而

$$\begin{aligned}(n+1)^2\leqslant\|nie+y\|^2&=\|(-nie+y)(nie+y)\|\\&=\|n^2e+y^2\|\leqslant n^2+\|y\|^2,\end{aligned}$$

所以 $2n+1\leqslant\|y\|^2$ 对一切 n 成立. 显然，这不可能. 由此，f 在自伴元上取值为实数.

现设 $z\in R_0\cap R^+$，记 $\|z\|=a$，于是 $\|ae-z\|\leqslant a$，所以 $|f(ae-z)|\leqslant a$，即 $|a-f(z)|\leqslant a$，因为 $f(z)$ 是实数，$a-f(z)\leqslant a$，从而 $f(z)\geqslant 0$，即 f 是 R_0 上正泛函. 证毕.

系 $\mathscr{S}(R_0)$是$(R_0^*,\sigma(R_0^*,R_0))$中凸紧集.

证 由$\mathscr{S}(R_0)$的定义即知是凸集，由于$\mathscr{S}(R_0)$在R_0^*的单位闭球中，所以只要证明$\mathscr{S}(R_0)$是$(R_0^*,\sigma(R_0^*,R_0))$中闭集. 由

$$\mathscr{S}(R_0)=\{f\mid f\in R_0^*,f(e)=1\}\cap$$

$$\left(\bigcap_{x\in R_0\cap R^+}\{f\mid f\in R_0^*,f(x)\geqslant 0\}\right),$$

所以$\mathscr{S}(R_0)$是$(R_0^*,\ \sigma(R_0^*,R_0))$中一族闭集的交，因此$\mathscr{S}(R_0)$是$(R_0^*,\sigma(R_0^*,R_0))$中闭集. 证毕.

定理 2 设R_0是C^*代数R的自伴子空间，对于$x_0\in R_0$及$\lambda_0\in\sigma_{x_0}$，有$f\in\mathscr{S}(R_0)$使$f(x_0)=\lambda_0$.

证 不妨设x_0与e线性无关. 在$\mathrm{span}\{e,\ x_0\}$这个二维空间中，令$g(\lambda e+\mu x_0)=\lambda+\mu\lambda_0$，这个$g$是$\mathrm{span}\{e,x_0\}$上的线性泛函，且因为对于这个二维空间中的元$y$，$g(y)\in\sigma_y$，所以$|g(y)|\leqslant\|y\|$. 又因$g(e)=1$，所以$\|g\|=1=g(e)$. 由 Hahn-Banach 定理，可以把$g$延拓成$R_0$上的线性泛函且保持范数不变，这样得到$R_0^*$中的$f$显然是$\mathscr{S}(R_0)$中元且$f(x_0)=\lambda_0$. 证毕.

定义 $\mathscr{S}(R_0)$的端点称为R_0的纯态(pure state)，R_0的纯态全体记为$\mathscr{P}(R_0)$.

对于R_0中元x，记$\mathscr{S}(x)=\{f(x)\mid f\in\mathscr{S}(R_0)\}$，又记$\mathscr{P}_{R_0}(x)=\{f(x)\mid f\in\mathscr{P}(R_0)\}$.

由$\mathscr{S}(R_0)$就是R_0^*中使$\|f\|=f(e)=1$的元，因此，当R_1,R_2是两个自伴子空间且$R_1\subset R_2$时，$\mathscr{S}(R_2)$中元限制在R_1上时是$\mathscr{S}(R_1)$中元，又$\mathscr{S}(R_1)$中元可以延拓成$\mathscr{S}(R_2)$中元，所以对于$x\in R_1$，$\{f(x)\mid f\in\mathscr{S}(R_1)\}=\{f(x)\mid f\in\mathscr{S}(R_2)\}$，因此，对于$x\in R_0$，集$\{f(x)\mid f\in\mathscr{S}(R_0)\}=\{f(x)\mid f\in\mathscr{S}(R)\}$. 上面的$\mathscr{S}(x)$是与$x$作为哪个自伴子空间中元是无关的. 而$\mathscr{P}_{R_0}(x)$则与$x$作为哪个空间$R_0$中的元有关.

引理 1　设R是C^*代数，$x\in R$，那末

(i) 如果x是R中正常元，则$\|x\|=\max\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\mathscr{S}(x)\}$；

(ii) $\mathscr{S}(x)=\{0\}$的充分必要条件是$x=0$；

(iii) $\mathscr{S}(x)\subset\mathbf{R}$的充分必要条件是$x=x^*$；

(iv) $\mathscr{S}(x)\subset[0,\infty)$的充分必要条件是$x\in R^+$.

证　(i) 由于$\mathscr{S}(x)\supset\sigma_x$，当$x$是正常元时，$\max\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\mathscr{S}(x)\}$不小于$x$的谱半径，而谱半径即为范数，$\max\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\mathscr{S}(x)\}\geqslant\|x\|$；反过来由态的范数为1，即知$\max\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\mathscr{S}(x)\}\leqslant\|x\|$.

(ii) (iii) (iv) 中的充分性由态的定义及$\mathscr{S}(x)$的意义即知. 所以只要分别证明必要性.

(ii) 设$\mathscr{S}(x)=\{0\}$，记x的实部及虚部为x_1及x_2，于是$\mathscr{S}(x_1)=\{0\}$，$\mathscr{S}(x_2)=\{0\}$. 由(i)及x_1，x_2是自伴元，所以$x_1=x_2=0$，从而$x=x_1+ix_2=0$.

(iii) 如果$\mathscr{S}(x)\subset\mathbf{R}$，对于任何态$f$，$f(x)=f(x^*)$，因此有$\mathscr{S}(x-x^*)=\{0\}$，由(ii)，$x-x^*=0$，即$x=x^*$.

(iv) 如果$\mathscr{S}(x)\subset[0,\infty)$，由(iii)$x=x^*$，又因$\sigma_x\subset\mathscr{S}(x)$，所以$\sigma_x\subset[0,\infty)$，即知$x\in R^+$. 证毕.

定理 3　设R_0是C^*代数R的自伴子空间，$x\in R_0$，那末

(i) 如果$\mathscr{D}_{R_0}(x)=0$，则$x=0$；

(ii) 如果$\mathscr{D}_{R_0}(x)\subset\mathbf{R}$，则$x=x^*$；

(iii) 如果$\mathscr{D}_{R_0}(x)\subset[0,\infty)$，则$x\in R^+$；

(iv) 如果x是R中正常元，则$\|x\|=\max\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\mathscr{D}_{R_0}(x)\}$.

证　(i) (ii) (iii)的证明是相同的. 记E为$\{0\}$，$\mathbf{R}$或$[0,\infty)$，由于E是$\mathbf{C}$的凸闭子集，$\{f\,|\,f(x)\in E, f\in R_0^*\}$是$(R_0^*,\sigma(R_0^*,R))$的凸闭子集，定理中(i) (ii) (iii)的条件即为在E是这三个集时，$\mathscr{D}(R_0)\subset\{f\,|\,f(x)\in E, f\in R_0^*\}$，由右边是凸闭集，所以$\overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{D}(R_0)\subset\{f\,|\,f(x)\in E, f\in R_0^*\}$. 但$\mathscr{S}(R_0)$是$(R_0^*,\sigma(R_0^*,R_0))$中凸紧集，$\mathscr{D}(R_0)$是

$\mathscr{S}(R_0)$ 的端点全体，由 Крейн-Мильман 定理，$\overline{\text{co}}\,\mathscr{P}(R_0)=\mathscr{S}(R_0)$，因而这集包含了$\mathscr{S}(R_0)$，由此，由(i)(ii)(iii)的条件可分别得到$\mathscr{S}(x)=\{0\}$，$\mathscr{S}(x)\subset\mathbf{R}$及$\mathscr{S}(x)\subset[0,\infty)$. 由引理 1 分别得到 $x=0, x=x^*, x\in R^+$.

(iv) 设 x 是R中正常元，由引理 1，有 $f_0\in\mathscr{S}(R_0)$ 使$|f_0(x)|=\|x\|$. 取 $\lambda\in\mathbf{T}$ 使 $\lambda f_0(x)=\|x\|$并记 $y=\lambda x$，于是 $f_0(y)=\|y\|$，记

$$\{f\,|\,f\in\mathscr{S}(R_0), f(y)=\|y\|\}$$

为 A，易见 A 是$(R_0^*, \sigma(R_0^*, R_0))$的凸紧集$\mathscr{S}(R_0)$的面. 由Крейн-Мильман 定理，$A$ 有端点 g，g 也是$\mathscr{S}(R_0)$的端点，即 $g\in\mathscr{P}(R_0)$且 $g(y)=\|y\|$. 于是$|g(x)|=\|x\|$. 证毕.

下面讨论$\mathscr{S}(R_0)$的子集$\mathscr{S}_0$，定理 4 的各点中的条件都在一定意义上说明$\mathscr{S}_0$是有相当多的元，而这些条件都是等价的.

定理 4 设 R_0 是 C^*代数 R 的自伴子空间，$\mathscr{S}_0\subset\mathscr{S}(R_0)$，则下列命题等价：

(i) $\overline{\mathscr{S}_0}\supset\mathscr{P}(R_0)$.

(ii) $\overline{\text{co}}\,\mathscr{S}_0=\mathscr{S}(R_0)$.

(iii) 当 $x\in R_0$ 使得对任何 $f\in\mathscr{S}_0$ 成立 $f(x)\geqslant 0$ 时，必定 $x\in R^+$.

(iv) 对 R_0 中正常元 x 成立$\|x\|=\sup\{|f(x)|\,|\,f\in\mathscr{S}_0\}$.

(v) 对 R_0 中自伴元 x 成立$\|x\|=\sup\{|f(x)|\,|\,f\in\mathscr{S}_0\}$.

(vi) 对 $R_0\cap R^+$中元 x 成立$\|x\|=\sup\{|f(x)|\,|\,f\in\mathscr{S}_0\}$.

(其中闭包是指在 $\sigma(R_0^*, R_0)$ 这个拓扑下的闭包.)

证 (i)⇒(ii) 由$\overline{\text{co}}\,\mathscr{P}(R_0)=\mathscr{S}(R_0)$即得.

(ii)⇒(iii) 设(ii)成立，又 $x\in R_0$ 使 $f(x)\geqslant 0\,(f\in\mathscr{S}_0)$. 由此，$\mathscr{S}_0$ 在$\{f\,|\,f\in\mathscr{S}(R_0), f(x)\geqslant 0\}$中，由于这是$(R_0^*, \sigma(R_0^*, R_0))$的凸闭集，所以它包含$\overline{\text{co}}\,\mathscr{S}_0=\mathscr{S}(R_0)$，即$\mathscr{S}(x)\subset[0,\infty)$，从而 $x\in R^+$.

(ii)⇒(iv) 仍设(ii)成立，并用反证法证明. 如果 $x_0\in R_0$，x_0

是正常元但$\|x_0\|>\sup\{|f(x_0)|\,|f\in\mathscr{S}_0\}(=a)$，由于$\{f|f\in\mathscr{S}(R_0),|f(x)_0)|\leqslant a\}$是$(R_0^*,\sigma(R_0^*,R_0))$中凸闭集，由它包含$\mathscr{S}_0$及(ii)成立，所以这集包含了$\mathscr{S}(R_0)$，从而$x_0$的谱半径要$\leqslant a$. 矛盾.

(iv)⇒(v)⇒(vi)是显然的.

(vi)→(ii)　用反证法. 如果$\overline{\text{co}}\mathscr{S}_0\neq\mathscr{S}(R_0)$，则有$f_0\in\mathscr{S}(R_0)$，但$f_0\overline{\in}\overline{\text{co}}\mathscr{S}_0$，因而有$(R_0^*,\ \sigma(R_0^*,R_0))^\#$中元，即$R_0$中元$x_0$使得

$$\text{Re}f_0(x_0)>\text{Re}f(x_0)\quad(f\in\overline{\text{co}}\mathscr{S}_0).$$

令$y_0=\text{Re}x_0=\frac{1}{2}(x_0+x_0^*)$，由于正泛函都有 Hermite 性，所以

$$\text{Re}f_0(x_0)=f_0(y_0)>f(y_0)=\text{Re}f(x_0)\quad(f\in\overline{\text{co}}\mathscr{S}_0).$$

再令$z_0=\|y_0\|e+y_0$，则$z_0\in R_0\cap R^+$，且$f_0(z_0)>f(z_0)\ (f\in\text{co}\mathscr{S}_0)$，因为$\overline{\text{co}}\mathscr{S}_0$是紧集，$\{f(z_0)\}\ (f\in\overline{\text{co}}\mathscr{S}_0)$的最大值可达，所以

$$f_0(z_0)>\sup\{f(z_0)|f\in\overline{\text{co}}\mathscr{S}_0\}\geqslant\sup\{f(z_0)|f\in\mathscr{S}_0\},$$

由(vi)将得到$f_0(z_0)>\|z_0\|$，这与$f_0\in\mathscr{S}(R_0)$矛盾.

以上已证明了(ii),(iv),(v),(vi)的等价性及(i)⇒(ii)⇒(iii).

(ii)⇒(i)　由于$\overline{\text{co}}\mathscr{S}_0=\mathscr{S}(R_0)$，所以$\overline{\text{co}}(\overline{\mathscr{S}_0})=\mathscr{S}(R_0)$，由3.3.6 定理 2，即知$\overline{\mathscr{S}_0}\supset\mathscr{P}(R_0)$.

(iii)⇒(vi)　用反证法. 如果有$x_0\in R_0\cap R^+$使得

$$\|x_0\|>\sup\{f(x_0)|f\in\mathscr{S}_0\}\quad(=a),$$

于是元$y_0=ae-x_0$使得$f(y_0)\geqslant0\ (f\in\mathscr{S}_0)$，然而因为正元$x_0$的范数等于谱半径，且谱点都是非负数，所以正元$x_0$的范数$\|x_0\|$是$x_0$的谱点，从而$y_0$有谱点$a-\|x_0\|<0$，即$y_0\overline{\in}R^+$，与条件(iii)矛盾. 至此所有各点的等价性都已证明. 证毕.

下面举一个例，对于复 Hilbert 空间H，$B(H\to H)$是C^*代数，就以它自己作为R_0，对于H中范数为 1 的向量ξ，作映射$T\longmapsto(T\xi,\xi)\ (T\in B(H\to H))$，记为$f_\xi$，由

$$|f_\xi(T)|=|(T\xi,\xi)|\leqslant\|T\|,$$

及 $f_\xi(I)=1$，所以 $\|f_\xi\|=f_\xi(I)=1$，因而 f_ξ 是 $B(H\to H)$ 上的态．这样的态称为 $B(H\to H)$ 的向量态．记向量态全体为 $\mathscr{S}_0$，由于 $B(H\to H)^+=\{$正算子全体$\}$（由此也可得知 f_ξ 是正泛函并由 $f_\xi(I)=1$ 而推出 f_ξ 是态），所以 $\mathscr{S}_0$ 满足定理 4 中的(iii)，由定理 4 即知当 T 是 $B(H\to H)$ 中正常元（即 T 是正常算子）时，

$$\|T\|=\sup\{|(T\xi,\xi)|\,|\,\xi\in H,\|\xi\|=1\},$$

不需要用谱分解定理．

定理 5 设 R_0,R_1 是 C^* 代数 R 中两个自伴子空间且 $R_0\subset R_1$，则 $\mathscr{D}(R_0)$ 中的 f_0 可以延拓成 $\mathscr{D}(R_1)$ 中的 f_1．

证 记 $\mathscr{S}_1=\{g\,|\,g\in\mathscr{S}(R_1),\ g|_{R_0}=f_0\}$．由于 R_0 上的态可以延拓成 R_1 上的态，所以 $\mathscr{S}_1$ 非空．$\mathscr{S}_1$ 显然是 $(R_1^*,\ \sigma(R_1^*,R_1))$ 中的凸集，且因 $\mathscr{S}_1=\bigcap\limits_{x\in R_0}\{g\,|\,g\in R_1^*,g(x)=f_0(x)\}\cap\mathscr{S}(R_1)$，$\mathscr{S}_1$ 是闭集，$\mathscr{S}_1$ 是凸紧集 $\mathscr{S}(R_1)$ 的非空凸闭子集．现证 $\mathscr{S}_1$ 是 $\mathscr{S}(R_1)$ 的面．

设 $g_1,g_2\in\mathscr{S}(R_1)$，$t\in(0,\ 1)$ 且 $tg_1+(1-t)g_2\in\mathscr{S}_1$．把 g_1,g_2 限制在 R_0 上，由于 $g_1|_{R_0}$，$g_2|_{R_0}\in\mathscr{S}(R_0)$ 且 $tg_1|_{R_0}+(1-t)g_2|_{R_0}(=f_0)\in\mathscr{D}(R_0)$，而且 $t\in(0,1)$，所以 $g_1|_{R_0}=g_2|_{R_0}=f_0$，也即 $g_1,g_2\in\mathscr{S}_1$，因而 $\mathscr{S}_1$ 是 $\mathscr{S}(R_1)$ 的面．由 Крейн-Мильман 定理，$\mathscr{S}_1$ 有端点 f_1，f_1 也是 $\mathscr{S}(R_1)$ 的端点，即 $f_1\in\mathscr{D}(R_1)$ 而且 $f_1|_{R_0}=f_0$．证毕．

4.5.6 线性有界泛函的分解

这一节中，仍设 R 是 C^* 代数，R_0 是 R 的自伴子空间．

定义 设 $f\in R_0'$，如果 $f(x^*)=\overline{f(x)}$ $(x\in R_0)$，则称 f 是 R_0 上的 **Hermite 泛函**．

易知 R_0' 中的 f 是 Hermite 泛函的充分必要条件是：对于 R_0

中的自伴元 x, $f(x)\in\mathbb{R}$.

当 $f\in R_0'$ 时，令 $g(x)=\overline{f(x^*)}$ $(x\in R_0)$，易见 $g\in R_0'$，而且 $f_1=\frac{1}{2}(f+g)$, $f_2=\frac{1}{2i}(f-g)$ 是 R_0 上的 Hermite 泛函，$f=f_1+if_2$，这样作出的 f_1, f_2 分别称为 f 的实部及虚部.

R_0 上的正泛函是 Hermite的，但R_0 上的Hermite 泛函不一定是有界的.

定理 1 $\overline{\text{co}}(\mathscr{S}(R_0)\cup(-\mathscr{S}(R_0)))$ 等于 $\{f\,|\,f\in R_0^*,\ \|f\|\leqslant 1, f$ 是 R_0 上 Hermite 泛函$\}$.

证 记 $\overline{\text{co}}(\mathscr{S}(R_0)\cup(-\mathscr{S}(R_0)))$ 为 A，又记 R_0^* 中范数 $\leqslant 1$ 的 Hermite 泛函全体为 B. 由于 B 是 $(R_0^*, \sigma(R_0^*, R_0))$ 中凸闭集，所以 $A\subset B$.

下面用反证法证明 $A=B$. 设有 $f\in R_0^*$, $\|f\|\leqslant 1$, f 是 Hermite 泛函，而 $f\overline{\in}\,\overline{\text{co}}(\mathscr{S}(R_0)\cup(-\mathscr{S}(R_0)))$，因此，有 $(R_0^*,\ \sigma(R_0^*, R_0))$ 上的线性连续泛函，也即有 R_0 中元 x_0，使得

$$\text{Re}\,g(x_0)<\text{Re}\,f(x_0)\quad(g\in A).$$

记 $y_0=\frac{1}{2}(x_0+x_0^*)$，由于所说到的泛函都是 Hermite 的，因此，

$$g(y_0)<f(y_0)\quad(g\in A).$$

由于 $A\supset\mathscr{S}(R_0)$，而在 $\mathscr{S}(R_0)$ 中就有 g 使 $g(R_0)=\|y_0\|$，所以

$$\|y_0\|<f(y_0),$$

这与 $\|f\|\leqslant 1$ 矛盾. 因此 $A=B$. 证毕.

定理 2

$$\overline{\text{co}}(\mathscr{S}(R_0)\cup(-\mathscr{S}(R_0)))$$
$$=\{tf-sg\,|\,t,s\in[0,1], t+s=1, f,g\in\mathscr{S}(R_0)\}.$$

证 式中的左端显然包含了右端，而右端又包含了 $\mathscr{S}(R_0)$, $-\mathscr{S}(R_0)$ 并且是凸集，因此只要证明右端是闭集.

$\mathbf{C}\times R_0^*\times R_0\to R_0^*$的映射$(\lambda,\ \varphi,\psi)\longmapsto\lambda\varphi-(1-\lambda)\psi$是连续的，其中$R_0^*$用弱＊拓扑$\sigma(R_0^*,\ R_0)$，由于定理中式子右端即是

$$[0,1]\times\mathscr{S}(R_0)\times\mathscr{S}(R_0)$$

在上述连续映射下的象，因此由于$[0,1]\times\mathscr{S}(R_0)\times\mathscr{S}(R_0)$是紧集，即知$\{tf-sg\,|\,t,s\in[0,1],t+s=1,f,g\in\mathscr{S}(R_0)\}$是紧集，因而是闭集，即等式成立. 证毕.

系 设$f_0\in R_0^*$且f_0是 Hermite 泛函，则有R_0上正泛函f_1，f_2，使得$f_0=f_1-f_2$且$\|f_0\|=\|f_1\|+\|f_2\|$.

证 如果$\|f_0\|=1$，由定理 1,2，由于R_0上范数$\leqslant1$的Hermite 泛函全体是$\{tf-sg\,|\,t,s\in[0,1],t+s=1,f,\ g\in\mathscr{S}(R_0)\}$，所以有$t\in[0,\ 1]$，$f$，$g\in\mathscr{S}(R_0)$使$f_0=tf-(1-t)g$. 令$f_1=tf$，$f_2=(1-t)g$，这时$f_1,f_2$就符合一切要求.

$f_0=0$时是平凡的情况（取$f_1=f_2=0$即可）. 一般情况只要先乘一适当正数即可证明. 证毕.

定理 3 设R是C^*代数，$f\in R^*$且f是R上 Hermite 泛函，则使得$f=f_1-f_2$且$\|f\|=\|f_1\|+\|f_2\|$成立的R上正泛函f_1，f_2只有唯一的一对.

证 只要在$\|f\|=1$的情况下来证明.

设$\|f\|=1$且f是 Hermite 泛函，对$\varepsilon>0$，有x_0使$\|x_0\|=1$，$|f(x_0)|>1-\varepsilon$，在x_0上乘上适当的$\lambda\in\mathbf{T}$，并记λx_0为y_0时，使$f(y_0)>1-\varepsilon$，再令$z_0=\dfrac{1}{2}(y_0+y_0^*)$，由$f$是 Hermite 泛函，所以$f(z_0)=f(y_0)$，$f(z_0)>1-\varepsilon$ （$\|z_0\|\leqslant1$）. 总之，有自伴元x使得$\|x\|=1$且$f(x)>1-\varepsilon$. 记$y_1=\dfrac{1}{2}(e-x)$，$y_2=\dfrac{1}{2}(e+x)$，这时，$y_1,y_2\in R^+$且$y_1+y_2=e$. y_1,y_2的取法与ε有关.

如果f_1,f_2是R上正泛函，使得$f=f_1-f_2$且$\|f_1\|+\|f_2\|=1$，

因而，$f_1(e)+f_2(e)=1$. 于是

$$\varepsilon>1-f(x)=f_1(e)+f_2(e)-f_1(x)+f_2(x)$$
$$-f_1(e-x)+f_2(e+x),$$

由于 f_1, f_2是正泛函，$e-x, e+x$ 是正元，所以

$$\varepsilon>f_1(y_1), \varepsilon>f_2(y_2).$$

易见，如果 φ_1, φ_2 也是 R 上正泛函且 $f=\varphi_1-\varphi_2$, $\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|=1$ 时，同样成立 $\varepsilon>\varphi_1(y_1), \varepsilon>\varphi_2(y_2)$.

由于 $R^+=\{x^*x \mid x\in R\}$，由关于正泛函的 Schwarz 不等式，以及正泛函的范数等于在 e 处的值，所以对 $z\in R$,

$$|f_1(y_1z)|^2\leqslant f_1(y_1^{\frac{1}{2}}y_1^{\frac{1}{2}})f_1(z^*y_1^{\frac{1}{2}}y_1^{\frac{1}{2}}z)\leqslant\varepsilon\|z\|^2,$$
$$|f_2(y_2z)|^2\leqslant f_2(y_2)f_2(z^*y_2z)\leqslant\varepsilon\|z\|^2.$$

同样也对于 φ_1, φ_2 有 $|\varphi_1(y_1z)|^2\leqslant\varepsilon\|z\|^2$, $|\varphi_2(y_2z)|^2\leqslant\varepsilon\|z\|^2$.

由于 $f_1-f_2=f=\varphi_1-\varphi_2$，有$f_1-\varphi_1=f_2-\varphi_2$，所以

$$\begin{aligned}&f_1(z)-\varphi_1(z)\\&=f_1(y_1z)+f_1(y_2z)-\varphi_1(y_1z)-\varphi_1(y_2z)\\&=f_1(y_1z)-\varphi_1(y_1z)+f_2(y_2z)-\varphi_2((y_2z),\end{aligned}$$

由上所证即得

$$|f_1(z)-\varphi_1(z)|\leqslant4\sqrt{\varepsilon}\|z\|.$$

这是对任何 $\varepsilon>0$ 及 $z\in R$ 成立的不等式，由此 $f_1=\varphi_1$，从而 $f_2=\varphi_2$，所以满足要求的 f 的分解法是唯一的. 证毕.

前面讨论自伴子空间时，因为不要求乘法封闭，所用到的仅是线性运算. 而对于自伴子空间 R_0 上的有界 Hermite 泛函，虽然一定可以写成为两个正泛函之差，并使这两个正泛函范数之和即为所给 Hermite 泛函的范数，但是满足这两个要求的分解法可以是不唯一的.

4.5.7　纯态与可乘性

定理 1　设R是C^*代数，则$\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(R)$.

（一般说，R上不一定有非零的线性可乘泛函，即$\mathscr{M}$可能是空集，本定理是说：如果有非零的线性可乘泛函，那就必定是R上的纯态.）

证　设$f\in\mathscr{M}$，于是由$\|f\|=f(e)=1$，即知$f\in\mathscr{S}(R)$.

如果$t,s\in(0,1)$，$t+s=1$，f_1，$f_2\in\mathscr{S}(R)$使$f=tf_1+sf_2$，由 Schwarz 不等式，对于R中自伴元x，

$$f_j(x)^2\leqslant f_j(e)f_j(x^2)=f_j(x^2)\quad(j=1,2),$$

但f是可乘的，$f(x)^2=f(x^2)$，所以

$$\begin{aligned}0&=f(x^2)-f(x)^2\\&=tf_1(x^2)+sf_2(x^2)-(tf_1(x)+sf_2(x))^2\\&\geqslant tf_1(x)^2+sf_2(x)^2-(tf_1(x)+sf_2(x))^2\\&=(t-t^2)f_1(x)^2-2tsf_1(x)f_2(x)+(s-s^2)f_2(x)^2\\&=ts(f_1(x)-f_2(x))^2,\end{aligned}$$

由$t,s>0$，即知$f_1(x)=f_2(x)$（当x是R中自伴元时），因而$f_1=f_2(=f)$，由定义得知f是纯态．证毕.

定义　设R是代数，$\{x\mid x\in R,\ xy=yx\text{ 对 }y\in R\text{ 成立}\}$称为$R$的**中心**．$R$的中心记为$\mathscr{C}$.

易见，代数R是交换的充分必要条件是$\mathscr{C}=R$.

定理 2　设R是C^*代数，$f\in\mathscr{P}(R)$，则

$$f(xy)=f(x)f(y)\quad(x\in\mathscr{C},y\in R).$$

证　由于$\mathscr{C}$本身也是个C^*代数，因而$\mathscr{C}\cap R^+$中元的线性组合就得到$\mathscr{C}$，所以只要对于$x\in\mathscr{C}\cap R^+$的情况来证.

由交换C^*代数的 Гельфанд 表示是完全同构，容易证明，C^*代数中两个正元x,y，如果使$xy=yx$，则xy仍是正元，

设 $x_0\in\mathscr{C}\cap R^+$，且设$\|x_0\|<1$. 考虑$R$上的泛函

$$\varphi(y)=f(x_0y)\quad(y\in R).$$

φ 显然是线性泛函，又当 $y\in R^+$时，由于 $x_0y\in R^+$及 f 是正泛函，所以 $\varphi(y)\geq 0$ $(y\in R^+)$，即 φ 是 R 上正泛函.

如果 $\varphi(e)=f(x_0)=0$，由于 φ 是正泛函，所以 φ 是 0 泛函，即 $f(x_0y)=0$(对任何 $y\in R$ 成立)，这时，当然 $f(x_0y)=f(x_0)f(y)$，因而设 $f(x_0)\neq 0$，也即 $0<f(x_0)<1$.

作R 上的两个泛函 f_1、f_2 如下:

$$f_1(y)=\frac{f(x_0y)}{f(x_0)},\ f_2(y)=\frac{f((e-x_0)y)}{f(e-x_0)},$$

f_1 是正泛函，且因 $f_1(e)=1$，所以 $f_1\in\mathscr{S}(R)$，同样 $f_2\in\mathscr{S}(R)$. 又记 $t=f(x_0)$时，$tf_1+(1-t)f_2=f$. 由假设 f 是纯态，因此 $f_1=f_2=f$，而 $f_1=f$ 也即是

$$\frac{f(x_0y)}{f(x_0)}=f(y)\quad(y\in R),$$

即 $f(x_0y)=f(x_0)f(y)\quad(y\in R)$.

因而，对于 $x_0\in\mathscr{C}\cap R^+$且$\|x_0\|<1$，以及 $y\in R$，成立等式$f(x_0y)=f(x_0)f(y)$，而这就可以得出对于任何 $x_0\in\mathscr{C}$，$y\in R$ 也成立等式. 证毕.

系 如R是交换 C^*代数，则$\mathscr{M}=\mathscr{P}(R)$.

对于对称 Banach 代数R上的正泛函 f，就可以作出一个复 Hilbert 空间H及H上的R的循环表示Φ，而且循环向量ξ使得 $f(x)=(\Phi(x)\xi,\xi)$ $(x\in R)$. C^*代数是对称 Banach 代数，因而对于C^*代数R上的正泛函也可以作相应的H及Φ.

特别当 R 是 C^*代数，f 是 R 上的态时，所作出的H，R 在H上的表示Φ，及相应的循环向量 ξ，统称为相应于 $f(\in\mathscr{S}(R))$的**GNS构造**. 为标明与 f 的关系，所作的空间、在空间的表示及循环向量

分别记为 H_f, Φ_f, ξ_f.

定理 4　(Гельфанд-Наймарк)　设 R 是有单位元 e 的复 C^* 代数，则有 Hilbert 空间 H 及 $B(H\to H)$ 的 C^* 子代数(且包含 I) R_1，使得 R 与 R_1 完全同构.

证　对于 $f\in\mathscr{S}(R)$，记相应于 f 的 GNS 构造为 H_f, Φ_f, ξ_f 令 $H=\bigoplus_{f\in\mathscr{S}(R)} H_f$，并令 $\Phi=\bigoplus_{f\in\mathscr{S}(R)}\Phi_f$.

H 是 $\{H_f \mid f\in\mathscr{S}(R)\}$ 的正交和，H 中的元即为每个 H_f 中各取一个元，但至多只有可列个元不是0，而且这些元的范数平方和收敛. 对于 $x\in R$，$\Phi_f(x)$ 是 $H_f\to H_f$ 的线性有界算子，并且 $\|\Phi_f(x)\|\leqslant\|x\|$，$\Phi(x)$ 就代表了在每个 H_f 上与 $\Phi_f(x)$ 相同的算子. 由于 $\Phi_f(x)$ 的范数都不超过 $\|x\|$，所以 $\Phi(x)$ 的意义是确定的. 并且 $\|\Phi(x)\|=\sup\{\|\Phi_f(x)\| \mid f\in\mathscr{S}(R)\}$.

由作法，可知 H 是个复 Hilbert 空间，$\Phi: R\to B(H\to H)$ 是 $*$ 同态，且 $\Phi(e)=I$，所以 Φ 是 R 在 H 上的表示. 对于 $x\in R$，显然 $\|\Phi(x)\|\leqslant\|x\|$，当 $x\in R^+$ 时，由于 $\max\{f(x) \mid f\in\mathscr{S}(R)\}=\|x\|$，因此 $\|\Phi(x)\|=\|x\|$ (当 $x\in R^+$)，又对于 $y\in R$，因为 $y^*y\in R^+$，所以 $\|\Phi(y^*y)\|=\|y^*y\|$，而 $\|\Phi(y^*y)\|=\|\Phi(y)^*\Phi(y)\|=\|\Phi(y)\|^2$ 及 $\|y^*y\|=\|y\|^2$，所以 $\|\Phi(y)\|=\|y\|$ $(y\in R)$，即 Φ 是保范的. 这样，$\Phi(R)$ 是 $B(H\to H)$ 的 C^* 子代数且 $I\in\Phi(R)$，而记 $\Phi(R)$ 为 R_1 时，Φ 是 $R\to R_1$ 的完全同构. 证毕.

定理 4 是没有交换条件的 C^* 代数的表示定理. 这说明在完全同构的意义下，有单位元的 C^* 代数实质上只有一种，即是某 Hilbert 空间的 $B(H\to H)$ 的含 I 的 C^* 子代数. 对于交换的 C^* 代数，当然也可以完全同构于 $B(H\to H)$ 的含 I 的 C^* 子代数. 但与某个紧 Hausdorff 空间上的复值连续函数全体完全同构就更为简单些.

第五章　非线性映射

无穷维空间上非线性映射的讨论，可以追溯到古典变分法，这就是函数空间上泛函的极值问题．其后，由于自然科学和工程技术中的大量课题，提出对各种非线性映射研究的需要．同时，随着线性泛函分析巨大成就的取得，人们对于在泛函分析的框架下，从事非线性问题的研究也表现出越来越浓的兴趣．本世纪三十年代前后，M. Frechet 在 Cantor 集合论的基础上，建立了无穷维空间中的微分学，给出了导数、微分、Taylor 展开、隐函数存在定理等基本概念与结果．由于抽象空间微分学的成功建立和发展成熟，促使人们用泛函分析的观点和方法，去考察各种非线性问题．另一方面，本世纪初由 Brouwer 提出的有穷维空间的度数理论和不动点定理，自三十年代以后也开始向无穷维方向推进．四十年代以后，拓扑度理论和不动点理论有了较大的发展．人们看到，分析学和拓扑学的有机结合，产生了崭新的、具有强大力量的数学思想，泛函分析的作用在这类相互渗透和相互联系的地方日益显著．

本章主要目的是提供研究非线性映射的若干基本工具．按内容大致分为两部分．前一部分是 § 5.1-5.3，主要研究无穷维空间的微分学，包括微分学基本概念、隐函数存在定理以及泛函极值问题．第二部分是 § 5.4-5.6，其中 § 5.4，§5.5 是拓扑度理论，§ 5.6 则在拓扑度理论的基础上建立起一些重要的不动点定理．可以认为本章的知识提供了非线性泛函分析最必要的基础．

§5.1　映射的微分

为了研究非线性映射的性质，人们引进各种微分的概念. 本节介绍两种最基本的微分. 一种是Gâteaux 意义下的弱微分，它是数学分析中方向导数概念的推广；另一种是Fréchet 意义下的强微分，它是全微分概念的推广. 本节将讨论这两类微分概念的关系，进而把它们引伸到高阶的情形，并由此建立起Taylor 公式. 这些内容是无穷维空间微分学的基础.

5.1.1　弱微分

弱微分概念常应用于泛函极值的讨论.

定义　设X, Y是实赋范线性空间，Ω是X中的开集，映射$f:\Omega\to Y$，如果对$x\in\Omega$, $u\in X$,

$$s\text{-}\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}$$

存在，记为$Df(x,u)$，那末，称$Df(x,u)$是f在x处沿方向u的**弱微分**或Gâteaux 意义下的微分；如果对一切$u\in X$, $Df(x,u)$存在，就称f在x处**弱可微**或Gâteaux 意义下可微；如果f在x处弱可微，且存在$Df(x)\in B(X\to Y)$，使得

$$Df(x,u)=[Df(x)]u,\quad u\in X,$$

则称f在x处**弱可导**或Gâteaux 意义下可导，称$Df(x,u)$为**有界线性弱微分**，称$Df(x)$为f在x处的**弱导数**或者Gâteaux 导数.

如果f在Ω上每点弱可微，就称f在Ω上弱可微；如果f在Ω

① 注意，这里的"弱可导"以及下一小节的"强可导"，与第一章中向量值函数的"弱可导"，"强可导"并不一样，当这些概念出现时，读者不难从上下文看出其确切含意。

上每点均具有有界线性弱微分，就称 f 在 Ω 上具有有界线性弱微分或在 Ω 上弱可导.

定义 设 X 是实赋范线性空间，Ω 是 X 中的开集，如果泛函 φ: $\Omega\to\mathrm{R}$①在 Ω 上具有有界线性弱微分，且 $D\varphi(x)=f(x)$，就称 $f:\Omega\to X^*$ 为 φ 的**梯度**，记为 $f(x)=\mathrm{grad}\varphi(x)$，并称 φ 为 f 的**位势**.

例1. 设 X 是实 Hilbert 空间，在 X 上考察泛函 $\varphi(x)=\|x\|$. 因为

$$\|x+tu\|-\|x\|=\frac{\|x+tu\|^2-\|x\|^2}{\|x+tu\|+\|x\|}=\frac{2(x,tu)+\|tu\|^2}{\|x+tu\|+\|x\|},$$

所以，当 $x\neq0$ 时

$$D\varphi(x,u)=\lim_{t\to0}\frac{2(x,tu)+\|tu\|^2}{t(\|x+tu\|+\|x\|)}=\frac{(x,u)}{\|x\|}.$$

易见存在 $D\varphi(x)\in X^*$，使得 $[D\varphi(x)]u=\dfrac{(x,u)}{\|x\|}$ $(u\in X)$. 由于 Hilbert 空间是自共轭的，因此

$$\mathrm{grad}\varphi(x)=D\varphi(x)=\frac{x}{\|x\|}.$$

注意，当 $x=0$ 时，$D\varphi(x,u)$ 不存在，即 φ 在 $x=0$ 处不弱可微.

关于弱微分有如下的中值定理.

定理1 设 X,Y 是实赋范线性空间，$x_0,u\in X$，线段

$$L=\{x_0+tu\,|\,0\leqslant t\leqslant1\},$$

(1) 如果泛函 φ 在 L 上各点具有沿方向 u 的弱微分，则存在 τ, $0\leqslant\tau\leqslant1$，使得

$$\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)=D\varphi(x_0+\tau u,u);$$

(2) 如果取值于 Y 的映射 f 在 L 上各点具有沿方向 u 的弱微分，则存在 τ, $0\leqslant\tau\leqslant1$，使得

$$\|f(x_0+u)-f(x_0)\|\leqslant\|Df(x_0+\tau u,u)\|;$$

(3) 如果 Y 是 Banach 空间，f 在 L 上各点具有沿方向 u 的

---

① R, C 分别表示实数域，复数域.

弱微分，且在 L 上 $Df(x,u)$ 关于 x 连续，则

$$f(x_0+u)-f(x_0)=\int_0^1 Df(x_0+tu,u)\,dt,$$

上式右边是向量值函数的 Riemann 积分.

证　(1) 记 $F(t)=\varphi(x_0+tu)$，易知 F 是可微的实函数，由数值函数的中值定理，存在 $0\leqslant\tau\leqslant1$，使得 $F(1)-F(0)=F'(\tau)$. 但是 $F'(t)=D\varphi(x_0+tu,u)$，所以

$$\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)=D\varphi(x_0+\tau u,u).$$

(2) 由 Hahn-Banach 定理，对 $f(x_0+u)-f(x_0)\in Y$，存在 $\psi\in Y^*$，满足 $\|\psi\|=1$，且

$$\psi(f(x_0+u)-f(x_0))=\|f(x_0+u)-f(x_0)\|.$$

现在，对泛函 $\varphi(x)=\psi(f(x))$ 应用(1)的结论，得到 τ，$0\leqslant\tau\leqslant1$，使得

$$\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)=D\varphi(x_0+\tau u,u),$$

注意到 $D\varphi(x,u)=\psi(Df(x,u))$，由上式即得

$$\|f(x_0+u)-f(x_0)\|=\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)=\psi(Df(x_0+\tau u,u))$$
$$\leqslant\|Df(x_0+\tau u,u)\|.$$

(3) 对任意的 $\varphi\in Y^*$，考察 $F(t)=\varphi(f(x_0+tu))$. 容易知道

$$F'(t)=\varphi(Df(x_0+tu,u))$$

在 $[0,1]$ 上关于 t 连续，又由第一章可知 $\int_0^1 Df(x_0+tu,u)\,dt$ 存在，从而

$$\varphi(f(x_0+u)-f(x_0))=F(1)-F(0)=\int_0^1 F'(t)\,dt$$
$$=\varphi\Big(\int_0^1 Df(x_0+tu,u)\,dt\Big),$$

由 φ 的任意性，即得

$$f(x_0+u)-f(x_0)=\int_0^1 Df(x_0+tu,u)\,dt.$$ 证毕.

例 2 定理 1 中(1) 的结论对一般的映射不成立. 如设 $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$(视$\mathbf{C}$为实二维空间), $f(z)=e^z$, 易见 $Df(z,u)=e^z u$, 取 $x_0=0$, $u=2\pi i$, 就有

$$f(x_0+u)-f(x_0)=0,$$

$$Df(x_0+\tau u,u)=e^{2\pi\tau i}\cdot 2\pi i\neq 0,\qquad 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$

因而 $f(x_0+u)-f(x_0)\neq Df(x_0+\tau u,u)$.

5.1.2 强微分

强微分定义为映射的线性主部, 常用于把非线性问题线性化.

定义 设 X, Y 为实赋范线性空间, Ω 为 X 中的开集, 映射 $f:\Omega\to Y$, 如果存在 $A\in B(X\to Y)$, 使得

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|f(x_0+u)-f(x_0)-Au\|}{\|u\|}=0,$$

就称 f 在 x_0 处**强可微**或 **Fréchet 意义下可微**; 称 Au 为 f 在 x_0 处的**强微分**或 Fréchet 微分, 记为 $df(x_0,u)$; 称 A 为 f 在 x_0 处的**强导数**或 Fréchet 导数, 记为 $f'(x_0)$或 $df(x_0)$. 如果 f 在 Ω 上每一点都强可微, 就称 f 在Ω上强可微, 称 $f':\Omega\to B(X\to Y)$为 f 的**强导映射**.

由定义立即可以看到:

(1) 设 $f(x)\equiv y_0(x\in X)$, 则 $f'(x)\equiv 0$.

(2) 设 $A\in B(X\to Y)$, $f(x)=Ax(x\in X)$, 则 $f'(x)\equiv A$.

(3) 设 f 在 x_0 处强可微, 则 f 在 x_0 处连续, 即

$$\lim_{\|u\|\to 0}\|f(x_0+u)-f(x_0)\|=0.$$

例 3 设映射 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$定义为

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n),\\ \cdots\\ y_m=f_m(x_1,\cdots,x_n),\end{cases}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $y=(y_1,\cdots,y_m)\in\mathbf{R}^m$. 由定义易知 f 在 x_0 处强可微等价于每个 $f_j:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在 x_0 处可微. 对 $u=(u_1,\cdots,u_n)\in\mathbf{R}^n$,

$$df(x_0,u)=(df_1(x_0,u),\cdots,df_m(x_0,u)).$$

由通常的多元函数的微分法，有

$$df_j(x_0,u)=\frac{\partial f_j(x_0)}{\partial x_1}u_1+\cdots+\frac{\partial f_j(x_0)}{\partial x_n}u_n,$$

从而可得

$$f'(x_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix},$$

这就是相应于 f 的 Jacobi 矩阵.

例 4 设 $k=k(t,s,u)$ 和 $\dfrac{\partial k}{\partial u}$ 是 $[0,1]\times[0,1]\times(-\infty,+\infty)$ 上定义而且连续的实值函数，考察 $C[0,1]$ 到自身的 Urysohn 积分算子

$$[f(x)](t)=\int_0^1 k(t,s,x(s))ds$$

今证明 f 在 $x_0\in C[0,1]$ 处的强微分为

$$[f'(x_0)]h(t)=\int_0^1\frac{\partial k}{\partial u}(t,s,x_0(s))h(s)ds,\quad h\in C[0,1].$$

实际上，由于

$$\left|k(t,s,x_0(s)+h(s))-k(t,s,x_0(s))-\frac{\partial k}{\partial u}(t,s,x_0(s))h(s)\right|$$
$$=\left|\int_0^1\left\{\frac{\partial k}{\partial u}(t,s,x_0(s)+\tau h(s))-\frac{\partial k}{\partial u}(t,s,x_0(s))\right\}h(s)d\tau\right|$$
$$\leqslant\|h\|\int_0^1\left|\frac{\partial k}{\partial u}(t,s,x_0(s)+\tau h(s))-\frac{\partial k}{\partial u}(t,s,x_0(s))\right|ds,$$

因为$\frac{\partial k}{\partial u}$在$[0,1]\times[0,1]\times(-\infty,+\infty)$的紧子集上一致连续，故而上式最后一个积分当$\|h\|\to 0$时关于$t,s$一致地趋于0. 记

$$Ah(t)=\int_0^1\frac{\partial k}{\partial u}(t,s,x_0(s))h(s)ds,\ h\in C[0,1],$$

即得

$$\begin{aligned}&\|f(x_0+h)-f(x_0)-Ah\|\\&=\max_{0\leq t\leq 1}\left|\int_0^1\left\{k(t,s,x_0(s)+h(s))-k(t,s,x_0(s))\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\frac{\partial k}{\partial u}(t,s,x_0(s))h(s)\right\}ds\right|\\&=o(\|h\|),\end{aligned}$$

由定义可知$f'(x_0)=A$.

例5 考察微分算子$f:C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$:

$$[f(x)](t)=x'(t)+[x(t)]^2.$$

根据定义容易验证f在$C^{(1)}[0,1]$上每点都是强可微的，而且在$x_0\in C^{(1)}[0,1]$处，f的强导数为

$$[f'(x_0)]h(t)=h'(t)+2x_0(t)h(t).$$

下面给出求导运算的简单性质.

定理1 设X,Y,Z均为实赋范线性空间，$f,g:X\to Y$在x处强可微，$h:Y\to Z$在$y=f(x)$处强可微，则

(1) 对任意常数c_1,c_2，c_1f+c_2g在x处强可微，且

$$(c_1f+c_2g)'(x)=c_1f'(x)+c_2g'(x);$$

(2) $h\circ f:X\to Z$在x处强可微，且

$$(h\circ f)'(x)=h'(y)\circ f'(x).$$

证 (1) 是显然的. 今证(2)：对$u\in X,v\in Y$，记

$$\alpha(x,u)=f(x+u)-f(x)-[f'(x)]u,$$

$$\beta(y,v)=h(y+v)-h(y)-[h'(y)]v,$$

则有

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|\alpha(x,u)\|}{\|u\|}=\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|\beta(y,v)\|}{\|v\|}=0,$$

取 $v=[f'(x)]u+\alpha(x,u)$，便得到

$$\begin{aligned}&(h\circ f)(x+u)=h(f(x+u))\\&=(h\circ f)(x)+h'(y)\cdot f'(x)u+h'(y)\alpha(x,u)+\beta(y,v).\end{aligned}$$

因为 $h'(y)\in B(Y\to Z)$，故而

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|[h'(y)]\alpha(x,u)\|}{\|u\|}=0.$$

又由于

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|\beta(y,v)\|}{\|u\|}=\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|\beta(y,v)\|}{\|v\|}\ \frac{\|v\|}{\|u\|}=0.$$

在最后一个等式中，利用了 $f'(x)\in B(X\to Y)$，所以 $\|u\|\to 0$ 时必有 $\|v\|\to 0$。由此可知 $h\circ f$ 在 x 处强可微，且其强导数为

$$(h\circ f)'(x)=h'(y)\cdot f'(x).\qquad\text{证毕.}$$

现在，我们来指出两种微分概念的关系.

定理 2　设 X,Y 是实赋范线性空间，$f:X\to Y$，f 在 x 处强可微的充要条件是 f 在 x 处存在有界线性弱微分，且极限

$$s\text{-}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x+tu)-f(x)]=[Df(x)]u$$

关于 $\|u\|=1$ 是一致的. 此时，$f'(x)=Df(x)$.

证　充分性　对任意 $\varepsilon>0$，由假设可取到 $\delta>0$，使得 $|t|<\delta$ 时，

$$\left\|\frac{1}{t}[f(x+tu)-f(x)]-[Df(x)]u\right\|<\varepsilon$$

对单位球面上一切 u 成立，记 $v=tu$，当 $\|v\|<\delta$ 时，就有

$$\|f(x+v)-f(x)-[Df(x)]v\|<\varepsilon\|v\|.$$

又因为 $Df(x)\in B(X\to Y)$，所以 $f'(x)$ 存在，且 $f'(x)=Df(x)$.

必要性　设 f 在 x 处强可微，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$\|v\|<\delta$ 时

$$\|f(x+v)-f(x)-f'(x)v\|<\varepsilon\|v\|.$$

对于 $\|u\|=1$，当 $|t|<\delta$ 时，由以上不等式得

$$\left\|\frac{1}{t}[f(x+tu)-f(x)]-f'(x)u\right\|<\varepsilon\|u\|=\varepsilon.$$

所以 $\frac{1}{t}[f(x+tu)-f(x)]$ 关于 u 的一致极限为 $f'(x)u$. 显然，这就是 f 在 x 处的有界线性弱微分. 证毕.

系 设 f 在开集 Ω 上各点具有有界线性弱微分，且映射 $\Omega\to B(X\to Y)$: $x\longmapsto Df(x)$, $x\in\Omega$, 在 x_0 连续，则 f 在 x_0 强可微.

证 由定理 2 可知，只要证明 $\frac{1}{t}[f(x_0+tu)-f(x_0)]$ 在 $\|u\|=1$ 上一致收敛于 $[Df(x_0)]u$. 由 Hahn-Banach 定理，存在 $F\in Y^*$, $\|F\|=1$, 使得

$$F\left(\frac{1}{t}[f(x_0+tu)-f(x_0)]-[Df(x_0)]u\right)$$
$$=\left\|\frac{1}{t}[f(x_0+tu)-f(x_0)]-[Df(x_0)]u\right\|,$$

根据中值定理，存在 τ, $0\leqslant\tau\leqslant t$, 使得

$$F\left(\frac{1}{t}[f(x_0+tu)-f(x_0)]-[Df(x_0)]u\right)$$
$$=F([Df(x_0+\tau u)]u-[Df(x_0)]u)$$
$$\leqslant\|Df(x_0+\tau u)-Df(x_0)\|\|u\|.$$

但由于 $Df(x)$ 在 x_0 连续，因此 $t\to0$ 时，上式右端关于 $\|u\|=1$ 一致地趋于 0. 证毕.

注意，即便泛函 $f(x)$ 在 x_0 存在线性的弱微分，也不一定在 x_0 具有强微分.

例 6 $\mathbb{R}$ 上泛函 f 定义为

$$f(x)=\begin{cases}\xi_1+\xi_2+\dfrac{\xi_1^3\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2}, & x=(\xi_1,\xi_2)\neq(0,0),\\ 0 & ,x=(0,0),\end{cases}$$

由于

$$\left|\frac{\xi_1^3\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|\xi_1|,$$

可知 f 在 $(0,0)$ 点连续. 令 $u=(\eta_1,\eta_2)$，那末在 $(0,0)$ 处沿方向 u 的弱微分等于

$$\lim_{t\to0}\frac{f(tu)-f(0)}{t}=\lim_{t\to0}\left(\eta_1+\eta_2+\frac{t^3\eta_1^3\eta_2}{t^2(t^2\eta_1^4+\eta_2^2)}\right)=\eta_1+\eta_2,$$

但是，如果令 $\eta_2=\eta_1^2$，则 $\|u\|=\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}=\sqrt{\eta_1^2+\eta_1^4}$，因而

$$\begin{aligned}&\lim_{\|u\|\to0}\frac{f(u)-f(0)-Df(0)u}{\|u\|}\\ =&\lim_{\|u\|\to0}\frac{\eta_1^3\eta_2}{(\eta_1^4+\eta_2^2)\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}\\ =&\lim_{\|u\|\to0}\frac{\eta_1^5}{2\eta_1^4\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}=\frac{1}{2}\neq0,\end{aligned}$$

从而 f 在 $(0,0)$ 处不强可微.

类似于数学分析的方法，可以讨论求导运算的逆问题. 为此，先引入一个概念.

设 X,Y 是实赋范线性空间，Y 完备，$x_0,x_1\in X$，$L=\{(1-t)x_0+tx_1\,|\,0\leqslant t\leqslant1\}$，映射 $f:L\to B(X\to Y)$ 连续，规定

$$\int_L f(x)dx=\int_0^1 f(x_0+t(x_1-x_0))(x_1-x_0)dt,$$

上式右端是向量值函数的 Riemann 积分.

定理 3 设 X,Y 是实赋范线性空间，且 Y 完备，Ω 为 X 中的凸开集，映射 $f:\Omega\to B(X\to Y)$ 连续，则存在 $\varphi:\Omega\to Y$，使 $\varphi'(x)=f(x)$ 的充要条件是：沿 Ω 中任何封闭折线 C，均有

$$\int_C f(x)dx=0.$$

证 **必要性** 记 $L=\{x_1+t(x_2-x_1)|0\leqslant t\leqslant 1\}$. 由于 $f(x)=\varphi'(x)=D\varphi(x)$, 利用中值定理得到

$$\int_L f(x)dx=\int_0^1 f(x_1+t(x_2-x_1))(x_2-x_1)dt$$

$$=\int_0^1[D\varphi(x_1+t(x_2-x_1))](x_2-x_1)dt=\varphi(x_2)-\varphi(x_1).$$

由此易见 $\int_C f(x)dx=0$, 其中 C 是 Ω 中封闭折线.

充分性 任取 $x_0\in\Omega$, 作

$$L_1=\{x_0+t(x-x_0)|0\leqslant t\leqslant 1\},$$

$$L_2=\{x+t\tau u|0\leqslant t\leqslant 1\},$$

$$L_3=\{x_0+t(x+\tau u-x_0)|0\leqslant t\leqslant 1\}.$$

由假设, $\int_{L_1}f(x)dx+\int_{L_2}f(x)dx+\left(-\int_{L_3}f(x)dx\right)=0$. 如令 $\varphi(y)=\int_0^1 f(x_0+t(y-x_0))(y-x_0)dt$, $y\in\Omega$, 则有

$$\varphi(x+\tau u)-\varphi(x)=\int_{L_3}f(x)dx-\int_{L_1}f(x)dx=\int_{L_2}f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x+t\tau u)(\tau u)dt=\int_0^\tau f(x+tu)udt,$$

于是

$$\left\|\frac{\varphi(x+\tau u)-\varphi(x)}{\tau}-f(x)u\right\|=\left\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau[f(x+tu)u-f(x)u]dt\right\|$$

$$\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau}\|f(x+tu)u-f(x)u\|\to 0,$$

所以 $D\varphi(x)=f(x)$, 但 $f(x)$ 连续, 由定理 2 的系, 知 $\varphi'(x)$ 存在, 从而 $\varphi'(x)=f(x)$. 证毕.

5.1.3 高阶微分

为了定义高阶微分，先引入 n 线性算子的概念.

设 X 和 Y 是实赋范线性空间，记 n 个 X 的乘积赋范线性空间为 $\prod_n X$.

定义 设 T 为 $\prod_n X\to Y$ 的映射，$T(x_1,\cdots,x_n)$ 对每个变元 x_i 都是线性的，则称 T 为 **n 线性算子**. n 线性算子全体记为

$$\left(\prod_n X\to Y\right).$$

和线性情况类似地，容易知道：如果 $T\in\left(\prod_n X\to Y\right)$，则 T 是有界算子(即把任何有界集映为有界集)，当且仅当

$$\|T\|=\sup\{\|T(x_1,\cdots,x_n)\|\mid\|x_i\|=1,i=1,\cdots,n\}<+\infty.$$

记有界 **n 线性算子**全体为 $B\left(\prod_n X\to Y\right)$，对 $T\in B\left(\prod_n X\to Y\right)$，称上面规定的 $\|T\|$ 为 T 的**范数**.

引理 1 $B\left(\prod_n X\to Y\right)$ 按通常的线性运算及算子范数构成赋范线性空间；对 $1\leqslant k\leqslant n$，有 $B\left(\prod_n X\to Y\right)=B\left(\prod_k X\to B\left(\prod_{n-k} X\to Y\right)\right)$；而且，当 Y 是 Banach 空间时，$B\left(\prod_n X\to Y\right)$ 是 Banach 空间.

证 $n=1$ 时，这是线性泛函分析的已有结果.

设 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 时，$B\left(\prod_k X\to Y\right)$ 是赋范线性空间，今作

$B\left(\prod\limits_{n} X \to Y\right)$与$B\left(\prod\limits_{k} X \to B\left(\prod\limits_{n-k} X \to Y\right)\right)$的元的对应如下:

任取 $T_n \in B\left(\prod\limits_{n} X \to Y\right)$, 对固定的 $x_1, \cdots, x_k \in X$, $T_n(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)$是以 $x_{k+1}, \cdots, x_n$ 为变元的有界 $n-k$ 线性算子, 即有 $T_k(x_1, \cdots, x_k) \in B\left(\prod\limits_{n-k} X \to Y\right)$, 使得

$$T_n(x_1, \cdots, x_n) = T_k(x_1, \cdots, x_k)(x_{k+1}, \cdots, x_n),$$

易见, $x_1, \cdots, x_k$ 变动时, $T_k(x_1, \cdots, x_k)$又是 k 线性算子, 而且

$$\begin{aligned}\|T_k\| &= \sup_{\substack{\|x_i\|=1\\ i=1,\cdots,k}} \|T_k(x_1, \cdots, x_k)\|_{B\left(\prod\limits_{n-k} X \to Y\right)} \\ &= \sup_{\substack{\|x_i\|=1,\ \|x_j\|=1\\ i=1,\cdots,k,\ j=k+1,\cdots,n}} \|T_k(x_1, \cdots, x_k)(x_{k+1}, \cdots, x_n)\|_Y \\ &= \sup_{\substack{\|x_i\|=1\\ i=1,\cdots,n}} \|T_n(x_1, \cdots, x_n)\| = \|T_n\|,\end{aligned}$$

故而 $T_k \in B\left(\prod\limits_{k} X \to B\left(\prod\limits_{n-k} X \to Y\right)\right)$.

这样, 我们建立了$B\left(\prod\limits_{n} X \to Y\right)$与$B\left(\prod\limits_{k} X \to B\left(\prod\limits_{n-k} X \to Y\right)\right)$之间的一对一的保距映射, 由后者是赋范线性空间知前者是赋范线性空间; 特别地, 当后者是 Banach 空间时, 前者也是 Banach 空间. 由归纳法便知当 Y 是 Banach 空间时, $B\left(\prod\limits_{n} X \to Y\right)$也是Banach 空间. 证毕.

共鸣定理可以推广到 n 线性算子族.

引理 2 设X是Banach 空间, $T_n^{(\alpha)} \in B\left(\prod\limits_{n} X \to Y\right)$ $(\alpha \in \Lambda)$ 是有界 n 线性算子族, 对任何$(x_1, \cdots, x_n) \in \prod\limits_{n} X$, 均有

$$\sup_{\alpha}\|T_n^{(\alpha)}(x_1,\cdots,x_n)\|<+\infty,$$

那末

$$\sup_{\alpha}\|T_n^{(\alpha)}\|<+\infty.$$

证 $n=1$ 就是普通的共鸣定理. 今用归纳法证明一般的情形. 对每个 α, 有 $T_1^{(\alpha)}\in B\left(X\to B\left(\prod\limits_{n-1}X\to Y\right)\right)$, 使得

$$T_n^{(\alpha)}(x_1,\cdots,x_n)=T_1^{(\alpha)}(x_1)(x_2,\cdots,x_n),$$

固定 $x_1\in X$, $(x_2,\cdots,x_n)\in\prod\limits_{n-1}X$. 由假设

$$\sup_{\alpha}\|T_1^{(\alpha)}(x_1)(x_2,\cdots,x_n)\|=\sup_{\alpha}\|T_n^{(\alpha)}(x_1,\cdots,x_n)\|<+\infty,$$

再由归纳假设,对任何 $x_1\in X$, 有

$$\sup_{\alpha}\|T_1^{(\alpha)}(x_1)\|<+\infty,$$

注意到 $T_1^{(\alpha)}$是有界线性算子族,根据共鸣定理,

$$\sup_{\alpha}\|T_1^{(\alpha)}\|<+\infty.$$

由引理 1 的证明可见$\|T_n^{(\alpha)}\|=\|T_1^{(\alpha)}\|$,因此$\sup\limits_{\alpha}\|T_n^{(\alpha)}\|<+\infty$. 证毕.

引理 3 设X是 Banach 空间, n 线性算子 $T_n(x_1,\cdots,x_n)$对每个变元 x_i 连续 $(i=1,\cdots,n)$, 则 $T_n\in B\left(\prod\limits_{n}X\to Y\right)$.

证 用归纳法. $k=1$ 时,结论显然成立. 设对 $k=n-1$已证,今讨论 $k=n$ 的情况. 由条件及归纳假设,可知存在

$$T_1(x_1)\in B\left(\prod_{n-1}X\to Y\right),\ T_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)\in B(X\to Y),$$

使得

$$T_n(x_1,\cdots,x_n)=T_1(x_1)(x_2,\cdots,x_n)=T_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)(x_1).$$

因此,对$\|x_1\|\leqslant 1$, 有

$$\|T_1(x_1)(x_2,\cdots,x_n)\|=\|T_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)(x_1)\|$$
$$\leqslant\|T_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)\|,$$

即 $x_2,\cdots,x_n$ 固定时，$\sup\limits_{\|x_1\|\leqslant 1}\|T_1(x_1)(x_2,\cdots,x_n)\|<+\infty$. 由引理 2，存在 $M>0$，使 $\|x_1\|\leqslant 1$ 时，

$$\|T_1(x_1)(x_2,\cdots,x_n)\|\leqslant M\|x_2\|\cdots\|x_n\|,$$

因此，

$$\|T_n(x_1,\cdots,x_n)\|\leqslant M\|x_1\|\cdots\|x_n\|.$$ 证毕.

下面我们给出高阶微分的定义. 为叙述简单，假定以下出现的表达式都是有意义的.

定义 设 X,Y 是实赋范线性空间，映射 $f:X\to Y$，对于 $u_1,\cdots,u_n\in X$，规定 f 的弱微分为

$$D^nf(x;u_1,\cdots,u_n)=D(D^{n-1}f)((x;u_1,\cdots,u_{n-1}),u_n),$$

如果存在 $D^nf(x)\in B\left(\prod\limits_n X\to Y\right)$，使得

$$D^nf(x;u_1,\cdots,u_n)=[D^nf(x)](u_1,\cdots,u_n),$$

则称 $D^nf(x;u_1,\cdots,u_n)$ 为 **n 阶有界线性弱微分.**

定义 设 X,Y 为实赋范线性空间，规定映射 $f:X\to Y$ 的 n 阶强微分和 n 阶强导数为

$$d^nf(x;u_1,\cdots,u_n)=d(d^{n-1}f)((x;u_1,\cdots,u_{n-1}),u_n),$$
$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)})'(x).$$

如果存在 $d^nf(x)\in B\left(\prod\limits_n X\to Y\right)$，使得

$$d^nf(x;u_1,\cdots,u_n)=[d^nf(x)](u_1,\cdots,u_n),$$

则称 $d^nf(x;u_1,\cdots,u_n)$ 为 **n 阶有界线性强微分.**

由 5.1.2 定理 2 即知：如果在 x 的某邻域中，$d^kf(x)$ $(k=1,\cdots,n-1)$ 均存在且强可微，$d^nf(x)$ 存在，则 f 在 x 处具有直到 n 阶的有界线性弱微分，而且 $D^nf(x)=d^nf(x)$.

高阶微分的概念比一阶微分复杂得多. 下面，我们仅考察在一个开集上强可微的情况，这是最常见的一类条件.

引理 4　设Ω是开集，f 在Ω上 n 阶强可微，则

$$d^n f(x;u_1,\cdots,u_n)=d^n f(x;u_{i_1},\cdots,u_{i_n}),$$

其中$(i_1,\cdots,i_n)$是$(1,\cdots,n)$的任何一个排列.

证　用归纳法. 对 $n=2$，先设 $Y=\mathbf{R}$，若 f 为二阶强可微，$x\in\Omega$，$u,v\in X$，考察

$$\Delta=[f(x+u+v)-f(x+v)]-[f(x+u)-f(x)].$$

由 5.1.1 定理 1，必有 $t\in[0,1]$，满足

$$\Delta=df(x+v+tu,u)-df(x+tu,u).$$

由 f 的可微性，得

$$df(x+v,u)-df(x,u)=d^2f(x;u,v)+R(v,u),$$

其中

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|R(v,u)\|}{\|v\|}=0, \tag{1}$$

$$R(v,\lambda u)=\lambda R(v,u), \tag{2}$$

这样

$$\begin{aligned}\Delta&=[df(x+v+tu,u)-df(x,u)]-[df(x+tu,u)-df(x,u)]\\&=d^2f(x;u,v+tu)+R(v+tu,u)-d^2f(x;u,tu)-R(tu,u)\\&=d^2f(x;u,v)+R(v+tu,u)-R(tu,u).\end{aligned}$$

由 Δ 关于 u,v 的对称性，又有

$$\Delta=d^2f(x;v,u)+R(u+tv,v)-R(tv,v).$$

分别用 $\lambda u,\lambda v$ 代替 u,v，利用微分的线性及(2)，即得

$$\begin{aligned}&d^2f(x;u,v)-d^2f(x;v,u)\\&=\frac{1}{\lambda}[R(\lambda(u+tv),v)-R(\lambda tv,v)-R(\lambda(v+tu),u)\\&\quad+R(\lambda tu,u)],\end{aligned}$$

由(1)，$\lambda\to 0$ 时，上式右边趋于 0，故而

$$d^2f(x;u,v)=d^2f(x;v,u).$$

若 Y 是一般的实赋范线性空间，任取 $\varphi\in Y^*$，用 $\varphi\circ f$ 代替 f，利用 f 二次强可微时，$\varphi\circ f$ 二次强可微，且

$$d^2(\varphi\circ f)(x;u,v)=\varphi(d^2f(x;u,v)),$$

由前面的证明可知

$$d^2(\varphi\circ f)(x;u,v)=d^2(\varphi\circ f)(x;v,u),$$

从而 $\varphi(d^2f(x;u,v))=\varphi(d^2f(x;v,u))$，因此

$$d^2f(x;u,v)=d^2f(x;v,u).$$

现在设 $d^kf(x;u_1,\cdots,u_k)$ 关于 $u_1,\cdots,u_k$ 对称，由于

$$\begin{aligned}&d^{k+1}f(x;u_1,\cdots,u_{k+1})=d^2(d^{k-1}f)((x;u_1,\cdots,u_{k-1}),u_k,u_{k+1})\\&=d^2(d^{k-1}f)((x;u_1,\cdots,u_{k-1}),u_{k+1},u_k)\\&=d(d^kf)((x;u_1,\cdots,u_{k-1},u_{k+1}),u_k),\end{aligned}$$

由归纳假设，易知 $d^{k+1}f(x;u_1,\cdots,u_{k+1})$ 关于 $u_1,\cdots,u_{k+1}$ 对称. 证毕.

定义 设 $T\in B\left(\prod_n X\to Y\right)$，$T(u_1,\cdots,u_n)=T(u_{i_1},\cdots,u_{i_n})$ 对一切 $u_1,\cdots,u_n\in X$ 成立，其中 $(i_1,\cdots,i_n)$ 是 $(1,\cdots,n)$ 的任一排列，则称 T 是**有界对称 n 线性算子**.

定理 1 设 X 是 Banach 空间，开集 $\Omega\subset X$，映射 $f:\Omega\to Y$ 在 Ω 上 n 阶强可微，则在 Ω 上存在对称的 $d^nf(x)$；如果 $d^nf(x)$ 在 Ω 中连续，则 $f^{(n)}(x)$ 在 Ω 中存在，且 $f^{(n)}(x)=d^nf(x)$.

证 由引理 4，$d^nf(x;u_1,\cdots,u_n)$ 关于 $u_1,\cdots,u_n$ 对称，从定义可知，它关于 u_n 连续，因此，关于每个 u_i 连续，再根据空间的完备性，利用引理 3，得 $d^nf(x;u_1,\cdots,u_n)$ 是有界的 n 线性算子，即存在对称的 $d^nf(x)\in B\left(\prod_n X\to Y\right)$.

如果 $d^n f(x)$ 在 Ω 中连续，今用归纳法证明 $f^{(n)}(x)$ 的存在性. $n=1$ 时结论显然. 设结论对 $n-1$ 成立，由上面的证明可知存在对称的 $d^{n-1}f(x)$，且易见 $d^n f(x)=d(d^{n-1}f)(x)$，所以 $d^{n-1}f(x)$ 连续. 由归纳假设，

$$d^{n-1}f(x)=f^{(n-1)}(x).$$

设 $L=\{x_1+t(x_2-x_1)|0\leqslant t\leqslant 1\}\subset\Omega$. 由于 $d^n f(x)$ 连续，可以考察积分

$$\begin{aligned}\int_L d^n f(x)\,dx&=\int_0^1 d^n f(x_1+t(x_2-x_1))(x_2-x_1)\,dt\\&=d^{n-1}f(x_2)-d^{n-1}f(x_1)\\&=f^{(n-1)}(x_2)-f^{(n-1)}(x_1),\end{aligned}$$

由此可知，对 Ω 中任何封闭折线 C，

$$\int_C d^n f(x)\,dx=0,$$

由 5.1.2 定理 3 及其证明可知，$d^n f(x)$ 是映射

$$f^{(n-1)}:\Omega\to B\left(\prod_{n-1} X\to Y\right)$$

的导映射，即 $d^n f(x)=(f^{(n-1)})'(x)=f^{(n)}(x)$. 证毕.

5.1.4 Taylor 公式

这一段中我们来推广古典分析中的 Taylor 公式，即证明 n 阶连续可微的映射可以用 n 次多项式 n 阶逼近.

设 X,Y 为实赋范线性空间，对 $T\in\left(\prod_n X\to Y\right)$，记

$$Tu^n=T\underbrace{(u,\cdots,u)}_{n\text{ 个}},$$

其中 $u\in X$.

定理 1 设 X 为实赋范线性空间，凸开集 $\Omega\subset X$，如果 Ω 上定

义的泛函 f 具有 n 阶连续的强导数，$x, x+u\in\Omega$，那末必存在 θ，$0\leqslant\theta\leqslant 1$，使得

$$f(x+u)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}[f^{(i)}(x)]u^i+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta u)u^n.$$

证 记 $\varphi(t)=f(x+tu)$，φ 是通常的数值函数，且由假定，它具有 n 阶连续导函数，又

$$\varphi^{(k)}(t)=f^{(k)}(x+tu)u^k,$$

对于 φ 使用普通的 Taylor 公式，便得 $0\leqslant\theta\leqslant 1$，满足

$$f(x+u)=\varphi(1)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(0)+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}[f^{(i)}(x)]u^i+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta u)u^n.$$ 证毕.

定理 2 设 X, Y 为实赋范线性空间，凸开集 $\Omega\subset X$，$f:\Omega\to Y$，f 在 Ω 上具有 n 阶连续的强导数，$x, x+u\in\Omega$，那末

$$f(x+u)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}[f^{(i)}(x)]u^i+R_n(u),$$

其中

$$R_n(u)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}[f^{(n)}(x+tu)]u^n dt$$

$$=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x)]u^n+o(\|u\|^n).$$

证 $n=1$ 即 5.1.1 定理 1 的已有结论. 设对 $n=k$ 定理已证，$f^{(k+1)}(x)$ 连续，对 $f'(x)$ 利用归纳假设，得到

$$f'(x+tu)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}[f^{(i+1)}(x)](tu)^i+R_k^0(tu),$$

$$R_k^0(tu)=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^1(1-s)^{k-1}[f^{(k+1)}(x+stu)](tu)^k ds$$

$$=\frac{1}{k!}[f^{(k+1)}(x)](tu)^k+o(\|tu\|^k).$$

由 5.1.1 定理 1 可得

$$f(x+u)-f(x)=\int_0^1 f'(x+tu)udt$$

$$=\int_0^1\left\{\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}[f^{(i+1)}(x)](tu)^i+R_k^0(tu)\right\}udt$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}[f^{(i)}(x)]u^i+\int_0^1 R_k^0(tu)udt,$$

其余项表达式为

$$\int_0^1 R_k^0(tu)udt$$

$$=\int_0^1 dt\left\{\frac{1}{(k-1)!}\int_0^1(1-s)^{k-1}[f^{(k+1)}(x+stu)\ (tu)^k ds\right\}u$$

$$=\int_0^1 dt\left\{\frac{1}{(k-1)!}\int_0^t(t-s)^{k-1}[f^{(k+1)}(x+su)]u^{k+1}ds\right\}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(k-1)!}[f^{(k+1)}(x+su)]u^{k+1}ds\int_s^1(t-s)^{k-1}dt$$

$$=\frac{1}{k!}\int_0^1(1-s)^k[f^{(k+1)}(x+su)]u^{k+1}ds.$$

由归纳假设中余项的另一形式，有

$$\int_0^1 R_k^0(tu)udt=\int_0^1\left\{\frac{1}{k!}[f^{(k+1)}(x)](tu)^k+o(\|tu\|^k)\right\}udt$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x)u^{k+1}+o(\|u\|^{k+1}).$$ 证毕.

5.1.5　幂级数

设 a_n 是对称的有界 n 线性算子 $(n=1,2,\cdots)$，称形式无穷和

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

为幂级数. 为了后面的应用,这一段将讨论幂级数的收敛性、连续性及可微性. 先建立两个简单的引理.

引理 1 设 $p(t)$ 是 n 次实多项式, $\max\limits_{|t|\leqslant 1}|p(t)|\leqslant M$, 则

$$|p'(0)|\leqslant M(n+1)^3.$$

证 记 $L_k(t)\ (k=0,1,\cdots)$ 为 k 次 Legendre 多项式, 则有

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kL_k(t),$$

其中 $a_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}p(t)L_k(t)dt$. 由于 $|t|\leqslant 1$ 时, $|L_k(t)|\leqslant 1$, 故

$$|a_k|\leqslant\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}Mdt=(2k+1)M,$$

又由于 $|L_k'(0)|\leqslant k$, 故

$$|p'(0)|=|\sum_{k=0}^{n}a_kL_k'(0)|\leqslant M\sum_{k=0}^{n}k(k+1)$$

$$\leqslant M(n+1)^3. \qquad \text{证毕.}$$

引理 2 设 a_n 是对称的有界 n 线性算子, 则有

$$(a_nx^n)'=na_nx^{n-1}.$$

证 由计算

$$\begin{aligned}&a_n(x+u)^n-a_nx^n-(na_nx^{n-1})u\\&=C_n^2a_nx^{n-2}u^2+\cdots+a_nu^n=o(\|u\|),\end{aligned}$$

这就证明了引理. 证毕.

设 T_n 是对称的有界 n 线性算子, 记

$$|||T_n|||=\sup_{\|x\|=1}\|T_nx^n\|,$$

显然, 有 $|||T_n|||\leqslant\|T_n\|$.

定理 1 设有幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \tag{1}$$

记 $\rho_0=(\overline{\lim}\,|||a_n|||^{\frac{1}{n}})^{-1}$，则对 $\rho<\rho_0$，级数(1)在 $\|x\|\leqslant\rho$ 中一致收敛，而且，$f(x)$ 在 $\|x\|<\rho_0$ 中强连续、强可微，

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}. \tag{2}$$

证 设 $\rho<\rho_0$，取 $e>0$，使 $\rho=\rho_0(1-e)$，再取自然数 N，使 $n>N$ 时，$|||a_n|||^{\frac{1}{n}}<\frac{1+e}{\rho_0}$，于是，当 $\|x\|\leqslant\rho$ 时

$$\|a_nx^n\|\leqslant|||a_n|||\,\|x\|^n<\left(\frac{1+e}{\rho_0}\right)^n(\rho_0(1-e))^n=(1-e^2)^n,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|a_nx^n\|$ 在 $\|x\|\leqslant\rho$ 中一致收敛，从而(1)在 $\|x\|\leqslant\rho$ 中按范数一致收敛. 易知 $f(x)$ 在 $\|x\|<\rho_0$ 中强连续.

为证明 $f(x)$ 在 $\|x\|<\rho_0$ 中的强可微性，由引理 2，仿数学分析可知，只要对任意的 $\rho<\rho_0$，证明级数(2)在 $\|x\|\leqslant\rho$ 中也是一致收敛的，这又只要证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|||na_n|||^{\frac{1}{n}}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|||a_n|||^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

对 $\|x\|=1$，$\|u\|=\frac{1}{n}$，由 Hahn-Banach 定理可知，存在 $f\in Y^*$，$\|f\|=1$，使得

$$f(na_nx^{n-1}u)=\|na_nx^{n-1}u\|.$$

令 $p(t)=f(a_n(x+tu)^n)$，则当 $|t|<1$ 时，

$$\begin{aligned}|p(t)|&\leqslant\|f\|\,|||a_n|||\,(\|x\|+|t|\,\|u\|)^n\\&\leqslant|||a_n|||\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant3\,|||a_n|||.\end{aligned}$$

但 $p'(0)=f(na_nx^{n-1}u)=\|na_nx^{n-1}u\|$，所以由引理 1，得

$$\|na_nx^{n-1}u\|\leqslant 3(n+1)^3\|\|a_n\|\|,$$

于是，对 $\|x\|\leqslant 1$，有

$$\|na_nx^{n-1}\|=\sup_{\|u\|=\frac{1}{n}}\left\|na_nx^{n-1}\frac{u}{\|u\|}\right\|\leqslant 3n(n+1)^3\|\|a_n\|\|,$$

因此

$$\|\|na_n\|\|=\sup_{\|x\|=1}\|na_nx^{n-1}\|\leqslant 3n(n+1)^3\|\|a_n\|\|,$$

这就导致(3)式. 证毕.

注 由上面的定理及(3)式可知，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 在 $\|x\|<\rho_0$ 中仍是强可微的，因此，幂级数(1)在 $\|x\|<\rho_0$ 中是无穷次强可微的.

系 设 X 是 Banach 代数，则在 X 的单位球内部($\|x\|<1$)中，$(I-x)^{-1}$ 是无穷次强可微的.

证 在($\|x\|<1$)中，$(I-x)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，利用上面的注即得结论. 证毕.

§ 5.2 隐函数定理

反函数定理讨论非线性映射的求逆问题，这个定理指出：由某个线性方程的可解性能导出非线性方程的局部可解性，确切地说，它就是非线性方程解的存在唯一性定理. 如果考察含参变量的方程，反函数定理又被推广为隐函数定理，它说明在适当的条件下初始解可按参变量唯一连续地延拓. 隐函数定理是分歧理论的重要基础，后者是当前非线性泛函分析的中心课题之一.

5.2.1 C^p 映射

先给出 C^p 映射和 C^p 微分同胚的定义.

定义 设 X, Y 为实赋范线性空间, p 为非负整数, 开集 $\Omega\subset X$, 映射 $f:\Omega\to Y$, 称 f 为 **C^p 映射**, 对 $p=0$ 是指 f 在 Ω 上连续, 对 $p>0$ 是指 f 在 Ω 上具有 p 阶连续的强导映射 $f^{(p)}(x)$.

如果 U, V 分别是 X, Y 中的开集, $f:U\to V$ 是双射, 而且 f 和 f^{-1} 均为 C^p 映射, 则称 $f:U\to V$ 为 **C^p 微分同胚**.

如果 U, V 分别是 X, Y 中的集合, $f:U\to V$, $x_0\in U$, 又设存在 x_0 的邻域 U_0 及 $f(x_0)$ 的邻域 V_0, 使 $f:U_0\to V_0$ 为 C^p 微分同胚, 则称 **$f:U\to V$ 在 x_0 局部 C^p 微分同胚.**

如果 $f:U\to V$ 在 U 中每点局部 C^p 微分同胚, 原称 f **在 U 局部 C^p 微分同胚.**

下面的定理指出: 在完备空间中, 由局部 C^p 微分同胚可诱导出一个线性拓扑同构.

定理 1 设 X, Y 为实Banach空间, U 是 X 中开集, $x_0\in U$, $p\geqslant 1$, 如果 $f:U\to Y$ 在 x_0 处局部 C^p 微分同胚, 则 $f'(x_0):X\to Y$ 具有有界逆算子.

证 因为 f 在 x_0 处局部 C^p 微分同胚, 所以存在 x_0 的邻域 U_0 及 $f(x_0)$ 的邻域 V_0, 使得 $f:U_0\to V_0$ 为 C^p 微分同胚. 记 $g=f^{-1}: V_0\to U_0$, 则有

$$(g\circ f)(x)=x,\ (f\circ g)(y)=y,$$

其中 $x\in U_0$, $y\in V_0$, 由于 f, g 均为 C^p 映射, 利用求导法则, 得到

$$[g'(y_0)][f'(x_0)]=I_X,\quad [f'(x_0)][g'(y_0)]=I_Y,$$

注意到 $f'(x_0)\in B(X\to Y)$, 根据逆算子定理即得

$$[f'(x_0)]^{-1}=g'(y_0)=g'(f(x_0))\in B(Y\to X).$$ 证毕.

5.2.2 隐函数存在定理

定理 1（隐函数存在定理） 设 X,Y,Z 均为实 Banach 空间，Ω 是 $X\times Y$ 中的开集，$(x_0,y_0)\in\Omega$，$f:\Omega\to Z$ 是连续映射，且满足：

$f(x,y)$ 对变元 x 强可微，$f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，

$f'_x(x_0,y_0):X\to Z$ 具有有界逆，

$f(x_0,y_0)=0$，

则存在 $r>0,\delta>0$，使得 $\|y-y_0\|<\delta$ 时

$$f(x,y)=0, \tag{1}$$

在 $\|x-x_0\|<r$ 内存在唯一的连续解 $x=g(y)$，满足 $x_0=g(y_0)$.

证 (i) 因为 $f'_x(x_0,y_0):X\to Z$ 具有有界逆，所以存在 $M>0$，使得

$$\|[f'_x(x_0,y_0)]^{-1}\|\leqslant M. \tag{2}$$

由于 $f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，故能取到 $r>0,\delta>0$，使得 $\|x-x_0\|\leqslant r$，$\|y-y_0\|<\delta$ 时

$$\|f'_x(x,y)-f'_x(x_0,y_0)\|<\frac{1}{2M}. \tag{3}$$

又由 $f(x_0,y)$ 连续，还不妨设 $\|y-y_0\|<\delta$ 时

$$\|f(x_0,y)\|<\frac{r}{2M}. \tag{4}$$

(ii) 今证 $\|y-y_0\|<\delta$ 时

$$\varphi_y(x)=x-[f'_x(x_0,y_0)]^{-1}f(x,y) \tag{5}$$

在 $\|x-x_0\|<r$ 内存在唯一的不动点 x^*，它显然满足 $f(x^*,y)=0$.

首先，由 r 的取法可知 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 时

$$\begin{aligned}\|\varphi_y(x)-x_0\|&\leqslant\|\varphi_y(x)-\varphi_y(x_0)\|+\|\varphi_y(x_0)-x_0\|\\&\leqslant\sup_{\|x-x_0\|\leqslant r}\|\varphi'_y(x)\|\|x-x_0\|+\|[f'_x(x_0,y_0)]^{-1}\|\|f(x_0,y)\|\\&<r,\end{aligned}$$

所以 φ_y 映 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 到 $\|x-x_0\|<r$ 之中.

其次，又由 r 的取法可得 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 时

$$\begin{aligned}\|\varphi_y'(x)\| &= \|I-[f_x'(x_0,y_0)]^{-1}f_x'(x,y)\| \\ &\leqslant \|[(f_x'(x_0,y_0)]^{-1}\|\|f_x'(x_0,y_0)-f_x'(x,y)\|<\frac{1}{2},\end{aligned} \qquad (6)$$

这就说明 φ_y 在 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 内压缩.

由压缩映射原理，$\|y-y_0\|<\delta$ 时 $\varphi_y(x)$ 在 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 内存在唯一的不动点，记为 $x=g(y)$. 由上面的证明可以看到这个不动点满足 $\|x-x_0\|<r$，又由唯一性得到 $x_0=g(y_0)$.

(iii) 最后证明 $x=g(y)$ 在 $\|y-y_0\|<\delta$ 内连续. 设 $\|y_1-y_0\|<\delta$, $\|y_2-y_0\|<\delta$, $x_1=g(y_1)$, $x_2=g(y_2)$，其中 $\|x_1-x_0\|<r$, $\|x_2-x_0\|<r$，于是

$$\begin{aligned}\|x_1-x_2\| &= \|\varphi_{y_1}(x_1)-\varphi_{y_2}(x_2)\| \\ &\leqslant \|\varphi_{y_1}(x_1)-\varphi_{y_1}(x_2)\|+\|\varphi_{y_1}(x_2)-\varphi_{y_2}(x_2)\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|+\|\varphi_{y_1}(x_2)-\varphi_{y_2}x_2)\|,\end{aligned}$$

这里最后一个不等号是(6)式的结果. 由上式得到

$$\|g(y_1)-g(y_2)\|=\|x_1-x_2\|\leqslant 2\|\varphi_{y_1}(x_2)-\varphi_{y_2}(x_2)\|, \qquad (7)$$

由 f 的连续性可知 $y_1\to y_2$ 时 $\|\varphi_{y_1}(x_2)-\varphi_{y_2}(x_2)\|\to 0$，所以 g 连续. 证毕.

隐函数存在定理的特殊情况是反函数定理.

系 假设 X, Y 是实 Banach 空间，Ω 是 X 中的开集，$x_0\in\Omega$，$f:\Omega\to Y$ 是 C^1 映射，且满足

$f'(x_0): X\to Y$ 具有有界逆；

$y_0=f(x_0)$；

则存在 $r>0, \delta>0$，使 $\|y-y_0\|<\delta$ 时，$f(x)=y$ 在 $\|x-x_0\|<r$ 内存在唯一的连续解 $x=g(y)$，满足 $x_0=g(y_0)$.

证 在定理 1 中取 $Z=Y, f(x,y)=f(x)-y$ 即可.

5.2.3 隐函数的可微性

为方便起见，先讨论反函数的可微性. 下面的局部反函数定理给出了局部微分同胚的一个判别准则，它可以看作 5.2.1 定理 1 的逆.

定理 1（局部反函数定理） 设 X，Y 是实 Banach 空间，Ω 是 X 中的开集，$p\geqslant 1$，$f:\Omega\to Y$ 是 C^p 映射，$x_0\in\Omega$. 若 $f'(x_0):X\to Y$ 是线性拓扑同构，则 f 在 x_0 为局部 C^p 微分同胚.

证 取 $Z=Y, f(x,y)=f(x)-y$，沿用定理 2 证明中的记号，由定理 2 的系可得存在 $r>0, \delta>0$，使 $\|y-y_0\|<\delta$ 时 $f(x)=y$ 在 $\|x-x_0\|<r$ 内有唯一的连续解 $x=g(y)$，满足 $y_0=f(x_0)$.

(i) 先证 g 在 $\{y\mid \|y-y_0\|<\delta\}$ 内强可微，且在此开球中 $g'(y)$ 连续. 设 $\|y_1-y_0\|<\delta$, $\|y_2-y_0\|<\delta$，记

$$\omega=g(y_1)-g(y_2)-[f'(g(y_2))]^{-1}(y_1-y_2),$$

设 $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$，其中 $\|x_1-x_0\|\leqslant r$, $\|x_2-x_0\|\leqslant r$，则

$$\begin{aligned}\|\omega\|&=\|x_1-x_2-[f'(x_2)]^{-1}[f(x_1)-f(x_2)]\|\\&\leqslant\|[f'(x_2)]^{-1}\|\,\|f(x_1)-f(x_2)-f'(x_2)(x_1-x_2)\|.\end{aligned}\tag{1}$$

因为

$$[f'(x)]^{-1}=(I-[f'(x_0)]^{-1}(f'(x)-f'(x_0)))^{-1}[f'(x_0)]^{-1},\tag{2}$$

又由 5.2.2 的(2),(3)两式，可知

$$\|[f'(x_0)]^{-1}(f'(x)-f'(x_0))\|\leqslant\frac{1}{2},\tag{3}$$

所以

$$\|(I-[f'(x_0)]^{-1}(f'(x)-f'(x_0)))^{-1}\|\leqslant 2,\tag{4}$$

由 5.2.2 的(2)式和上面的(4)，即得

$$\|[f'(x)]^{-1}\|\leqslant 2M. \tag{5}$$

由于 $f(x)$ 在 x_2 处强可微，由(1)和(5)，得到

$$\|\omega\|=o(\|x_1-x_2\|), \tag{6}$$

又由 5.2.2 的(7)式和上面的(5)，

$$\begin{aligned}\|x_1-x_2\|&\leqslant 2\|\varphi_{y_1}(x_2)-\varphi_{y_2}(x_2)\|\\&=2\|[f'(x_0)]^{-1}(y_1-y_2)\|\leqslant 2M\|y_1-y_2\|,\end{aligned}$$

所以，由(6)可得

$$\|\omega\|=o(\|y_1-y_2\|),$$

这就证明了 $g(y)$ 在 $\|y-y_0\|<\delta$ 中强可微，而且

$$g'(y)=[f'(g(y))]^{-1}. \tag{7}$$

因为 $f'(x)$ 连续，由(5)，$\|x_1-x_0\|\leqslant r$，$\|x_2-x_0\|\leqslant r$ 时

$$\begin{aligned}\|[f'(x_1)]^{-1}-[f'(x_2)]^{-1}\|&\leqslant\|[f'(x_1)]^{-1}\|\|[f'(x_2)]^{-1}\|\|f'(x_1)\\&-f'(x_2)\|\leqslant 4M^2\|f'(x_1)-f'(x_2)\|,\end{aligned}$$

所以 $[f'(x)]^{-1}$ 连续.

由 $g'(y)=[f'(g(y))]^{-1}$，而 $[f'(x)]^{-1}$ 及 $g(y)$ 均连续，所以 $g'(y)$ 也是连续的.

(ii) 再证 g 是 C^p 映射. 由假设 f 是 C^p 映射，在(i)中已证 g 是 C^1 映射. 设 $k<p$ 时 g 是 C^k 映射，为证明 g 是 C^{k+1} 映射，只要证明 $g'(y)=[f'(g(y))]^{-1}$ 是 C^k 映射，为此又只要证明 $[f'(x)]^{-1}$ 是 C^k 映射，这可由(2)，(3)及 5.1.5 定理 1 的系得到.　证毕.

定理 1 中的点 x_0 可以换为某个紧集，这就是下面的

定理 2　设 X，Y 为实 Banach 空间，$f:X\to Y$ 是 C^p 映射，$p\geqslant 1$. 如果紧集 $M\subset X$，$f:M\to f(M)$ 是双射，且 $x\in M$ 时，$f'(x):X\to Y$ 是线性拓扑同构，则存在 M 的邻域 U 及 $f(M)$ 的邻域 V，使得 $f:U\to V$ 是 C^p 微分同胚.

证　(i) 首先，证明有 M 的邻域 O，使 f 在 O 上是单射. 若不然，有 $x_n^{(1)},x_n^{(2)}\in X$，$\rho(x_n^{(1)},M)\to 0$，$\rho(x_n^{(2)},M)\to 0$，且满足

$$x_n^{(1)} \neq x_n^{(2)}, f(x_n^{(1)}) = f(x_n^{(2)}).$$

取 $u_n^{(1)}, u_n^{(2)} \in M$，使得

$$\|u_n^{(1)} - x_n^{(1)}\| \to 0, \quad \|u_n^{(2)} - x_n^{(2)}\| \to 0.$$

因为M紧，所以可取收敛子列，不妨设有 $u_n^{(1)} \to x^{(1)} \in M$，$u_n^{(2)} \to x^{(2)} \in M$，因而 $x_n^{(1)} \to x^{(1)}, x_n^{(2)} \to x^{(2)}$.

由 f 的连续性及 $f(x_n^{(1)}) = f(x_n^{(2)})$，得 $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)})$. 因为 f 在M上是双射，所以 $x^{(1)} = x^{(2)} = x \in M$.

这样，得$x_n^{(1)} \neq x_n^{(2)}, x_n^{(1)} \to x, x_n^{(2)} \to x$，且$f(x_n^{(1)}) = f(x_n^{(2)})$，即 f 在 x 附近不是一对一的. 但 $x \in M$，所以 $f'(x): X \to Y$ 具有有界逆. 由定理 1，f 在 x 处为局部 C^p 微分同胚，此为矛盾.

(ii) 由定理 1，对 $x \in M$，有 x 的邻域 $U_x \subset O$ 及 $f(x)$的邻域 V_x，使得 $f: U_x \to V_x$ 为 C^p 微分同胚. 令

$$U = \bigcup_{x \in M} U_x, \quad V = \bigcup_{x \in M} V_x,$$

则 $f: U \to V$ 是局部 C^p 微分同胚. 因为 $f(U_x) = V_x$，所以 $f(U) = V$，从而 $f: U \to V$ 是满射. 又因为 $U \subset O$，故而 f 还是U上的单射，所以 $f: U \to V$ 是同胚，从而即是 C^p 微分同胚. 证毕.

下面，我们利用定理 1 讨论隐函数的可微性.

定理 3 设X, Y, Z 为实 Banach 空间，Ω 为 $X \times Y$ 中的开集，$(x_0, y_0) \in \Omega$，$p \geqslant 1$，$f: \Omega \to Z$ 为 C^p 映射，$f(x_0, y_0) = 0$，$f'_x(x_0, y_0): X \to Z$ 具有有界逆，则存在 $r > 0$，$\delta > 0$，使得$\|y - y_0\| < \delta$ 时，方程

$$f(x, y) = 0$$

在$\|x - x_0\| < r$ 内存在唯一的解 $x = g(y)$，满足 $x_0 = g(y_0)$，而且 $g(y)$ 在$\|y - y_0\| < \delta$ 内有 p 阶连续导映射.

证 作映射 $\varphi: \Omega \to Z \times Y$，$\varphi(x, y) = (f(x, y), y)$. 由假设易知$\varphi$ 具有连续的 p 阶导映射，$\varphi(x_0, y_0) = (0, y_0)$，而且

$$d\varphi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0), & f'_y(x_0, y_0) \\ 0 & I \end{pmatrix}: X \times Y \to Z \times Y$$

具有有界逆. 由定理1,存在 $r, \delta > 0$, 当$\|z\| < \delta$, $\|y - y_0\| < \delta$ 时方程

$$\varphi(x, y) = (z, y)$$

在$\|x - x_0\| < r$, $\|y - y_0\| < r$ 内存在唯一具有 p 阶连续导映射的解.

取 $z = 0$, 得$\|y - y_0\| < \delta$ 时,有唯一的解 $x = g(y)$, 在$\|y - y_0\| < \delta$ 内为 C^p 映射, $x_0 = g(y_0)$, $\varphi(g(y), y) = (0, y)$, 即 $f(g(y), y) = 0$. 证毕.

§ 5.3 泛函极值

数学物理中许多问题都可以化为求某个适当的泛函 φ 的极值. 本节将利用§1中建立的无穷维空间微分学的工具, 类似于古典分析, 讨论泛函极值问题. 我们主要讨论了极值存在的两类条件, 一类是与泛函的下半弱连续性有关的, 另一类是致密性条件,即所谓 Palais-Smale 条件,同时,我们还介绍了与后一类条件有关的最速下降法.

5.3.1 泛函极值的必要条件

泛函极值是数学分析中函数极值概念的推广.

定义 设 X 是实赋范线性空间, $M \subset X$, $x_0 \in M$, φ 是定义于 X 的实值泛函. 如果存在 $\delta > 0$, 使得 $x \in M \cap O(x_0, \delta)$ 时

$$\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x), \tag{1}$$

则称 φ 在 x_0 处达到**关于 $x \in M$ 条件下的局部极小**; 如果存在 $\delta > 0$, 使(1)式对一切 $x \in O(x, \delta)$ 成立, 则称 φ 在 x_0 达到**无条件局部极小**.

定理 1 设 X 是实赋范线性空间，泛函 $\varphi: X\to\mathbf{R}$ 在 $x_0\in X$ 达到无条件局部极小，又设 φ 在 x_0 处是线性弱可微的，则

$$D\varphi(x_0)=0.$$

证 任取 $u\in X$，因为 φ 在 x_0 处线性弱可微，所以当 $|t|$ 充分小时，

$$\varphi(x_0+tu)-\varphi(x_0)=t[D\varphi(x_0)]u+o(t). \tag{2}$$

又由于 φ 在 x_0 处达到局部极小，因此上式左端非负. 记 $a=[D\varphi(x_0)]u$. 如果 $a\neq 0$，取 t 与 a 异号且 $|t|$ 充分小，使 $o(t)<\frac{|at|}{2}$ 由(2)式得

$$0\leqslant t[D\varphi(x_0)]u+o(t)<-|at|+\frac{|at|}{2}=-\frac{1}{2}|at|<0,$$

此不可能，故只有 $a=0$. 由 u 的任意性，即得 $D\varphi(x_0)=0$. 证毕.

5.3.2 泛函极值的存在性：下半弱连续条件

本段讨论与下半弱连续性相联系的泛函极值存在的条件.

定义 泛函 $\varphi: X\to\mathbf{R}$ 在 $x\in X$ 称为**下半弱连续的**，是指 x_n 弱收敛于 x 时，必有 $\varliminf_{n\to\infty}\varphi(x_n)\geqslant\varphi(x)$.

定理 1 设 M 是 X 中弱闭且弱列紧的集合，$\varphi: M\to\mathbf{R}$ 为下半弱连续泛函，则存在 $x_0\in M$，使得 $\varphi(x_0)=\inf_{x\in M}\varphi(x)$.

证 记 $c=\inf_{x\in M}\varphi(x)$，有 $\{x_n\}\subset M$，使得 $\varphi(x_n)\to c$. 由于 M 弱紧，故有 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于某个元 $x_0\in X$，但 M 弱闭，因此 $x_0\in M$.

因为 φ 下半弱连续，$c=\varliminf_{k\to\infty}\varphi(x_{n_k})\geqslant\varphi(x_0)$，但 c 是下确界，必有 $\varphi(x_0)=c$，因此 c 是极小值且 $c>-\infty$.

系 设 X 是自反 Banach 空间，φ 是 X 上的下半弱连续泛函.

(1) 如果M是X的有界弱闭子集，那末，必存在$x_0\in M$，使得$\varphi(x_0)=\inf\limits_{x\in M}\varphi(x)$.

(2) 如果$\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\varphi(x)=+\infty$，那末，必存在$x_0\in X$，使得$\varphi(x_0)=\inf\limits_{x\in X}\varphi(x)$.

证 (1) 自反 Banach 空间中有界弱闭集必弱列紧，由定理 1 得(1)的结论.

(2)记$c=\inf\limits_{x\in X}\varphi(x)$，由假设，存在$r_0$，$\|x\|\geqslant r_0$时，

$$\varphi(x)>c,$$

取$M=\{x\mid\|x\|\leqslant r_0\}$，$M$是$X$中的有界弱闭集，由(1)可知必有$x_0\in M$，使得$\varphi(x_0)=c$，即$\varphi(x_0)=\inf\limits_{x\in X}\varphi(x)$.　　证毕.

由于定理 1 需要下半弱连续的条件，以下对此进行一些讨论.

定义　设X,Y为赋范线性空间，$\Omega\subset X$，称映射$f:\Omega\to Y$是紧映射，是指$\overline{f(\Omega)}$为Y中的紧集.

定理 2　设X为赋范线性空间，泛函$\varphi:X\to\mathrm{R}$为强可微的，$F(x)=\mathrm{grad}\varphi(x)$是紧映射，则$\varphi$弱连续.

证　如果φ并非弱连续，则必有$\{x_n\}\subset X$，使$w\text{-}\lim x_n=x_0$，$|\varphi(x_n)-\varphi(x_0)|\geqslant\varepsilon>0(n=1,2,\cdots)$. 由中值定理，存在$\tau_n\in[0,1]$，使得

$$0<\varepsilon\leqslant|\varphi(x_n)-\varphi(x_0)|=|F(x_0+\tau_n(x_n-x_0))(x_n-x_0)|.$$

因为$\{x_n\}$有界，$\overline{F(X)}$紧，不妨设$F(x_0+\tau_n(x_n-x_0))\to y\in X^*$. 于是

$$\begin{aligned}\varepsilon&\leqslant|F(x_0+\tau_n(x_n-x_0))(x_n-x_0)|\\&\leqslant|y(x_n-x_0)|+\|F(x_0+\tau_n(x_n-x_0))-y\|\|x_n-x_0\|\to0.\end{aligned}$$

这是矛盾. 证毕.

下面讨论凸泛函的下半弱连续性.

定义　设X为实赋范线性空间，$\Omega\subset X$，称映射$f:\Omega\to X^*$是

单调的，是指对任何 $x,y\in\Omega$，均有

$$\langle f(x)-f(y),x-y\rangle\geqslant 0,$$

其中$\langle x^*,x\rangle=x^*(x)\,(x^*\in X^*,x\in X)$.

设有泛函 $\varphi:\Omega\to\mathbf{R}$，如果对任何 $x,y\in\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$，有

$$\varphi(tx+(1-t)y)\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y),$$

则称 φ 是凸泛函.

定理 3 设 X 是实赋范线性空间，$\varphi:X\to\mathbf{R}$ 是可微映射，$f(x)=\mathrm{grad}\varphi(x)$，则 f 为单调映射的充要条件是 φ 为凸泛函，此时，φ 必是下半弱连续的.

证 首先，设 f 是单调映射. 对 $x,y\in X$，$0\leqslant t\leqslant 1$，有

$$\begin{aligned}&t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)-\varphi(tx+(1-t)y)\\&=t(1-t)\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(tx+(1-t)y)}{1-t}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\varphi(y)-\varphi(tx+(1-t)y)}{t}\right].\end{aligned}\tag{1}$$

利用中值公式，易知存在 $t\leqslant\tau_1\leqslant 1$，$0\leqslant\tau_2\leqslant t$，使(1)式右边化为

$$\begin{aligned}&t(1-t)[\langle f(\tau_1x+(1-\tau_1)y),x-y\rangle\\&\qquad+\langle f(\tau_2x+(1-\tau_2)y),y-x\rangle]\\&=t(1-t)\langle f(\xi)-f(\eta),x-y\rangle,\end{aligned}\tag{2}$$

其中$\xi=\tau_1x+(1-\tau_1)y$，$\eta=\tau_2x+(1-\tau_2)y$. 注意$\xi-\eta=(\tau_1-\tau_2)\cdot(x-y)$，根据 f 单调，得到

$$\langle f(\xi)-f(\eta),x-y\rangle=(\tau_1-\tau_2)\langle f(\xi)-f(\eta),\xi-\eta\rangle\geqslant 0,\tag{3}$$

因此，由(1)，(2)，(3)即得

$$\varphi(tx+(1-t)y)\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y),$$

即 φ 是凸泛函.

反之，设 φ 是凸泛函. 于是，对任意的 $x,y\in X$，$0\leqslant t\leqslant 1$，

$$\frac{\varphi(tx+(1-t)y)-\varphi(y)}{t}\leqslant\varphi(x)-\varphi(y),$$

令 $t\to 0$, 得

$$\langle f(y), x-y\rangle \leqslant \varphi(x)-\varphi(y), \tag{4}$$

同样地,

$$\langle f(x), y-x\rangle \leqslant \varphi(y)-\varphi(x), \tag{5}$$

(4)与(5)两边分别相加,得

$$\langle f(y)-f(x), y-x\rangle \leqslant 0,$$

亦即 f 是单调的.

最后, 当 f 单调时, 对任意的 $x_n \xrightarrow{w} x$, 由弱收敛的定义, 有 $\langle f(x), x_n-x\rangle \to 0$, 于是

$$\begin{aligned}\varphi(x_n)-\varphi(x) &= \int_0^1 \langle f(tx_n+(1-t)x), x_n-x\rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle f(tx_n+(1-t)x)-f(x), x_n-x\rangle dt \\ &\quad + \int_0^1 \langle f(x), x_n-x\rangle dt \geqslant \int_0^1 \langle f(x), x_n-x\rangle dt \to 0,\end{aligned}$$

故得 $\varliminf_{n\to\infty}\varphi(x_n) \geqslant \varphi(x)$, 即 φ 是下半弱连续的. 证毕.

5.3.3 最速下降法

设 φ 是赋范线性空间 X 上的实值泛函, 且在 X 上是有下界的. 现在, 试图寻找 $x^* \in X$, 使得

$$\varphi(x^*) = \inf_{x\in X} \varphi(x).$$

如果这样的 x^* 存在, 我们很自然地设想可以通过下述过程求得: 用某种方法构造出泛函 φ 的"极小化"序列 $\{x_n\}$, 即取 $\{x_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \inf_{x\in X} \varphi(x).$$

假如 $\{x_n\}$ 收敛于某元素 x^*, φ 又是连续的, 则 x^* 即是问题的解.

所谓最速下降法就是对充分广的一类泛函构造极小化序列 $\{x_n\}$ 的方法.

设 $x\in X$, $u\in X$, $u\neq 0$, 我们把

$$\frac{1}{\|u\|}\lim_{t\to 0^+}\frac{\varphi(x+tu)-\varphi(x)}{t} \tag{1}$$

称为 φ 在 x 处沿方向 u 的导数，记为 $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x)$. 如果 $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x)$ 对任意方向都存在，又设存在某个方向，使得沿这个方向的导数是极小的，这个方向就称为 φ 在 x 点的**最速下降方向**.

假定对每个 x 和 $u\neq 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x)$都存在，且对每个 x 都存在最速下降方向，此时极小化序列大致可用下面的方法取到：任取 $x_0\in X$. 假定已取得 x_{n-1}, 泛函 φ 在 x_{n-1} 处的最速下降方向为 u_n, 取 x_n 为

$$x_n=x_{n-1}+\varepsilon_n u_n, \tag{2}$$

其中 $\varepsilon_n(\geqslant 0)$称为**下降值**，在不同的情况下，$\varepsilon_n$ 有不同的取法.

现在，设 X 是赋范线性空间，φ 是在 X 上处处强可微的泛函，于是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x)=\frac{1}{\|u\|}\varphi'(x)(u)=\varphi'(x)\left(\frac{u}{\|u\|}\right).$$

可见，泛函在 x 处最速下降方向的单位向量 y 应满足

$$\varphi'(x)(y)=\inf_{\|u\|=1}\varphi'(x)(u).$$

但是

$$\inf_{\|u\|=1}\varphi'(x)(u)=-\sup_{\|u\|=1}(-\varphi'(x)(u))=-\|\varphi'(x)\|,$$

因此，单位向量 y 是最速下降方向的充要条件是

$$\varphi'(x)(y)=-\|\varphi'(x)\|. \tag{3}$$

当 X 是 Hilbert 空间时，$\varphi'(x)\in X^*=X$. 因此，$\varphi'(x)(y)=-\|\varphi'(x)\|$ 即 $(y, \varphi'(x))=-\|\varphi'(x)\|$, 此式成立的充要条件是 $-\varphi'(x)$与 y 同向，也就是说，$-\varphi'(x)$ 即最速下降方向. 这时，对

任取的 $x_0\in X$，取

$$x_1=x_0-\varepsilon\varphi'(x_0),$$

于是

$$\varphi(x_1)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)(x_1-x_0)+o(x_1-x_0)$$
$$=-\varepsilon\|\varphi'(x_0)\|^2+o(\varepsilon).$$

因此，总可取 ε，使 $\varphi(x_1)<\varphi(x_0)$；然后，由 x_1 出发，同样取到 x_2，使 $\varphi(x_2)<\varphi(x_1)$，…，依次下去就可能得到极小化序列.

定义 设 X 是实赋范线性空间，$x_0\in X$，φ 是 X 上强可微的泛函，如果 $\varphi'(x_0)=0$，就称 x_0 是 φ 的驻点.

定理 1 设 X 是实赋范线性空间，φ 是 X 上的凸可微泛函，x_0 是 φ 的驻点，则 $\varphi(x_0)=\inf\limits_{y\in X}\varphi(y)$.

证 对任何非零元 $u\in X$，由中值定理，存在 $0\leqslant\theta\leqslant1$，使

$$\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta u)u. \tag{4}$$

由 5.3.2 定理 3，φ' 是单调的，因此

$$\varphi'(x_0+\theta u)u\geqslant\varphi'(x_0)u=0. \tag{5}$$

由(4)，(5)及 u 的任意性，即得

$$\varphi(x_0)=\inf_{y\in X}\varphi(y).$$

证毕.

下面讨论与极小化序列有关的性质，为此，先建立一个引理.

引理 1 设 X 是实赋范线性空间，φ 是 X 上强可微的泛函，B 是 X 中一个凸集，$L>0$，满足

$$\|\varphi'(x_1)-\varphi'(x_2)\|\leqslant L\|x_1-x_2\|,\quad x_1,x_2\in B$$

则当 $x,x+u\in B$ 时，

$$\varphi(x+u)\leqslant\varphi(x)+\varphi'(x)u+\frac{L}{2}\|u\|^2.$$

证 $$\varphi(x+u)=\varphi(x)+\int_0^1\varphi'(x+tu)u\,dt$$

$$=\varphi(x)+\varphi'(x)u+\int_0^1(\varphi'(x+tu)-\varphi'(x))u\,dt$$

$$\leqslant\varphi(x)+\varphi'(x)u+\int_0^1\|\varphi'(x+tu)-\varphi'(x)\|\|u\|\,dt$$

$$\leqslant\varphi(x)+\varphi'(x)u+L\|u\|^2\int_0^1 t\,dt.$$

在下面的讨论中，我们设X为实赋范线性空间，φ是X上强可微的泛函，$x_0\in X$，

$$\Omega=\{x\mid\varphi(x)\leqslant\varphi(x_0)\}\tag{6}$$

是有界集，

$$x_n=x_{n-1}+\varepsilon_n u_n,\quad n=1,2,\cdots$$

其中u_n是φ在x_{n-1}处最速下降方向的单位向量，ε_n满足

$$\varphi(x_{n-1}+\varepsilon_n u_n)=\min_{t\geqslant 0}\varphi(x_{n-1}+tu_n).\tag{7}$$

定理 2 设$R'>R=\sup\limits_{x\in\Omega}\|x\|$，$B=\{x\mid\|x\|\leqslant R'\}$，$\varphi$满足

$$\|\varphi'(x)-\varphi'(y)\|\leqslant L\|x-y\|,\quad x,y\in B\tag{8}$$

则使(7)式成立的$\{x_n\}$满足$\varphi'(x_n)\to 0$.

证 设$0<t\leqslant R'-R$，由ε_n的定义及引理1，有

$$\varphi(x_n)\leqslant\varphi(x_{n-1}+tu_n)\leqslant\varphi(x_{n-1})+t\varphi'(x_{n-1})u_n+\frac{1}{2}Lt^2.$$

由于u_n是最速下降方向，故而

$$\|\varphi'(x_{n-1})\|=-\varphi'(x_{n-1})u_n\leqslant\frac{\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_n)}{t}+\frac{1}{2}Lt.$$

设ε是任意正数，$t<\min(\varepsilon,R'-R)$. 由Ω有界及条件(8)，得到$\{\varphi(x_n)\}$有界，又$\{\varphi(x_n)\}$单调下降，故$\lim\varphi(x_n)$存在. 当n充分大时，$\frac{1}{t}(\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_n))<\varepsilon$，于是$\|\varphi'(x_{n-1})\|\leqslant\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}L\right)$. 证毕.

由定理2可见，若$\{x_n\}$存在极限点，则此极限点必为φ的

驻点.

定理 3　设 X 是有限维空间，φ 是 C' 泛函，则最速下降序列 $\{x_n\}$ 的极限点是驻点.

证　由于 $\dim X<+\infty$，Ω 有界，故 $\{x_n\}$ 必有极限点. 设 y 是 $\{x_n\}$ 的一个极限点，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=y$. 不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k+1}=u$. 对 $t>0$，记

$$r_{n_k}(t)=\frac{1}{t}(\varphi(x_{n_k}+tu_{n_k+1})-\varphi(x_{n_k}))-\varphi'(x_{n_k})u_{n_k+1}, \tag{9}$$

易见 $\lim\limits_{k\to\infty}r_{n_k}(t)$ 存在，记为 $r(t)$，得

$$r(t)=\frac{1}{t}(\varphi(y+tu)-\varphi(y))-\varphi'(y)u.$$

因为 φ 是可微泛函，故

$$\lim_{t\to 0}r(t)=0. \tag{10}$$

由于 $\{x_n\}$ 是最速下降序列，由(9)可得

$$\begin{aligned}\varphi(x_{n_k+1})&=\varphi(x_{n_k}+\varepsilon_{n_k-1}u_{n_k+1})\leqslant\varphi(x_{n_k}+tu_{n_k+1})\\&=\varphi(x_{n_k})+t\varphi'(x_{n_k})u_{n_k+1}+tr_{n_k}(t),\end{aligned}$$

因为 $t>0$，所以

$$-\varphi'(x_{n_k})u_{n_k+1}\leqslant\frac{1}{t}(\varphi(x_{n_k})-\varphi(x_{n_k+1}))+r_{n_k}(t). \tag{11}$$

在(11)中令 $k\to\infty$，注意到 $\lim\limits_{k\to\infty}(\varphi(x_{n_k})-\varphi(x_{n_k+1}))=0$，$\varphi'(x_{n_k})u_{n_k+1}=-\|\varphi'(x_{n_k})\|$，即得

$$\|\varphi'(y)\|=-\varphi'(y)u\leqslant r(t), \tag{12}$$

由(10)及(12)，得到

$$\varphi'(y)=0.$$　证毕.

5.3.4　泛函极值的存在性：Palais-Smale 条件

在讨论泛函极值存在的条件时，人们由与最速下降法相关的

考虑，很自然地提出了一类紧性的条件，通常称之为Palais-Smale条件，或简称为(PS)条件.

为讨论方便，先给出一个关于抽象微分方程初值问题的解的存在性与唯一性的结果.

定义 设 X, Y 均是赋范线性空间，$f: X\to Y$，如果对任何 $x_0\in X$，均存在 $\delta>0$, $K>0$，使得对一切 $x_1, x_2\in O(x_0,\delta)$，均有

$$\|f(x_1)-f(x_2)\|\leqslant K\|x_1-x_2\|,$$

就称 f 满足**局部 Lipschitz 条件**.

引理 1 设 X 为实 Hilbert 空间，$\varphi: X\to \mathbf{R}$ 为 C^1 泛函，且有下界，$f(x)=\mathrm{grad}\varphi(x)$满足局部Lipschitz 条件，则对任何 $x_0\in X$，方程

$$\frac{dx}{dt}=-f(x), \quad x(0)=x_0 \tag{1}$$

存在定义于$[0,+\infty)$上的唯一解.

证 对 $x_0\in X$，取 $\delta>0$, $K>0$，使 $x_1, x_2\in\overline{O(x_0,\delta)}$时

$$\|f(x_1)-f(x_2)\|\leqslant K\|x_1-x_2\|,$$

任取 $\alpha>0$. 显然，(1)在$[0,\alpha]$上有解 $x(t)$当且仅当 $0\leqslant t\leqslant\alpha$时，$x(t)=x_0-\int_0^t f(x(s))\,ds$. 设 $C([0,\alpha]\to X)$ 为$[0,\alpha]\to X$ 的连续映射全体按范数 $\|x\|=\sup\|x(t)\|$ 所成的 Banach 空间. 对 $x\in C([0,\alpha]\to X)$，规定

$$(Ax)(t)=x_0-\int_0^t f(x(t))\,dt.$$

对 x, $y\in\overline{O(x_0,\delta)}$，有

$$\|Ax-x_0\|\leqslant\int_0^\alpha\|f(x(s))\|ds\leqslant[K\delta+\|f(x_0)\|]\alpha,$$

$$\|Ax-Ay\|\leqslant K\alpha\|x-y\|.$$

可见，只要 α 充分地小，满足

$$[K\delta \mid \|f(x_0)\|]\alpha<\delta, K\alpha<1,$$

A 便是 $\overline{O(x_0,\delta)}$ 到自身的压缩映射. 由压缩映射原理, A 有且仅有一个不动点, 即方程(1)在区间 $[0,\alpha]$ 上有且仅有一个解 $x(t)$.

现在, 设解 $x(t)$ 的最大存在区间为 $(0,t^*)$, 今证 $t^*=\infty$.

由于 φ 有下界, 沿曲线 $x(t)$, 有

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t))=\varphi'(x(t))x'(t)=-\|f(x(t))\|^2, \tag{2}$$

所以 $\varphi(x(t))$ 是 t 的下降函数, 因此, $\varphi(x(t))$ 有界.

对于 $0<t_1<t_2<t^*$, 有

$$\begin{aligned}\|x(t_2)-x(t_1)\| &= \left\|\int_{t_1}^{t_2} x'(t)dt\right\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2}\|x'(t)\|dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\|f(x(t))\|dt \leqslant \left[\int_{t_1}^{t_2}\|f(x(t))\|^2dt\right]^{1/2}(t_2-t_1)^{1/2} \\ &= \left[-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\varphi(x(t))dt\right]^{1/2}(t_2-t_1)^{1/2} \\ &= [\varphi(x(t_1))-\varphi(x(t_2))]^{1/2}(t_2-t_1)^{1/2}.\end{aligned}$$

因为 $\varphi(x(t))$ 有界, 所以存在 $M>0$, 使得

$$\|x(t_2)-x(t_1)\|\leqslant M(t_2-t_1)^{1/2}. \tag{3}$$

若 $t^*<+\infty$, 由(3), $t_n\to t^*$ 时, $\{x(t_n)\}$ 是基本序列, 且 $\lim\limits_{t_n\to t^*}x(t_n)$ 与 $\{t_n\}$ 的选取无关, 设 $x^*=\lim\limits_{t\to t^*}x(t)$.

由于 $f(x)$ 在 x^* 处仍具有局部 Lipschitz 连续性, 由本引理第一段的证明方法, 易知当 δ 充分小时,

$$\frac{dx}{dt}=-f(x), x(t^*)=x^* \tag{4}$$

在 $|t-t^*|<\delta$ 上存在唯一的解, 因此, (1)在 $(0,t^*+\delta)$ 上存在唯一的解, 这与 t^* 的定义矛盾. 证毕.

现在引出(PS)条件的概念.

定义 设 X 是赋范线性空间, $\varphi: X\to\mathbb{R}$ 为 C^1 泛函, $\Omega\subset X$. 如

果对任何序列$\{x_n\}\subset\Omega$，只要$\{\varphi(x_n)\}$有界，$\varphi'(x_n)\to 0$，则$\{x_n\}$必有收敛子序列，就称φ在Ω上满足(PS)条件.

易见，上述收敛子列的极限$\bar{x}$必满足$\varphi'(\bar{x})=0$.

(PS)条件的等价形式为：若φ为C^1泛函，$\{\varphi(x)\mid x\in\Omega\}$有界，$\{\varphi'(x)\mid x\in\Omega\}$与原点的距离为0，则在$\overline{\Omega}$上有点$x$，使得$\varphi'(x)=0$.

定理1 设X为实Hilbert空间，$\varphi:X\to\mathbf{R}$为C^1泛函，φ具有下界，且满足(PS)条件，$f(x)=\mathrm{grad}\varphi(x)$满足局部Lipschitz条件，则$\varphi$必在某点$\bar{x}$达到极小.

证 因为φ有下界，故$c=\inf\varphi(x)>-\infty$. 如果φ不能达到下确界c，下面来导出矛盾.

首先，证明存在$\varepsilon>0$，使$f(x)$在集

$$\{x\in X\mid\varphi(x)\leqslant c+\varepsilon\}$$

内无零点. 若不然，设有$x_n\in\left\{x\in X\mid\varphi(x)\leqslant c+\frac{1}{n}\right\}$，使得$f(x_n)=0$，由$\varphi(x)$有下界及条件(PS)，$\{x_n\}$有极限点$\bar{x}$. 显然，$\varphi(\bar{x})=c$，即$\varphi$达到极小值$c$，此不可能.

取$x_0\in\{x\in X\mid\varphi(x)\leqslant c+\varepsilon\}$. 考察方程

$$\frac{dx}{dt}=-f(x),\quad x(0)=x_0,$$

由引理1，上述方程存在定义于$[0,\infty)$的解$x(t)$.

同引理1的证明，由于φ有下界，且

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t))=-|f(x(t))|^2,$$

故$\varphi(x(t))$下降，从而$\varphi(x(t))$有界. 再由于$\varphi(x)$有下界，故

$$\lim_{t\to\infty}|f(x(t))|=0.$$

利用(PS)条件，当$t_n\to\infty$时，$x(t_n)$有极限点$\bar{x}$，且$f(\bar{x})=0$.

但因为$\varphi(x(t))$单调下降，$x_0\in\{x\in X\mid\varphi(x)\leqslant c+\varepsilon\}$，所以，

$x(t)\in\{x\in X\mid\varphi(x)\leqslant c+\varepsilon\}$，从而$\bar{x}$满足$\varphi(\bar{x})\leqslant c+\varepsilon$，此与定义矛盾. 证毕.

§ 5.4 Brouwer 度

在非线性方程的研究中，往往需要估计解的个数. 虽然，在许多场合中，解的个数并非稳定，即在小扰动下解的个数可能改变，但是，人们发现解的某种"代数个数"仍然是一类稳定的数量值，这就是所谓拓扑度的概念. 粗略地说，拓扑度是一个与映射f及区域Ω有关的整值函数，它是f在Ω内零点"代数个数"的某种稳定的度量. 1912 年，Brouwer 对有限维空间中的连续映射用代数拓扑的方法引入了 Brouwer 度，1934 年 Schauder 把这个概念推广到无限维赋范空间中的紧连续场，建立了 Leray-Schauder 度. 由拓扑度的方法，很自然地导出了 Brouwer 不动点定理和 Schauder 不动点定理. 现在，拓扑度理论已成为研究非线性问题的基本方法之一.

本节将用分析方法介绍 Brouwer 度的定义及性质，它们是整个拓扑度理论的出发点.

5.4.1 C^1类映射的拓扑度

先考察一个简单的例子.

例1 设f是定义在区间$[a,b]$上的连续可微实值函数，p是某个实数，考察方程

$$f(x)=p \tag{1}$$

解的个数. 由连续函数的介值定理，当$f(a)-p$和$f(b)-p$符号相反时，方程(1)在(a,b)中至少有一个解，但解的个数经过小扰动可能会变化. 例如

$$f(x)=x^2+c=0$$

在$(-1,1)$中解的个数，当c由负变0再变为正时，解的个数由2变为1再变为0.

但若对(1)的每个解x赋予符号$\operatorname{sign} f'(x)$，并考察它们的代数和（假定$f(x)=p$时$f'(x)\neq 0$），

$$\deg(f,(a,b),p)=\sum_{f(x)=p}\operatorname{sign} f'(x) \tag{2}$$

则可知它是小扰动下不变的. 实际上

$$\deg(f,(a,b),p)=\begin{cases}1, \text{当 } f(b)>p>f(a) \text{ 时},\\ -1, \text{当 } f(b)<p<f(a) \text{ 时},\\ 0, \text{当 } f(b)-p \text{ 与 } f(a)-p \text{ 同号时}.\end{cases}$$

在这一段中，我们将根据(2)的形式定义C^1类映射的拓扑度. 为方便起见，先约定若干常用的记号.

下面，对$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，取$\|x\|=\max\limits_i|x_i|$；用$\Omega$表示$\mathbf{R}^n$中的一个有界开集；$C(\overline{\Omega})$表示$\overline{\Omega}$到$\mathbf{R}^n$的连续映射全体，对$f\in C(\overline{\Omega})$，取

$$\|f\|=\max_{x\in\overline{\Omega}}\|f(x)\|;$$

用$C^p(\overline{\Omega})$表示$C(\overline{\Omega})$的一个子空间，$f\in C^p(\overline{\Omega})$是指$f\in C(\overline{\Omega})$，且存在$f$在一个包含$\overline{\Omega}$的开集$\tilde{\Omega}$上的延拓$\tilde{f}$，$\tilde{f}$在$\tilde{\Omega}$上具有$p$阶的各个连续偏导数；对$f\in C^1(\overline{\Omega})$，取

$$\|f\|_1=\sup_{\substack{x\in\Omega\\1\leq i\leq n}}|f_i(x)|+\sup_{\substack{x\in\Omega\\1\leq i,j\leq n}}\left|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right|,$$

其中$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$. 又记

$$J_f(x)=\det\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$$

作为(2)的直接推广，先讨论非临界点的情况.

定义 设$f\in C^1(\overline{\Omega})$，如果$J_f(x)=0$，就称$x$是$f$的一个**临界**

点，临界点全体记为 $Z_f(\overline{\Omega})$，简记为 Z_f.

引理 1　设$f\in C^1(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(Z_f)$，则$f^{-1}(p)=\{x\,|\,f(x)=p\}$是有限点集.

证　若 $f^{-1}(p)$是无限集，由$\overline{\Omega}$的紧性可知，必有两两不同的点组成的序列$\{x_n\}\subset\overline{\Omega}$，使得$f(x_n)=p$，$x_n\to x_0$，于是，$x_0\in\overline{\Omega}$，$f(x_0)=p$. 由此可知

$$0=f(x_n)-f(x_0)=f'(x_0)(x_n-x_0)+o(\|x_n-x_0\|)\qquad(3)$$

但 $p\overline{\in}f(Z_f)$，所以 $x_0\overline{\in}Z_f$，得到 $J_f(x_0)\neq 0$，这就是说 $f'(x_0)$是正则的线性算子，从而存在 $\varepsilon>0$，使

$$\|f'(x_0)x\|\geqslant\varepsilon\|x\|,\quad x\in\mathbb{R}^n.\qquad(4)$$

(3)与(4)显然是矛盾的. 证毕.

定义　设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega\cup Z_f)$，规定 f 在 p 点关于Ω的拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$为

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\operatorname{sign}J_f(x).$$

因为 $p\overline{\in}f(Z_f)$，由引理 1 可知右端的和式只含有限个项.

如果用 I 表示恒等映射，由定义立即可知

$$\deg(I,\Omega,p)=\begin{cases}1, & \forall p\in\Omega,\\ 0, & \forall p\overline{\in}\overline{\Omega}.\end{cases}$$

这个性质也称为拓扑度的**标准性**.

定理1　设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(Z_f\cup\partial\Omega)$，则存在 $\delta>0$，使得$g\in C^1(\overline{\Omega})$，$\|f-g\|_1<\delta$ 时，$p\overline{\in}g(Z_g\cup\partial\Omega)$，且

$$\deg(g,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p).\qquad(5)$$

证　先设$f^{-1}(p)=\varnothing$. 易知只要取 $\delta=\frac{1}{2}\rho(p,f(\overline{\Omega}))$，当$\|f-g\|_1<\delta$ 时，便有

$$|g(x)-p|>\delta,\quad\forall x\in\overline{\Omega},$$

因此，$g^{-1}(p)=\varnothing$．由定义即知

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)=0.$$

一般地，由引理 1 可知，不妨设 $f^{-1}(p)=\{a_1,\cdots a_k\}$．现在，设法取正数 r,δ，使得 $B_i=O(a_i,r)$ 互不相交，且 $g\in C^1(\overline{\Omega})$，$\|f-g\|_1<\delta$ 时，$g^{-1}(p)\subset\bigcup_{i=1}^{k}B_i$，$g^{-1}(p)$ 与每个 B_i 的交集均为单点集．

先取 r_0，$1>r_0>0$，使 $r=r_0$ 时 $\overline{B}_i$ 互不相交，$\overline{B}_i\cap(\partial\Omega\cup Z_f)=\varnothing(i=1,\cdots,k)$，于是 $x\in\bigcup_{i=1}^{k}\overline{B}_i$ 时，$|J_f(x)|>0$．由于 $p\overline{\in}f(Z_f)$，这是可以办到的．记 $M=\sup\{\|f'^{-1}(x)\|\,|\,x\in\bigcup_{i=1}^{k}\overline{B}_i\}$．由 $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，再取 $\delta_0>0$，使 $\|f-g\|_1<\delta_0$ 时，$p\overline{\in}g(\partial\Omega)$，且 $x\in\bigcup_{i=1}^{k}\overline{B}_i$ 时，$|J_g(x)|>0$，$\|g'^{-1}(x)\|\leqslant 2M$．

现在，在 B_i 中考察方程

$$g(x)=p \tag{6}$$

的解．暂时记 $a=a_i$，$z=x-a$，则(6)又可写成

$$g'(a)z+g(z+a)-g'(a)z=p, \tag{7}$$

但 $g'(a)$ 是可逆的线性算子，所以(7)又等价于

$$z=[g'(a)]^{-1}[p-g(z+a)+g'(a)z]. \tag{8}$$

记 $T(z)=[g'(a)]^{-1}[p-g(z+a)+g'(a)z]$．今证当 r,δ 充分小时，T 是 $\overline{O(0,r)}$ 到自身的压缩算子．实际上，对 $y,z\in\overline{O(0,r)}$ 由5.1.1定理1，可知存在 $0\leqslant\theta\leqslant1$，使得

$$\begin{aligned}
&\|T(z)-T(y)\|\\
&\quad=\|g'(a)^{-1}[g(z+a)-g(y+a)-g'(a)(z-y)]\|\\
&\quad\leqslant\|g'(a)^{-1}\|\|[g'(\theta z+(1-\theta)y+a)-g'(a)](z-y)\|,
\end{aligned} \tag{9}$$

又由于 $T(0)=g'(a)^{-1}(p-g(a))$，故令(9)中 $y=0$，得

$$\|T(z)\|\leqslant g'(a)^{-1}\|(\|g'(\theta z+a)-g'(a)\|\|z\|+\|p-g(a)\|) \quad (10)$$

取正数$r<r_0$,使$z\in O(0,r)$时,$\|f'(z+a_i)-f'(a_i)\|\leqslant\frac{1}{10M}$,$i=1,\cdots,k$;

再取正数δ,使$\delta\leqslant\frac{r}{10M}$,于是,由三角不等式可得,当$y,z\in\overline{O(0,r)}$时

$$\|Tz\|\leqslant\frac{4}{5}r, \quad (11)$$

$$\|Tz-Ty\|\leqslant\frac{3}{5}\|z-y\|, \quad (12)$$

由压缩映射定理,方程(8)在$\overline{O(0,r)}$中有唯一的解,由(11),实际上此解属于$O(0,r)$. 这就是说,$\|g-f\|_1<\delta$时,方程$g(x)=p$在诸B_i中分别有且仅有一个解.

取$\varepsilon>0$,使$x\in F=\overline{\Omega}\setminus\bigcup_{i=1}^{k}B_i$时,$|f(x)-p|\geqslant\varepsilon$. 必要时,缩小$\delta$,使$x\in\overline{\Omega}$时$\|f(x)-g(x)\|<\frac{1}{2}\varepsilon$. 于是,$x\in F$时,$\|g(x)-p\|\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon$,

即有$g^{-1}(p)\subset\bigcup_{i=1}^{k}B_i$,又$\bigcup_{i=1}^{k}B_i$中没有$g$的临界点,故$p\overline{\in}g(z_g)$,

$$\begin{aligned}\deg(g,\Omega,p)&=\sum_{x\in g^{-1}(p)}\operatorname{sign}(J_g(x))\\&=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sign}J_f(a_i)=\deg(f,\Omega,p).\end{aligned}$$ 证毕.

5.4.2 几个引理

为了消除拓扑度定义中$p\overline{\in}f(Z_f)$的限制,需要作一些准备工作.

引理 1(Sard 定理) 设$f\in C^1(\overline{\Omega})$,则$m(f(Z_f))=0$,这里$m$表示$R^n$中的勒贝格测度。

证 因开集Ω可用可列个闭正方体覆盖,故只要证明对每个

闭正方体 C，有 $m(f(C\cap Z_f))=0$.

设 C 每边长 l，N 等分各边得 N^n 个小闭正方体，其直径 $\delta=\sqrt{n}\frac{l}{N}$.

记 $M=\max_{x\in C}\|f'(x)\|$，又对任意 $\varepsilon>0$，取充分大的 N，使小正方体 K 内任意两点 x 和 x_0 有

$$\|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\|<\varepsilon\|x-x_0\|<\delta\varepsilon,$$

由此可见，$f(K)$ 经平移得到的 $f(K)-f(x_0)+f'(x_0)x_0$ 与 K 经线性变换 $f'(x_0)$ 所得的 $f'(x_0)K$ 两者对应点之间距离不超过 $\varepsilon\delta$.

设 K 含有临界点 x_0，于是 $J_f(x_0)=0$，因此，$f'(x_0)K$ 是一个属于 $n-1$ 维超平面且直径不超过 $M\delta$ 的平行体，$f(K)-f(x_0)+f'(x_0)x_0$ 包含在某 n 维柱体中，这个柱体的高不超过 $2\varepsilon\delta$，其底为 $n-1$ 维平行体，每边的长不超过 $M\delta+2\varepsilon\delta$.

由勒贝格测度的平移不变性，得到

$$m(f(K))\leqslant(M\delta+2\varepsilon\delta)^{n-1}(2\varepsilon\delta)$$

$$=\left[2(M+2\varepsilon)^{n-1}n^{\frac{n}{2}}l^n\right]\frac{\varepsilon}{N^n}\leqslant A\cdot\frac{\varepsilon}{N^n},$$

其中 A 为常数. 这样

$$m(f)(Z_f\cap C))\leqslant N^n m(f(K))<A\varepsilon,$$

由 ε 的任意性，即得 $m(f(Z_f\cap C))=0$. 证毕.

下面，记 $C_0^p(\overline{\Omega})=\{f\mid f\in C^p(\overline{\Omega}),\ \mathrm{supp}f\subset\Omega\}$；对 $u\in C^1(\overline{\Omega})$，记 $\mathrm{div}u=\sum_{i=1}^{n}u_{i,i}$，其中第二个足标"$,i$"表示 $\frac{\partial}{\partial x_i}$；$C^1(X,\mathbb{R}^m)$ 是 X 到 $\mathbb{R}^m$ 的连续可微映射全体；记 $C_0^1(X,\mathbb{R}^m)$ 是支集为紧的 $C^1(X,\mathbb{R}^m)$ 中元素的全体.

引理2 设 $f\in C^2(\Omega)$，$v\in C_0^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$，$\mathrm{supp}v\cap f(\partial\Omega)=\varnothing$，则存在 $u\in C_0^1(\overline{\Omega})$，使得.

$$(\mathrm{div}u)(x)=J_f(x)\cdot(\mathrm{div}v)(f(x)).$$

证 记 J_f 中元 $f_{j,i}$ 的代数余子式为 $A_{ji}(x)$，作

$$u_i(x)=\sum_{j=1}^{n}v_j(f(x))A_{ji}(x),$$

显然，$u\in C_0^1(\overline{\Omega})$，由计算得

$$(\mathrm{div}u)(x)=\sum_{i,j,k=1}^{n}v_{j,k}(f(x))f_{k,i}(x)A_{ji}(x)+\sum_{i,j=1}^{n}v_j(f(x))A_{ji,i}(x).$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n}f_{k,i}A_{ji}=\delta_{kj}J_f,$$

再利用 Hadamard 恒等式

$$\sum_{j=1}^{n}A_{ij,j}=0,\tag{1}$$

即得

$$(\mathrm{div}u)(x)=\sum_{j=1}^{n}v_{j,j}(f(x))J_f(x).$$ 证毕。

注 Hadamard 恒等式(1)的证明：

不失一般性，设 $i=1$，令

$$D_j=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_{j-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{j+1}}\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_{j-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j+1}}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}=(-1)^{j+1}A_{1j},$$

把 D_j 中删去 $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(i=2,\cdots,n)$ 的列，而增加第一列 $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}$ 得到的行

列式记为 E_{jk} .由行列式求导法则,得

$$\frac{\partial}{\partial x_j}D_j=\sum_{k<j}(-1)^{k-1}E_{kj}+\sum_{k>j}(-1)^k E_{jk}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\mathrm{sign}(j-k)E_{jk},$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n}A_{1j,j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\partial}{\partial x_j}D_j=\sum_{j,k=1}^{n}(-1)^{j+k}\mathrm{sign}(j-k)E_{jk},$$

由于 $E_{jk}=E_{kj}$, $\mathrm{sign}(j-k)=-\mathrm{sign}(k-j)$,交换足标 j,k 得

$$\sum_{j=1}^{n}A_{1j,j}=-\sum_{k=1}^{n}A_{1k,k},$$

从而 $\sum_{j=1}^{n}A_{1j,j}=0$. 证毕.

引理 3 设 $f\in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathrm{R})$, $K=\mathrm{supp}f$, $\gamma(s)$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$是 $\mathbb{R}^n$ 中连续曲线,使得 $A=\{k+\gamma(s)\,|\,k\in K, 0\leqslant s\leqslant 1\}\subset\Omega$, 则存在 $v\in C_0^1(\overline{\Omega})$,使

$$(\mathrm{div}v)(x)=f(x-\gamma(0))-f(x-\gamma(1)). \tag{2}$$

证 对 $s,t\in[0,1]$,规定当

$$f(x-\gamma(s))-f(x-\gamma(t))$$

是 $C_0^1(\overline{\Omega})$中某个元的散度时,$s\sim t$. 易见这是一个等价关系. 只要证明每个等价类关于[0,1]是开集, 由[0,1]的连通性即知实际上只有一个等价类,从而证得引理. 对 $s\in[0,1]$,今记

$$K_s=\{k+\gamma(s)\,|\,k\in K\},\ f_s(x)=f(x-\gamma(s)),\ h_t=\gamma(t)-\gamma(s),$$

则 $\mathrm{supp}f_s=K_s$. 因 K_s 是紧集, $\eta=\rho(K_s, \partial\Omega)>0$, 所以存在 $\varepsilon>0$,使得 $|t-s|<\varepsilon$ 时 $|h_t|<\frac{1}{2}\eta$. 这样

$$K'_s=\{k+\theta h_t\,|\,k\in K_s, 0\leqslant\theta\leqslant 1\}\subset\Omega.$$

现在,定义 $F:\overline{\Omega}\to\mathrm{R}$, $v:\overline{\Omega}\to\mathrm{R}^n$ 为

$$F(x):=\int_0^1 f_s(x-\theta h_t)d\theta, v(x)=(F(x))h_t,$$

于是，$v\in C^1(\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^n)$．因为 $x-\theta h_t\bar{\in}K_s$ 时 $f_s(x-\theta h_t)=0$，可知若 $x\bar{\in}\bigcup\limits_{0\leq\theta\leq1}(K_s+\theta h_t)$，则 $F(x)=0$，从而 $\mathrm{supp}F\subset K_\delta^1$，$v\in C_0^1(\overline{\Omega})$．于是

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}v)(x)&=\sum_{i=1}^n h_{ti}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\\&=\int_0^1\sum_{i=1}^n h_{ti}\frac{\partial f_s}{\partial x_i}(x-\theta h_t)d\theta\\&=-\int_0^1\frac{d}{d\theta}f_s(x-\theta h_t)d\theta\\&=f_s(x)-f_s(x-h_t)\\&=f(x-\gamma(s))-f(x-\gamma(t)).\end{aligned}$$

这就证得 s 是等价类的内点．证毕．

5.4.3 C^1 类映射的拓扑度(续)

这一段目的在于消除拓扑度定义中 $p\bar{\in}f(Z_f)$ 的限制，为此，需要把第一段定义的拓扑度表示成积分形式．

定理 1 设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，$p\bar{\in}f(\partial\Omega\cup Z_f)$，$\varphi_\varepsilon:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是连续函数，且满足

$$K_\varepsilon=\mathrm{supp}\varphi_\varepsilon\subset O(0,\varepsilon),\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_\varepsilon(x)dx=1,$$

则存在 ε_0，当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 时

$$\deg(f,\Omega,p)=\int_\Omega\varphi_\varepsilon(f(x)-p)J_f(x)dx. \tag{1}$$

证 设 $f^{-1}(p)=\{a_1,\cdots,a_k\}$．对充分小的 ε_1，可以取到 a_i 在 Ω 中的邻域 O_i 使得，$f(O_i)=O(p,\varepsilon_1)$，$i=1,\cdots,k$，且 $f|_{O_i}$ 是一对

一的，不妨设 ε_1 足够小，使$\left(\bigcup_{i=1}^{k} O_i\right)\cap\partial\Omega=\varnothing$，且 $x\in\bigcup_{i=1}^{k} O_i$ 时 $J_f(x)\neq 0$；再取 $0<\varepsilon_0<\varepsilon_1$，使 $x\in\bar{\Omega}\setminus\bigcup_{i=1}^{k} O_i$ 时，$\|f(x)-p\|>\varepsilon_0$，于是，当 $\varepsilon<\varepsilon_0$ 时

$$\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon(f(\cdot)-p)\subset f^{-1}(O(p,\ \varepsilon_0))\subset\bigcup_{i=1}^{k} O_i,$$

从而

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x)-p)J_f(x)dx=\sum_{i=1}^{k}\int_{O_i}\varphi_\varepsilon(f(x)-p)J_f(x)dx,$$

但 J_f 在每个 O_i 中符号不变，故

$$\begin{aligned}\int_{O_i}\varphi_\varepsilon(f(x)-p)J_f(x)dx&=\operatorname{sign}J_f(a_i)\int_{k_\varepsilon}\varphi_\varepsilon(y)dy\\&=\operatorname{sign}J_f(a_i),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_\Omega\varphi_\varepsilon(f(x)-p)J_f(x)dx&=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sign}J_f(a_i)\\&=\deg(f,\Omega,p).\end{aligned}$$ 证毕.

定理 2 设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，$p_1,p_2$ 在 $R^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的同一连通分支中，而且都不属于 $f(Z_f)$，则

$$\deg(f,\Omega,p_1)=\deg(f,\Omega,p_2).\tag{2}$$

证 (i) 先设 $f\in C^2(\overline{\Omega})$. 若$\mathscr{D}$是 $R^n\setminus f(\partial\Omega)$中含有 p_1,p_2 的连通分支，任取 $\mathscr{D}$ 中的连续曲线 $\gamma(s)\,(0\leqslant s\leqslant 1)$使 $\gamma(0)=p_1$，$\gamma(1)=p_2$. 取 $\varepsilon_1>0$，使得 γ 的 ε_1 邻域含于 $\mathscr{D}$，再取 $\varepsilon<\varepsilon_1$，及相应的 φ_ε，使 $\deg(f,\Omega,p_1)$及 $\deg(f,\Omega,p_2)$均可用(1)式表示. 显然

$$\{z+\gamma(s)\mid z\in\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon,0\leqslant s\leqslant 1\}\subset\mathscr{D},$$

由 5.4.2 引理 3，存在 $v\in C_0^1(\overline{\mathscr{D}})$，使得

$$(\mathrm{div}v)(x)=\varphi_\varepsilon(x-p_1)-\varphi_\varepsilon(x-p_2). \tag{3}$$

因为 $f\in C^2$，$(\mathrm{supp}v)\cap f(\partial\Omega)=\varnothing$，由 5.4.2 引理 2，存在 $u\in C_0^1(\overline{\Omega})$，使

$$(\mathrm{div}u)(x)=J_f(x)(\mathrm{div}v)(f(x)). \tag{4}$$

利用定理 1，由(3)，(4)两式可得

$$\deg(f,\Omega,p_1)=\int_\Omega\varphi_\varepsilon(f(x)-p_1)J_f(x)dx$$

$$=\int_\Omega\varphi_\varepsilon(f(x)-p_2)J_f(x)dx+\int_\Omega J_f(x)(\mathrm{div}v)(f(x))dx$$

$$=\deg(f,\Omega,p_2)+\int_\Omega(\mathrm{div}u)(x)dx=\deg(f,\Omega,p_2).$$

这里，最后一个等式是散度定理：$\mathrm{supp}u\subset\Omega$ 时 $\int_\Omega(\mathrm{div}u)(x)dx=0$ 的结果.

(ii) 设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$. 取 $\{f_n\}\subset C^2(\overline{\Omega})$，使 $\|f_n-f\|_1\to0$. 同上取连续曲线 γ 连接 p_1,p_2，记 $\delta=\rho(\gamma,f(\partial\Omega))$，则 $\delta>0$. 当 $\|f-f_m\|_1<\frac{1}{2}\delta$ 时，有 $\rho(\gamma,f_m(\partial\Omega))\geqslant\frac{1}{2}\delta$. 因此，$p_1$，$p_2$ 不仅属于 $R^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的同一连通分支，而且位于 $R^n\setminus f_m(\partial\Omega)$ 的同一分支. 利用定理 1 及(i)中证得的结果，即得

$$\deg(f,\Omega,p_1)=\deg(f_m,\Omega,p_1)-\deg(f_m,\Omega,p_2)$$

$$=\deg(f,\Omega,p_2). \quad 证毕.$$

现在，我们可以引入如下定义

定义 设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$. 任取 $q\overline{\in}f(Z_f)$，使得 $\|p-q\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$，规定

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,q).$$

注意：由 Sard 定理，对任意的 $r>0$，$O(p,r)\setminus f(Z_f)\neq\varnothing$. 又显然可见 $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 中包含 p 的连通分支包含球 $O(p,\rho(p,f(\partial\Omega)))$，从而由定理 2，对满足 $q\overline{\in}f(Z_f)$ 及 $\|q-p\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$

的 q, $\deg(f,\Omega,q)$ 取值相同.

在进一步把拓扑度的概念推广到连续映射之前，还需要讨论 C^1 类映射拓扑度的若干性质.

定义 $C^1(\overline{\Omega})$ 中函数 f 和 g 的一个 C^1 同伦是指映射 H: $\overline{\Omega}\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$, 这里, $H_t: x\longmapsto H(x,t)$ 满足 $H_t\in C^1(\overline{\Omega})(0\leqslant t\leqslant 1)$, $H_0=f$, $H_1=g$ 且 $s\to t$ 时 $\|H_t-H_s\|_1\to 0$.

定理 3 设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$, 则

(1) $\deg(f,\Omega,\cdot)$ 在 $R^n\backslash f(\partial\Omega)$ 的每个连通分支上均为常数;

(2) 如果 $p\notin f(\partial\Omega)$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\|f-g\|_1<\varepsilon$ 时

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p).$$

(3) 设 $H(x,t)$ 是 f 和 g 之间的 C^1 同伦, 且 $p\notin H(\partial\Omega,t)$ $(\forall t\in[0,1])$, 则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p).$$

证 (1) 由定理 1 及 C^1 类映射拓扑度的定义即得.

(2) 记 $\eta=\rho(p,f(\partial\Omega))$. 由 Sard 定理, 可以取到 q, 使得 $\|q-p\|<\frac{1}{2}\eta$, $q\notin f(Z_f)$. 再由定理 1, 取 $\varepsilon<\frac{1}{2}\eta$, 使得 $\|f-g\|_1<\varepsilon$ 时 $q\notin g(Z_g)$, 且 $\deg(f,\Omega,q)=\deg(g,\Omega,q)$. 如果 $x\in\partial\Omega$, 则

$$\|p-g(x)\|\geqslant\|p-f(x)\|-\|f(x)-g(x)\|>\frac{1}{2}\eta,$$

因此, p 和 q 既在 $\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$ 的同一分支中, 也在 $\mathbf{R}^n\backslash g(\partial\Omega)$ 的同一分支中, 从而成立着

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,p)&=\deg(f,\Omega,q)=\deg(g,\Omega,q)\\&=\deg(g,\Omega,p).\end{aligned}$$

(3) 由(2)可知, 整数值函数 $\deg(H_t,\Omega,p)$ 是$[0,1]$上定义的连续函数, 故必为常数. 证毕.

5.4.4 连续映射的拓扑度

设 $f\in C(\overline{\Omega})$, $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$. 记 $\eta=\rho(p, f(\partial\Omega))$. 对 $g_1, g_2\in C^1(\overline{\Omega})$, 当 $\|f-g_i\|<\eta$ 时, 考察 g_1,g_2 的 C^1 同伦

$$H_t(x)=tg_1(x)+(1-t)g_2(x),\ (x\in\overline{\Omega},0\leqslant t\leqslant 1)$$

易见, 对 $t\in[0,1]$, $p\overline{\in}H_t(\partial\Omega)$. 由 5.4.3 定理 3 的(3)可知

$$\deg(g_1,\Omega,p)=\deg(g_2,\Omega,p).$$

由此, 我们引入如下定义

定义 设 $f\in C(\overline{\Omega})$, $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$, 取 $g\in C^1(\overline{\Omega})$, 使得 $\|f-g\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$, 规定

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p),$$

称为 f 在 p 点关于 Ω 的**Brouwer 拓扑度**.

注意, 在上述定义中, 可以取到 g, 使 $p\overline{\in}g(Z_g)$.

实际上, 如记 $\eta=\rho(p,f(\partial\Omega))$, 先取 $h\in C'(\overline{\Omega})$, 使 $\|f-h\|<\frac{1}{2}\eta$, 于是 $\rho(p, h(\partial\Omega))>\frac{1}{2}\eta$, 再取 q, 使得 $\|p-q\|<\frac{1}{2}\eta$, $q\overline{\in}h(Z_h)$. 令 $g(x)=h(x)+p-q$, 便有

$$\|f-g\|\leqslant\|f-h\|+\|p-q\|<\eta.$$

这样, $g(x)=p$, 当且仅当 $h(x)=q$, 对这样的 x, $J_g(x)=J_h(x)\neq 0$, 因而 $p\overline{\in}g(Z_g)$.

为了说明上面的结果适用于任何有限维赋范线性空间, 只要证明下述定理.

定理 1 设 $f\in C(\overline{\Omega})$, $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$, 则在坐标的非奇异 C^1 变换下, $\deg(f,\Omega,p)$ 不变.

证 设坐标变换由 C^1 类双射 φ 给出, $\varphi:\varphi^{-1}(\overline{\Omega})\to\overline{\Omega}$, J_φ 与 $J_{\varphi^{-1}}$ 处处不为 0. 用 y 记新的坐标变量, 又记

$$f^*(y)=\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi(y),$$

由复合函数求导法则，当 $f\in C^1(\overline{\Omega})$时

$$(f^*)'(y)=(\varphi^{-1})'(f(\varphi(y)))\circ f'(\varphi(y))\circ\varphi'(y).$$

因此，若记 $x=\varphi(y)$，由于 $J_{\varphi^{-1}}, J_\varphi$ 同号，所以

$$\operatorname{sign}J_{f^*}(y)=\operatorname{sign}J_f(x).$$

由定义即得 $p\overline{\in}f(Z_f)$时，

$$\deg(f^*,\varphi^{-1}(\overline{\Omega}),\varphi^{-1}(p))=\deg(f,\Omega,p).$$

对 $f\in C(\overline{\Omega})\backslash C^1(\overline{\Omega})$及 $p\in f(Z_f)$，只要取适当的 $g\in C^1(\overline{\Omega})$及 $q\overline{\in}f(Z_f)$分别逼近 f 与 p 即可. 证毕.

5.4.5 Brouwer 度的性质

先建立两个引理.

引理 1 设 $f\in C(\overline{\Omega}), p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，如果$\|f-g\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$，那末

$$\deg(g,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p). \tag{1}$$

证 由条件可知 $p\overline{\in}g(\partial\Omega)$，故 $\deg(g, \Omega, p)$ 有意义. 取 $k\in C^1(\overline{\Omega})$，使得

$$\|k-g\|+\|g-f\|<\rho(p,f(\partial\Omega)),$$

于是，$\|k-f\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$. 由定义即得 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(k,\Omega,p)$，又由于 $\rho(p,f(\partial\Omega))\leqslant\rho(p,g(\partial\Omega))+\|f-g\|$，所以

$$\|k-g\|<\rho(p,g(\partial\Omega)),$$

从而还有 $\deg(g, \Omega, p)=\deg(k, \Omega, p)$. 从而，当$\|f-g\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$时，成立着

$$\deg(g,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p).$$ 证毕.

引理 2 在 $\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$的连通分支上，$\deg(f,\Omega,\cdot)$是常数.

证 设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$的一个连通分支，$p_1, p_2\in\mathscr{D}$. 取 $\mathscr{D}$ 中的道路 $\gamma(s)$，$0\leqslant s\leqslant1$，γ 连接 p_1 和 p_2，再取 $g\in C^1(\overline{\Omega})$ 使得

$\|f-g\|<\rho(\gamma[0,1]),f(\partial\Omega))$，于是 $\deg(f,\Omega,p_i)=\deg(g,\Omega,p_i)$ $(i=1,\ 2)$，但 p_1，p_2 位于 $\mathbb{R}^n\backslash g(\partial\Omega)$ 的同一连通分支之中，由 5.4.3 定理 3 的(1)，得到 $\deg(g,\Omega,p_1)=\deg(g,\Omega,p_2)$，所以

$$\deg(f,\Omega,p_1)=\deg(f,\Omega,p_2).$$ 证毕.

我们再叙述一般的同伦概念.

定义 如果 X 和 Y 是两个拓扑空间，连续映射 $f,g:X\to Y$ 称之为**同伦的**，记做 $f\sim g$，是指存在连续映射 $H:[0,\ 1]\times X\to Y$，使得

$$H(0,x)=f(x),H(1,x)=g(x)$$

对一切 $x\in X$ 成立. 此时，也称 H 为 f 和 g 之间的一个**同伦或同伦变换**.

现在来证明关于 Brouwer 度性质的基本定理.

定理 1 设 $f\in C(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，$\deg(f,\Omega,p)$ 具有下列性质：

(D_1) 标准性： 若 $p\in\Omega$，则 $\deg(I,\Omega,p)=1$；

(D_2) 可加性： 若 Ω_1，Ω_2 是含于 Ω 中的两个互不相交的开子集，$p\overline{\in}f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{i=1}^{2}\deg(f,\Omega_i,p) \tag{2}$$

(D_3) 同伦不变性： 若 $h_t\ (0\leqslant t\leqslant1)$ 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的一个同伦，$p_t\ (0\leqslant t\leqslant1)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一条连续曲线，$p_t\overline{\in}h_t(\partial\Omega)\ (0\leqslant t\leqslant1)$，则 $\deg(h_t,\Omega,p_t)$ 恒为常数。

证 (D_1) 由定义即得.

今证 (D_2)：取 $g\in C^1(\overline{\Omega})$，使 $p\overline{\in}g(Z_g)$，且

$$\|f-g\|<\rho(p,f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)),$$

因为 $\partial\Omega_i\subset\overline{\Omega}$，所以 $\partial\Omega_i\subset\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)\ (i=1,\ 2)$，于是，$p\overline{\in}g(\partial\Omega_i)$，且 $x\in\overline{\Omega}_i$ 时

$$\|f(x)-g(x)\|<\rho(p,f(\partial\Omega_i))\quad(i=1,2),$$

故而 $\deg(f,\Omega_i,p)=\deg(g,\Omega_i,p)$ 对 $i=1,2$ 成立. 于是,

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)=\sum_{x\in g^{-1}(p)}\mathrm{sign}J_g(x)$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\sum_{x\in g^{-1}(p)\cap\Omega_j}\mathrm{sign}J_g(x)$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\deg(g,\Omega_j,p)$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\deg(f,\Omega_j,p).$$

再证 (D_3): 考察 $[0,1]$ 上定义的整数值函数 $t\longmapsto\deg(h_t,\ \Omega,\ p_t)$. 今证这个函数在 $[0,\ 1]$ 上连续. 实际上, 对 $t_0\in[0,\ 1]$, 取 $\delta_1>0$, 使 $|t-t_0|<\delta_1$ 时, p_t 与 p_{t_0} 在 $\mathbf{R}^n\backslash h_{t_0}(\partial\Omega)$ 的同一连通分支上, 由引理 2 得

$$\deg(h_{t_0},\Omega,p_{t_0})=\deg(h_{t_0},\Omega,p_t).\tag{3}$$

记 $\eta=\rho(p_{t_0},h_{t_0}(\partial\Omega))$, 取 $\delta_2>0$, 使 $|t-t_0|\leqslant\delta_2$ 时 $\rho(p_t,h_{t_0}(\partial\Omega))>\frac{1}{2}\eta$, 再取正数 $\delta_3\leqslant\delta_2$, 使 $|t-t_0|\leqslant\delta_3$ 时 $\|h_t-h_{t_0}\|\leqslant\frac{1}{2}\eta$, 此时, 由引理 1

$$\deg(h_t,\Omega,p_t)=\deg(h_{t_0},\Omega,p_t).\tag{4}$$

设 $\delta=\min(\delta_1,\delta_3)$, 由(3), (4)可知, 当 $|t-t_0|\leqslant\delta$ 时

$$\deg(h_t,\Omega,p_t)=\deg(h_{t_0},\Omega,p_{t_0}),$$

但是, $[0,1]$ 上的连续整数值函数必是常数, 这就是 (D_3). 证毕.

由定理 1 可以得到 Brouwer 度的一系列性质.

系 1 (**切除定理**) 设 $f\in C(\overline{\Omega})$, $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$, 闭集 $K\subset\overline{\Omega}$, 且 $p\overline{\in}f(K)$, 则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega\backslash K,p).\tag{5}$$

证 在 (D_2) 中取 $\Omega_1=\Omega$, $\Omega_2=\varnothing$ 即得 $\deg(f,\ \varnothing,\ p)=0$. 再在

(D_2)中取 $\Omega_1=\Omega\backslash K, \Omega_2=\varnothing$，得到

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,p)&=\deg(f,\Omega\backslash K,p)+\deg(f,\varnothing,p)\\&=\deg(f,\Omega\backslash K,p).\end{aligned}$$

系 2（区域分解）　设 $f\in C(\overline{\Omega}), p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，如 $\Omega=\bigcup\Omega_i$，其中 $\{\Omega_i\}$是有限个互不相交的开集，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_i\deg(f,\Omega_i,p). \tag{6}$$

证　由(D_2)递推即得.

系 3（Kronecker 存在定理）　设 $f\in C(\overline{\Omega}), p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，而且 $\deg(f,\Omega,p)\neq 0$，则存在 $q\in\Omega$，使得 $f(q)=p$.

证　在(D_2)中取 $\Omega_1=\Omega_2=\varnothing$，即得 $p\overline{\in}f(\overline{\Omega})$时$\deg(f,\Omega,p)=0$，因此，$\deg(f,\Omega,p)\neq 0$ 时，$p\in f(\overline{\Omega})$，但 $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，故 $p\in f(\Omega)$.

系 4（Poincaré-Bohl 定理）　设 $f, g\in C(\overline{\Omega})$，对任意的 $x\in\Omega$，线段 $tf(x)+(1-t)g(x)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$不包含 p，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p). \tag{7}$$

证　取 $h_t(x)=tf(x)+(1-t)g(x)\quad(x\in\overline{\Omega}, 0\leqslant t\leqslant 1), p_t\equiv p\ (0\leqslant t\leqslant 1)$，由$(D_3)$即得.

由系 4 又可得到

系 5（边界值性质）　设 $f,g\in C(\overline{\Omega})$，且在 $\partial\Omega$ 上 $f=g$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，则 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$.

系 6　设$f\in C(\overline{\Omega}), p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，则对任何 $q\in\mathbf{R}^n$，

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-q,\Omega,p-q). \tag{8}$$

证　取　$h_t(x)=f(x)-tq\quad(x\in\overline{\Omega},\ 0\leqslant t\leqslant 1),\quad p_t=p-tq\ (0\leqslant t\leqslant 1)$，利用$(D_3)$即得.

由于切除定理，我们可以对 $f(x)=p$ 的孤立解引进指标的概念.

设$f\in C(\overline{\Omega})$，$x_0$是$\{x|f(x)=p\}$的孤立点．设$\mathscr{U}$是$x_0$的与$\{x|f(x)=p\}\setminus\{x_0\}$的交为空的开邻域全体．由切除定理可见，$U_1,U_2\in\mathscr{U}$时，$U_1\cup U_2\in\mathscr{U}$，$\deg(f,U_1,p)=\deg(f,U_1\cup U_2,p)=\deg(f,U_2,p)$．由此，规定方程$f(x)=p$的孤立解$x_0$的指标为

$$i(f,x_0,p)=\deg(f,U,p),U\in\mathscr{U}.$$

定理 2 (1) 设$f\in C(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，$f^{-1}(p)$为有限集，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{a\in f^{-1}(p)}i(f,a,p). \tag{9}$$

(2) 设$f\in C^1(\Omega)$，$a\in f^{-1}(p)$，$J_f(a)\neq 0$，则$i(f,a,p)=(-1)^\nu$，这里ν是$f'(a)$的负特征值按其代数重数计算的个数．

证 (1) 设$f^{-1}(p)=\{a_1,\cdots,a_k\}$，$N_i(i=1,\cdots,k)$为$a_i$的互不相交的邻域，$\deg(f,N_i,p)=i(f,a_i,p)$．由可加性$(D_2)$及切除定理易知(1)的结论．

(2) 由假设，线性算子$f'(a)$可逆．设$f'(a)$的特征值全体为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则$J_f(a)=\lambda_1\cdots\lambda_n$．由于复共轭特征值成对出现，所以

$$\mathrm{sign}J_f(a)=(-1)^\nu,$$

从而$i(f,a,p)=\mathrm{sign}J_f(a)=(-1)^\nu$．证毕．

下面，我们来研究复合映射$g\circ f$的拓扑度与f，g的拓扑度的关系．先引入一个记号．由引理 2，在$\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$的连通子集$A$上，$\deg(f,\Omega,\cdot)$是常数，今后用$\deg(f,\Omega,A)$来表示$\deg(f,\Omega,p)$ $(p\in A)$．

定理 3 (乘积定理) 设$f\in C(\overline{\Omega})$，$D$是包含$f(\overline{\Omega})$的有界开集，$\Delta=D\setminus f(\partial\Omega)$，$\Delta_i(i=1,2,\cdots)$是$\Delta$的诸连通分支．如果$g\in C(\overline{D})$，$p\overline{\in}g(f(\partial\Omega))\cup g(\partial D)$，则

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\sum_j\deg(g,\Delta_j,p)\deg(f,\Omega,\Delta_j). \tag{10}$$

证 由于紧集$g^{-1}(p)$被互不相交的开集Δ_i所覆盖，所以只有

有限个 Δ_i 含有 $g^{-1}(p)$ 的点，由 Kronecker 存在定理，(10)式右端实际上只有有限项.

对任意的 i，$\partial\Delta_i\subset\partial\Delta\subset\partial D\cup f(\partial\Omega)$，由假设可知 $p\overline{\in}g(\partial\Delta_i)$，所以 $\deg(g,\Delta_i,p)$ 是有确定意义的.

(a) 记 $W_k=\{y\in D|\deg(f,\Omega,y)=k\}$，显然，

$$W_k=\bigcup\{\Delta_i|\deg(f,\Omega,\Delta_i)=k\},\tag{11}$$

(10)的右端可以改写为

$$\begin{aligned}&\sum_j\deg(g,\Delta_j,p)\deg(f,\Omega,\Delta_j)\\&=\sum_k\sum_{\{j|\Delta_j\subset W_k\}}\deg(g,\Delta_j,p)\deg(f,\Omega,\Delta_j)\\&=\sum_k k\cdot\deg(g,W_k,p).\end{aligned}\tag{12}$$

由前面的说明可知，这里的和式仅含有限项，最后一个等式成立是定理 1 系 2 的结果.

(b) 因为 $p\overline{\in}g\circ f(\partial\Omega)$，所以 $g^{-1}(p)$ 与 $f(\partial\Omega)$ 互不相交，取 $\hat{f}\in C^1(\overline{\Omega})$，使得

$$\|f(x)-\hat{f}(x)\|<\rho(g^{-1}(p),f(\partial\Omega)),\quad x\in\overline{\Omega},\tag{13}$$

所以

$$\deg(f,\Omega,y)=\deg(\hat{f},\Omega,y),\ y\in g^{-1}(p).\tag{14}$$

记 $\hat{W}_k=\{y\in D|\deg(\hat{f},\Omega,y)=k\}$，于是

$$\begin{aligned}g^{-1}(p)\cap W_k&=\{\deg(f,\Omega,y)=k|y\in g^{-1}(p)\}\\&=\{\deg(\hat{f},\Omega,y)=k|y\in g^{-1}(p)\}\\&=g^{-1}(p)\cap\hat{W}_k.\end{aligned}$$

因此 $g^{-1}(p)\cap(W_k\cup\hat{W}_k)\subset W_k\cap\hat{W}_k$，由切除定理便得

$$\begin{aligned}\deg(g,W_k,p)&=\deg(g,W_k\cap\hat{W}_k,p)\\&=\deg(g,\hat{W}_k,p).\end{aligned}\tag{15}$$

再取 $\hat{g}\in C^1(\bar{D})$，使得 $p\overline{\in}(\hat{g}\circ\hat{f})(Z_{\hat{g}\circ\hat{f}})$，且

$$\|\hat{g}(x)-g(x)\|<\rho(p,g(\partial D)\cup g\circ\hat{f}(\partial\Omega)),\forall x\in\bar{D} \tag{16}$$

这样，$p\bar{\in} g\circ\hat{f}(\partial\Omega)$．由于 $\partial\hat{W}_k\subset\hat{f}(\partial\Omega)\cup\partial D$，故而 $g(\partial\hat{W}_k)\subset g\circ\hat{f}(\partial\Omega)\cup g(\partial D)$，由(16)即得 $x\in\bar{D}$ 时

$$\|\hat{g}(x)-g(x)\|<\rho(p,g(\partial\hat{W}_k)),$$

从而

$$\deg(g,\hat{W}_k,p)=\deg(\hat{g},\hat{W}_k,p). \tag{17}$$

由(12)，(15)，(17)得到

$$\sum_j\deg(g,\Delta_j,p)\deg(f,\Omega,\Delta_j)=\sum_k k\deg(\hat{g},\hat{W}_k,p). \tag{18}$$

(c) 现在证明

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\deg(\hat{g}\circ\hat{f},\Omega,p). \tag{19}$$

令 $f_t(x)=(1-t)f(x)+t\hat{f}(x)\quad(x\in\bar{\Omega},0\leqslant t\leqslant1)$，考察同伦 $g\circ f_t$．由(13)可知 $\rho(g^{-1}(p),f_t(\partial\Omega))>0(0\leqslant t\leqslant1)$，因此 $p\bar{\in} g\circ f_t(\partial\Omega)$，由$(D_3)$得到

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\deg(g\circ\hat{f},\Omega,p). \tag{20}$$

再考察同伦 $g_t\circ\hat{f}=((1-t)g+t\hat{g})\circ\hat{f}\quad(0\leqslant t\leqslant1)$，类似上述推理，得 $p\bar{\in} g_t\circ\hat{f}(\partial\Omega)$，且

$$\deg(g\circ\hat{f},\Omega,p)=\deg(\hat{g}\circ\hat{f},\Omega,p). \tag{21}$$

由(20)，(21)即得(19)．

(d) 为完成定理的证明，由(b)、(c)可知，只要导出

$$\sum_k k\deg(\hat{g},\hat{W}_k,p)=\deg(\hat{g}\circ\hat{f},\Omega,p) \tag{22}$$

即可．注意到 $\hat{f}\in C^1(\bar{\Omega})$，$\hat{g}\in C^1(\bar{D})$，$p\bar{\in}\hat{g}\circ\hat{f}(\partial\Omega)\cup\hat{g}(\partial\hat{W}_k)$，$p\bar{\in}(\hat{g}\circ\hat{f})(Z_{\hat{g}\circ\hat{f}})$，因此可由 C^1 类映射拓扑度的定义直接计算．为方便起见，以下略去符号"∧"．

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\sum_{x\in f^{-1}(g^{-1}(p))}\operatorname{sign}[J_g(f(x))J_f(x)]$$

$$= \sum_{y \in g^{-1}(p)} \operatorname{sign} J_g(y) \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_f(x)$$

$$= \sum_{y \in g^{-1}(p)} \operatorname{sign} J_g(y) \deg(f, \Omega, y)$$

$$= \sum_k \sum_{y \in g^{-1}(p) \cap W_k} k \operatorname{sign} J_g(y)$$

$$= \sum_k k \deg(g, W_k, p).$$ 证毕.

§5.5　Leray-Schauder 度

人们自然希望把有限维空间上连续映射拓扑度的理论推广到无穷维空间. 遗憾的是,早在 1936 年, J. Leray 已举出反例说明对无穷维赋范空间的连续映射,一般无法定义具有性质 (D_1), (D_2), (D_3) 的拓扑度.

本节讨论形如 $I-T$ 的映射,其中 I 是恒等映射, T 为全连续映射,并用有限维逼近的办法,对这类映射建立拓扑度的理论.

5.5.1　全连续映射

定义　设 X, Y 是实赋范线性空间, $\Omega \subset X$, 如果映射 $T: \Omega \to Y$ 是连续的,且对 Ω 中的任何有界子集 A, $\overline{T(A)}$ 是 Y 中的紧集,则称 T 是**全连续映射**.

在线性泛函分析中, P. Enflo 构造出一个紧线性算子,它不能用有限秩线性算子一致逼近. 但是,对非线性映射,仍然有如下结果.

定理 1　设 X, Y 是实赋范线性空间,有界集 $\Omega \subset X$, $T: \Omega \to Y$ 为全连续. 对任何 $\varepsilon > 0$, 必存在连续映射 $T_\varepsilon: \Omega \to Y$, 使 $T_\varepsilon(\Omega)$ 是有限维空间,且

$$\|Tx-T_\varepsilon x\|<\varepsilon \quad (x\in\Omega).$$

证 因为$\overline{T\Omega}$是紧集，故必存在有限个 $v_i\in\overline{T\Omega}$，$i=1,\cdots,N$，使得$\overline{T\Omega}\subset\bigcup_{i=1}^{N}O(v_i,\varepsilon)$. 对 $i=1,\cdots,N,x\in\Omega$,规定

$$m_i(x;\varepsilon)=\max\{0,\varepsilon-\|Tx-v_i\|\},$$

m_i 是 x 的连续函数，且对固定的 x，必有某 $m_i(x;\varepsilon)>0$. 记 $m(x;\varepsilon)=\sum_{i=1}^{N}m_i(x;\varepsilon)$，作算子

$$T_\varepsilon x=\frac{1}{m(x;\varepsilon)}\sum_{i=1}^{N}m_i(x;\varepsilon)v_i,$$

则 T_ε 是连续映射，$T_\varepsilon\Omega$ 被包含在由 $v_1,\cdots,v_N$ 张成的有限维空间之中. 注意到$\frac{1}{m(x;\varepsilon)}\sum_{i=1}^{N}m_i(x;\varepsilon)=1$，且仅当 $\|Tx-v_i\|<\varepsilon$ 时 $m_i(x;\varepsilon)\neq 0$，所以有 $x\in\Omega$ 时

$$\|Tx-T_\varepsilon x\|=\left\|\frac{1}{m(x;\varepsilon)}\sum_{i=1}^{N}m_i(x;\varepsilon)(T_x-v_i)\right\|<\varepsilon.$$

证毕.

设 $\Omega\subset X$，用 $K(\Omega)$记Ω到X的全连续映射全体.

定义 设 $\Omega\subset X$，映射 $h:[0,1]\to K(\Omega)$，如果对任意给定的$\varepsilon>0$ 和Ω的有界子集 A，必存在 $\delta=\delta(\varepsilon,A)>0$，使得

$$\|(h(t))(x)-(h(s))(x)\|<\varepsilon \quad (x\in A,\ |t-s|<\delta),$$

则称 h 是Ω上的**紧同伦**.

紧同伦的概念将用于 Leray-Schauder 度性质的讨论.

5.5.2 Leray-Schauder 度的定义

为了定义 Leray-Schauder 度，需要借助于 Brouwer 度的简化性质，它反映的是如何将高维空间的拓扑度转化为低维空间的

拓扑度.

下面，对 $m<n$，把 $\mathbb{R}^m$ 视为 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_{m+1}=\cdots=x_n=0\}$.

引理 1(**简化定理**)　设 $m\leqslant n$，Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开子集，φ 是 $\overline{\Omega}$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的连续映射，映射 $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ 为

$$f(x)=x+\varphi(x),\ x\in\overline{\Omega}$$

记 $\Omega^m=\mathbb{R}^m\cap\Omega$，$g=f|_{\mathbb{R}^m\cap\overline{\Omega}}$，如果 $p\in\mathbb{R}^m\setminus f(\partial\Omega)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega^m,p). \tag{1}$$

证　如 $\Omega^m=\varnothing$，$p\overline{\in}f(\overline{\Omega})$，则(1)式两边均为零. 设 $\Omega^m\neq\varnothing$，$g:\overline{\Omega^m}\to\mathbb{R}^m$. 因 $\partial(\mathbb{R}^m\cap\Omega)\subset\mathbb{R}^m\cap\partial\Omega$，因此 $p\overline{\in}g(\partial\Omega^m)$，从而(1)式右边有定义. 如果 $f(x)=p$，那末 $x=p-\varphi(x)\in\mathbb{R}^m$，于是 $f^{-1}(p)\subset\Omega^m$，从而 $g^{-1}(p)=f^{-1}(p)$.

先考察 $\varphi\in C^1$，$p\overline{\in}g(Z_g)$ 的情况. 此时

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\operatorname{sign}J_f(x).$$

注意到

$$\begin{aligned}J_f(x)&=\det(f'(x))\\&=\det\begin{pmatrix}g'(x) & \\ * & I_{n-m}\end{pmatrix}=J_g(x),\end{aligned}$$

因此，

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{x\in g^{-1}(p)}\operatorname{sign}J_g(x)=\deg(g,\Omega^m,p).$$

对一般的 φ，取 $\hat{\varphi}_j\in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ $(j=1,\cdots,m)$，$\hat{\varphi}_j=0$ $(j=m+1,\cdots,n)$ 使得 $\hat{\varphi}=(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2,\cdots,\hat{\varphi}_n)$ 满足

$$\|\hat{\varphi}(x)-\varphi(x)\|<\rho(p,f(\partial\Omega)),\ x\in\overline{\Omega},$$

记 $\hat{f}(x)=x+\hat{\varphi}(x)$，得

$$\|\hat{f}(x)-f(x)\|<\rho(p,f(\partial\Omega)),\ x\in\overline{\Omega}, \tag{2}$$

设 $\hat{g}=\hat{f}|_{\overline{\Omega}^m}$. 因为 $\hat{f}^{-1}(p)\subset\Omega^m$，$m(\hat{g}(Z_{\hat{g}}))=0$，故只要对 $\hat{\varphi}$ 作微

小平移，除了(2)式成立外还可要求

$$p\overline{\in}g(Z_{\hat{g}}),$$

因此，$\deg(f,\Omega,p)=\deg(\hat{f},\Omega,p)$. 由前半部分的证明即得定理结论. 证毕.

现在逐步来定义 Leray-Schauder 度. 以下设X是赋范线性空间，Ω是X中的有界开子集，$f:\overline{\Omega}\to X$ 形为 $f=I-T$，其中T为全连续，设 $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$.

记 $r=\rho(p,f(\partial\Omega))$. 先证 $r>0$.

若不然，存在$\{x_n\}\subset\partial\Omega$，使 $f(x_n)\to p(n\to\infty)$. 由T的紧性，$\{Tx_n\}$有收敛子列，不妨设即是$\{Tx_n\}$自身. 若 $Tx_n\to y$，则 $y\in\overline{T\Omega}$，且 $x_n=Tx_n+f(x_n)\to y+p$，因而 $y+p\in\partial\Omega$. 但由连续性，$y=\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=T(y+p)$，所以 $f(y+p)=p$，$p\in f(\partial\Omega)$，这是矛盾.

其次，取ε，使$0<\varepsilon<r$. 由 5.5.1 定理 1，存在值域为有限维的映射 $T_\varepsilon:\overline{\Omega}\to X$，使得

$$\|Tx-T_\varepsilon x\|<\varepsilon,x\in\overline{\Omega}.$$

记 $L_\varepsilon=\mathrm{span}\{T_\varepsilon(\overline{\Omega}),p\}$，$\Omega_\varepsilon=\Omega\cap L_\varepsilon$，

$$f_\varepsilon(x)=x-T_\varepsilon(x),x\in\overline{\Omega}$$

于是，Ω_ε是L_ε中的有界开子集，$\partial_\varepsilon\Omega_\varepsilon\subset\partial\Omega$，这里$\partial_\varepsilon\Omega_\varepsilon$是$\Omega_\varepsilon$在$L_\varepsilon$中的边界. 易见 $f_\varepsilon(\overline{\Omega}_\varepsilon)\subset L_\varepsilon$，当 $x\in\partial\Omega$ 时

$$\|x-T_\varepsilon(x)-p\|\geqslant\|x-T(x)-p\|-\|T(x)-T_\varepsilon(x)\|$$
$$>r-\varepsilon>0,$$

因而 $\deg(f_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)$有意义. 如 $\Omega_\varepsilon=\varnothing$，则$\deg(f_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)=0$.

下面的引理 2 将证明 $\deg(f_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)$与$\varepsilon$无关，由此可以引入如下概念.

定义 设X为实赋范线性空间，Ω是X中有界开子集，$f=I-T$，其中 $T:\overline{\Omega}\to X$ 为全连续，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，对任何 $0<\varepsilon<\rho(p,f$

$(\partial\Omega))$，设 $T_\varepsilon: \overline{\Omega}\to X$ 是值域为有限维的映射，

$$\|Tx-T_\varepsilon x\|<\varepsilon,\quad x\in\overline{\Omega},$$

记 $L_\varepsilon=\mathrm{span}\{T_\varepsilon(\overline{\Omega}),p\}$，$\Omega_\varepsilon=\Omega\cap L_\varepsilon$，$f_\varepsilon=I-T_\varepsilon$，规定

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p). \tag{3}$$

引理 2　$\deg(f,\Omega,p)$ 的值与 T_ε 的取法无关.

证　设 T_ε，T_η 是满足定义要求的两个值域为有限维的映射，相应地规定 $L_\varepsilon, L_\eta, \Omega_\varepsilon, \Omega_\eta, f_\varepsilon, f_\eta$ 如上，令 $L_\mu=\mathrm{span}\{L_\varepsilon,L_\eta\}$，$\Omega_\mu=\Omega\cap L_\mu$. 由引理 1，得

$$\left.\begin{aligned}\deg(f_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)=\deg(f_\varepsilon,\Omega_\mu,p),\\ \deg(f_\eta,\Omega_\eta,p)=\deg(f_\eta,\Omega_\mu,p),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

考察同伦

$$h_t(x)=tf_\varepsilon(x)+(1-t)f_\eta(x),\ x\in\overline{\Omega}_\mu,\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

则有

$$\begin{aligned}\|h_t(x)-f(x)\|&\leqslant t\|f_\varepsilon(x)-f(x)\|+(1-t)\|f_\eta(x)-f(x)\|\\ &<t\varepsilon+(1-t)\eta<\rho(p,f(\partial\Omega)),\end{aligned}$$

故当 $x\in\partial\Omega_\mu$ 时

$$\|h_t(x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|f(x)-h_t(x)\|>0,$$

从而

$$\deg(f_\varepsilon,\Omega_\mu,p)=\deg(f_\eta,\Omega_\mu,p),$$

由此及(4)即得引理结论. 证毕.

5.5.3　Leray-Schauder 度的性质

现在证明 Leray-Schauder 度保持 Brouwer 度的基本性质.

定理 1　设 X 为实赋范线性空间，Ω 是 X 中的有界开子集，$f=I-T$，其中 $T:\overline{\Omega}\to X$ 为全连续，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，那末，$\deg(f,\Omega,p)$ 具有如下性质：

(D_1) 标准性　若 $p\in\Omega$，则 $\deg(I,\Omega,p)=1$；

(D_2)可加性 若 Ω_1, Ω_2 为Ω中的互不相交的开子集, $p\overline{\in}f(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$, 则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p) \tag{1}$$

(D_3)紧同伦不变性 设h是Ω上的紧同伦, $f_t=I-h(t)$, p_t: $[0,1]\to X$ 连续, $p_t\overline{\in}f_t(\partial\Omega)$, 则 $\deg(f_t,\Omega,p_t)$与 t 无关.

证 (D_1)是显然的.

证(D_2) 记 $\Omega_0=\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)$, 则 $p\overline{\in}f(\Omega_0)$, 且 Ω_0 是闭集. 今证 $f(\Omega_0)$是闭集. 设$y_n\in f(\Omega_0)$, $y_n\to y_0(n\to\infty)$. 取 $x_n\in\Omega_0$, 使 $y_n=f(x_n)$, 即 $y_n=(I-T)x_n$. $\{Tx_n\}$有收敛子列, 不妨设为自身, 即设 $Tx_n\to y_1$, 于是 $x_n\to y_0+y_1$. 但 Ω_0 是闭集, 从而 $y_0+y_1\in\Omega_0$, 由 f 的连续性得 $y_0=f(y_0+y_1)\in f(\Omega_0)$.

由于 $p\overline{\in}f(\Omega_0)$, 因而存在 $\varepsilon>0$, 使

$$\inf_{x\in\Omega_0}\|f(x)-p\|>\varepsilon.$$

取值域为有限维的映射 T_ε, 使

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}\|Tx-T_\varepsilon x\|<\varepsilon.$$

再取 L_ε, f_ε 如定义所述. 注意到 $p\overline{\in}\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$, 由拓扑度定义即得

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f_\varepsilon,\Omega\cap L_\varepsilon,p),$$

$$\deg(f,\Omega_i,p)=\deg(f_\varepsilon,\Omega_i\cap L_\varepsilon,p)\quad(i=1,2),$$

由 Brouwer 度的可加性及 $p\overline{\in}f(\Omega_0\cap L_\varepsilon)$, 得

$$\deg(f_\varepsilon,\Omega\cap L_\varepsilon,p)=\deg(f_\varepsilon,\Omega_1\cap L_\varepsilon,p)+\deg(f_\varepsilon,\Omega_2\cap L_\varepsilon,p),$$

因此

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p).$$

证(D_3) 由定义易见, 若令 $g(x)=f(x)-p$, 则 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,0)$, 因此, 不妨设 $p_t\equiv p$.

我们断言存在 $r>0$，使得

$$\|f_t(x)-p\|\geqslant r\quad(x\in\partial\Omega,0\leqslant t\leqslant 1).\tag{2}$$

若不然，则存在$\{x_n|n=1,2,\cdots\}\subset\partial\Omega$，$\{t_n\}\subset[0,1]$使得

$$\|f_{t_n}(x_n)-p\|<\frac{1}{n}.$$

不妨设

$$t_n\to\tau,h(\tau)(x_n)\to y,$$

注意到 h 是 Ω 上的紧同伦，$\{x_n\}$有界，故

$$\|y-h(t_n)(x_n)\|\leqslant\|y-h(\tau)(x_n)\|+\|h(\tau)(x_n)-h(t_n)(x_n)\|$$
$$\to 0,$$

从而

$$x_n=f_{t_n}(x_n)-p+h(t_n)x_n+p\to y+p.$$

但 $x_n\in\partial\Omega$，因此 $y+p\in\partial\Omega$，得

$$f_\tau(y+p)=y+p-\lim_{n\to\infty}h(t_n)(x_n)=p,$$

这是矛盾，所以，(2)式成立.

现在，规定 $\deg(f_s,\Omega,p)=\deg(f_t,\Omega,p)$ 时 $s\sim t$. 显然，这是$[0,1]$中的一个等价关系，易知只要证明每个等价类均是开集，即知$[0,1]$仅含一个等价类，这就证得定理. 对 $\tau\in[0,1]$，设 r 满足(2)，取 ε 使$0<\varepsilon<\frac{1}{4}r$，对应于 ε，取定义中出现的有限维空间 L_ε 及映射 $h_\varepsilon(\tau)$，有

$$\|h_\varepsilon(\tau)(x)-h(\tau)(x)\|<\frac{1}{4}r\quad(x\in\overline{\Omega}),\tag{3}$$

由于 h 是紧同伦，所以存在 $\delta>0$，使得$|t-\tau|<\delta$ 时

$$\|h(\tau)(x)-h(t)(x)\|<\frac{1}{4}r\quad(x\in\overline{\Omega}).\tag{4}$$

由(3),(4)得

$$\|h(t)(x)-h_\varepsilon(\tau)(x)\|<\frac{1}{2}r \quad (|t-\tau|<\delta,\ x\in\overline{\Omega}),$$

因此，在拓扑度定义中，可用 $h_\varepsilon(\tau)$ 作为 $h(t)$ 的逼近元，即

$$\deg(f_t,\Omega,p)=\deg(I-h_\varepsilon(\tau),\Omega\cap L_\varepsilon,p)$$
$$=\deg(f_\tau,\Omega,p),$$

这就得到 $|t-\tau|<\delta$ 时，$t\sim\tau$. 证毕.

注意到 5.4.5 定理 1 的系 1—6 是由 Brouwer度的性质 (D_1)，(D_2)，(D_3) 直接导出的，现在我们已对 Leray-Schauder 度证明了 (D_1)，(D_2)，(D_3)，可见只要重复 §5.4 的证明即能得到那些事实对Leray-Schauder 度成立.

记 $K_1(\Omega)=\{f\,|\,f=I-T,T\in K(\Omega)\}$.

系 1（切除定理） 设 $f\in K_1(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，闭集 $K\subset\overline{\Omega}$，且 $p\overline{\in}f(K)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega\backslash K,p).$$

系 2（区域分解） 设 $f\in K_1(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，如 $\Omega=\bigcup\Omega_i$，其中 Ω_i 是有限个互不相交的开集，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_i\deg(f,\Omega_i,p).$$

系 3（Kronecker 存在定理） 设 $f\in K_1(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，而且 $\deg(f,\Omega,p)\neq0$，则存在 $q\in\Omega$，使得 $f(q)=p$.

系 4（Poincaré-Bohl 定理） 设 $f,g\in K_1(\overline{\Omega})$，对任意的 $x\in\partial\Omega$，线段 $tf(x)+(1-t)g(x)\,(0\leqslant t\leqslant1)$ 不包含 p，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p).$$

证 设 $f=I-T_1$，$g=I-T_2$，作同伦

$$h(t)(x)=(1-t)T_1(x)+tT_2(x) \quad (x\in\overline{\Omega},0\leqslant t\leqslant1),$$

则 h 是 Ω 上的紧同伦.

当 $x\in\partial\Omega$ 时，$f_t(x)=(I-h(t))(x)=(1-t)f(x)+tg(x)$，所

以 $p\notin f_t(\partial\Omega)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$，根据紧同伦不变性，有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p).\quad \text{证毕.}$$

由此，可以得到

系 5(边界值性质) 设 $f,g\in K_1(\overline{\Omega})$，当 $x\in\partial\Omega$ 时 $f(x)=g(x)$，且 $p\notin f(\partial\Omega)$，则有 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$.

系 6 设 $f\in K_1(\overline{\Omega})$，$p\notin f(\partial\Omega)$，则对任意的 $q\in X$，

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-q,\Omega,p-q).$$

这里只要注意到 $f\in K_1(\Omega)$ 时，$f=I-T$，其中 T 全连续，从而 $f-q=I-T_1$，这里 $T_1(x)=T(x)+q$ 也是全连续的，故 $f-q\in K_1(\overline{\Omega})$，和前面一样可证得系 6.

还可看到，5.4.5 引理 1,2 的结论在此相应地成立.

系 7 设 $f,g\in K_1(\overline{\Omega})$，$p\notin f(\partial\Omega)$，而且 $\|f(x)-g(x)\|<\rho(p,f(\partial\Omega))\ (x\in\overline{\Omega})$，则 $p\notin g(\partial\Omega)$，且有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p).$$

证 记 $r=\rho(p,f(\partial\Omega))$，则 $r>0$. 令

$$f_t(x)=(1-t)f(x)+tg(x)\qquad (x\in\overline{\Omega},0\leqslant t\leqslant 1),$$

则当 $x\in\partial\Omega$ 时，有

$$\begin{aligned}\|f_t(x)-p\|&=\|t(g(x)-f(x))+(f(x)-p)\|\\&\geqslant\|f(x)-p\|-t\|g(x)-f(x)\|\\&>(1-t)r\geqslant 0\quad(0\leqslant t\leqslant 1).\end{aligned}$$

因此，$p\notin f_t(\partial\Omega)$，由紧同伦不变性，有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p).\quad \text{证毕.}$$

系 8 设 $f\in K_1(\overline{\Omega})$，则对 $X\backslash f(\partial\Omega)$ 的同一连通分支上的一切 p，$\deg(f,\Omega,p)$ 是常数.

证 设 $p\in X\backslash f(\partial\Omega)$，取 $\varepsilon>0$，使 $O(p,\varepsilon)\subset X\backslash f(\partial\Omega)$. 对 $q\in O(p,\varepsilon)$，由系 6 可得

$$\deg(f,\Omega,q)=\deg(f-(q-p),\Omega,p),$$

但由系 7，对充分小的 ε，有

$$\deg(f-(q-p),\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p),$$

所以 $\deg(f,\Omega,q)=\deg(f,\Omega,p)$，因此 $p\longmapsto\deg(f,\Omega,p)$ 是 $X\backslash f(\partial\Omega)$ 上连续的整数值函数，所以在同一连通分支上，$\deg(f,\Omega,p)$ 是常数．证毕．

对 Leray-Schauder 度也能引进孤立解的指数的概念，并建立类似 5.4.5 定理 2(1)的指标公式，这里从略．下面我们不加证明地叙述乘积定理．

定理 2 （**乘积定理**） 设 $f\in K_1(\overline{\Omega})$，$M$ 是包含 $f(\overline{\Omega})$ 的有界开集，$\Delta=M\backslash f(\partial\Omega)$，$\Delta_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 是 Δ 的连通分支，如果 $g\in K_1(\overline{M})$，$p\overline{\in}g(f(\partial\Omega)\cup\partial M)$，则

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\sum_j\deg(g,\Delta_j,p)\deg(f,\Omega,\Delta_j)$$

最后，我们指出，由于在拓扑度的应用中，重要的是度数具有若干良好的性质，例如(D_1)，(D_2)，(D_3)，而其具体构造并不起特殊的作用；另一方面，从前面的讨论可以看出，Brouwer 度和 Leray-Schauder 度有许多相似之处，其原因正在于它们都具备性质(D_1) (D_2)，(D_3)，因而以这些基本性质作为公理来建立拓扑度理论，也许是更为相宜的．有兴趣的读者可以参看[4]．

§5.6 不动点定理

自从本世纪初 Brouwer 和 Banach 提出了两个著名的不动点定理之后，不动点理论成了讨论各类方程解的存在唯一性的重要工具．鉴于通常的基础泛函分析教程都介绍了 Banach 的压缩映射原理，所以本节前半部分将限于介绍凸紧集上映射的不动点定理，其中包括 Brouwer 不动点定理，Schauder 不动点定理以及有关的问题．这里，证明 Brouwer 不动点定理时，我们用了 §5.4

所介绍的 Brouwer 度的方法. 本节后半部分利用非紧性测度的概念讨论了集压缩映射不动点的存在性,最后,还介绍了关于多值映射的 Kakutani 不动点定理.

5.6.1 Brouwer 不动点定理

设T是$\mathbf{R}^n$到自身的映射, 容易知道:讨论T的不动点, 即寻求映射 $f(x)=x-Tx$ 的零点. 由 Kronecker 存在定理,只要 f 的拓扑度不为 0,必有零点存在. 于是,问题化为讨论 f 的度数. 由同伦不变性,这又等价于考察是否有一个度数不为 0 的映射(例如 I)与 f 同伦.

定理 1 (Brouwer) 设Ω是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭凸集, 映射 T: $\Omega\to\Omega$ 连续,则必有 $x_0\in\Omega$, 使得 $Tx_0=x_0$.

证 首先,不妨设 $0\in\Omega$,否则,任取 $u\in\Omega$,用 $\Omega-u$, $T(u+x)-u$ 代替原来的Ω和 Tx 讨论即可;其次, 不妨设Ω含有内点, 否则,用 $\mathrm{span}\Omega$ 代替 $\mathbf{R}^n$ 即可;同样可知,我们不妨设 0 为Ω的一个内点.

如T在 $\partial\Omega$ 上有不动点, 则定理已证. 今设T在 $\partial\Omega$ 上无不动点,考察映射

$$h_t(x)=x-tTx, 0\leqslant t\leqslant 1, x\in\Omega.$$

显然,$h_t(x)$是两元连续函数, 且 $0\overline{\in} h_t(\partial\Omega)$. 由性质$(D_3)$及$(D_1)$,得

$$\deg(I-T,\Omega,0)=\deg(I,\Omega,0)=1,$$

这样,利用 Kronecker 存在定理,$I-T$ 在Ω中必有零点, 设为x_0, 即得 $Tx_0=x_0$. 证毕.

5.6.2 Schauder 不动点定理

Brouwer 不动点定理可以推广到赋范线性空间中任一非空

凸紧集到自身的映射. 为此,先引入一个特殊的凸紧集.

定义 称 l^2 空间的子集

$$C=\left\{x \mid x=(x_1,x_2,\cdots),\ |x_i|\leqslant\frac{1}{i},\ i=1,2,\cdots\right\}$$

为 **Hilbert 立方体**.

容易知道,C 是 l^2 中的凸紧集.

引理 1 设 X 是赋范线性空间,K 是 X 中的凸紧集, 则必存在 K 上的线性映射 g,使 $g(K)$ 是 C 中的凸紧集,而且 $g:K\to g(K)$ 是同胚映射.

证 不妨设 $K\subset\{x\mid\|x\|\leqslant 1\}$. 由于 K 是紧集, 所以 $\overline{\mathrm{span}K}$ 可析,取可列集 $S=\{x_n\mid n=1,2,\cdots\}$,使得 S 稠于 $\overline{\mathrm{span}K}$. 对每个 n, 取 $f_n\in X^*$,使得

$$f_n(x_n)=\frac{\|x_n\|}{n},\ \|f_n\|=\frac{1}{n}.$$

作映射 $g:X\to l^2$,

$$g:x\longmapsto(f_1(x),f_2(x),\cdots),\ x\in X,$$

显然,g 是 X 到 l^2 的有界线性算子,$g(K)\subset C$.

今证 g 在 $\overline{\mathrm{span}K}$ 上是单射. 实际上,若 $x,y\in\overline{\mathrm{span}K}$,$x\neq y$,取 $x_n\in S$,使 $\|x_n\|>\|x-y-x_n\|$,于是

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(y)|&\geqslant|f_n(x_n)|-|f_n(x-y-x_n)|\\&\geqslant\frac{\|x_n\|}{n}-\frac{\|x-y-x_n\|}{n}>0.\end{aligned}$$

因为 g 是紧集 K 上的连续单射,故而 g 是 K 与 $g(K)$ 之间的同胚. 由于 g 是线性同胚,因此 $g(K)$ 也是凸紧集. 证毕.

引理 2 设 F 是 C 到 C 的连续映射,则必存在 $y\in C$,使得 $F(y)=y$.

证 作 l^2 上的算子 P_n:

$$P_n(x_1,x_2,\cdots)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,\cdots),$$

显然,$P_n(C)$可以视为 $\mathbf{R}^n$ 中的凸紧集,P_nF 是 $P_n(C)$ 到自身的连续映射. 由 Brouwer 不动点定理,存在不动点 $x^{(n)}\in P_n(C)$. 于是

$$\rho(x^{(n)},F(x^{(n)}))$$
$$=\rho(P_nF(x^{(n)}),\ F(x^{(n)}))\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}. \tag{1}$$

由于 $F(x^{(n)})\in C$,因而存在收敛子列$\{F(x^{(n_k)})\}$. 设有$\lim\limits_{n\to\infty}F(x^{(n_k)})=y\in C$,由(1)可得 $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(n_k)}=y$. 在(1)式两边取 $n=n_k$,令 $k\to\infty$,利用F的连续性,得

$$\rho(y,F(y))=0,$$

即 $F(y)=y$. 证毕.

引理 3　设K是C中的一个非空凸紧子集,F 是K到K的连续映射,则必存在 $y\in K$,使得 $F(y)=y$.

证　对 $x\in C$,取 $p(x)\in K$,使得

$$\|x-p(x)\|=\inf_{y\in K}\|x-y\|.$$

由变分引理可知,这样的$p(x)$是存在且唯一的. 今证

$$p:C\to K;\ x\longmapsto p(x)$$

是连续映射. 为此,设 $x_n\to x$. 对$\{p(x_n)\}$的任一子列,由K的紧性知必存在收敛子列,设 $p(x_{n_k})\to z\in K$,由于

$$\|x_{n_k}-p(x_{n_k})\|\leqslant\|x_{n_k}-p(x)\|\leqslant\|x_{n_k}-x\|+\|x-p(x)\|,$$

令 $n_k\to\infty$,得$\|x-z\|\leqslant\|x-p(x)\|$. 由 $p(x)$的取法可知 $z=p(x)$,从而 $p(x_n)\to p(x)\,(n\to\infty)$,即 p 连续.

考察映射 $F\circ p:C\to C$,它是连续映射. 由引理 2,必存在不动点 y. 因为$(F\circ p)(C)\subset K$,故而 $y\in K$,但此时 $p(y)=y$,所以

$$F(y)=y,$$

即 y 是F的不动点. 证毕.

定理 1　(Schauder)　设 X 是赋范线性空间,K 是 X 中的凸紧集,映射 $F:K\to K$ 连续,则必存在 $y\in K$,使 $F(y)=y$.

证 由引理1，存在线性映射 g，使 $g: K\to g(K)$ 是同胚映射，而 $g(K)$ 是 C 中一个凸紧集. 注意到映射

$$g\circ F\circ g^{-1}: g(K)\to g(K)$$

连续，由引理3，存在 $z\in g(K)$，使得

$$g\circ F\circ g^{-1}(z)=z.$$

取 $y=g^{-1}(z)$，则有 $y\in K$，而且 $F(y)=y$. 证毕.

引理4 设 X 是 Banach 空间，$K\subset X$ 为完全有界，则 K 的凸闭包 $\overline{\text{co}}K$ 是紧集.

证 因为 X 是完备空间，所以只要证明 $\overline{\text{co}}K$ 完全有界. 设 $\varepsilon>0$. 因为 K 完全有界，故存在 $\{z_1,\cdots,z_n\}\subset K$，使

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{n}O\left(z_i,\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

记 $K_1=\text{co}(\{z_1,\cdots,z_n\})=\left\{k\,|\,k=\sum\limits_{i=1}^{n}t_iz_i,\ t_i\geqslant 0,\ \sum\limits_{i=1}^{n}t_i=1\right\}$. 对 $y\in\text{co}K$，必有 $y=\sum\limits_{i=1}^{m}t_iy_i$，其中 $y_1,\cdots,y_m\in K$，$t_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{m}t_i=1$. 设 $x\in K$，记 $n(x)$ 是 $1,\cdots,n$ 之一，使得 $\|x-z_{n(x)}\|<\frac{\varepsilon}{4}$. 于是

$$\|y-\Sigma t_iz_n(y_i)\|=\|\Sigma t_i(y_i-z_{n(y_i)})\|<\frac{\varepsilon}{4},$$

但 $\Sigma t_iz_{n(y_i)}\in K_1$，故而，

$$\overline{\text{co}}K\subset\bigcup_{x\in\text{co}K}O\left(x,\frac{\varepsilon}{4}\right)\subset\bigcup_{x\in K_1}O\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right).\tag{2}$$

考察映射 φ:

$$(t_1,\cdots,t_n;z_1,\cdots z_n)\longmapsto\sum_{i=1}^{n}t_iz_i,$$

它是 $[0,1]\times\cdots\times[0,1]\times\{z_1\}\times\cdots\times\{z_n\}$ 到 K_1 上的连续映射，从

而K_1紧. 因此K_1必有有限$\frac{\varepsilon}{2}$-网$\{k_1,\cdots,k_m\}$. 由(2)式易知$\{k_1,\cdots,k_m\}$是$\overline{\mathrm{co}}K$的有限ε-网. 证毕.

定理 2 (Schauder) 设X是Banach空间，K是X中的凸闭集，F是K到K的连续映射，$\overline{F(K)}$是X中的紧集，则必存在$y\in K$，使得$F(y)=y$.

证 记$K_1=\overline{F(K)}$，则$K_1\subset K$. 由引理4可知$\overline{\mathrm{co}}K_1$是凸紧集，而$K$是凸闭集，所以$\overline{\mathrm{co}}K_1\subset K$. 又显然有

$$F(\overline{\mathrm{co}}K_1)\subset F(K)\subset \overline{\mathrm{co}}K_1.$$

因而F可以视为凸紧集$\overline{\mathrm{co}}K_1$到自身的连续映射. 由定理1可知，必存在$y\in\overline{\mathrm{co}}K_1\subset F(K)$，使得$F(y)=y$. 证毕.

利用Schauder不动点定理可以得到关于一族交换仿射映射的公共不动点的存在性.

定义 设X,Y为线性空间，映射$F:X\to Y$满足对任何$x,y\in X,\alpha,\beta\geqslant 0,\alpha+\beta=1$均有

$$F(\alpha x+\beta y)=\alpha F(x)+\beta F(y),$$

就称F为**仿射映射**.

定理 3 设X是赋范线性空间，K是X中的凸紧集，$\mathscr{F}=\{F_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是$K\to K$的连续仿射映射的交换族，则必有$y\in K$，使得$F_\lambda(y)=y,\lambda\in\Lambda$.

证 对$\lambda\in\Lambda$，用S_λ表示映射$F_\lambda:K\to K$的不动点全体. 由定理1，$S_\lambda\neq\varnothing$. 由于F_λ是连续的，所以S_λ是闭集；又由于F_λ是仿射映射，易知S_λ是凸集，所以S_λ是凸紧集. 今证

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda\neq\varnothing$$

即可. 为此，只要证明$\{S_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$具有有限交性质. 设$F_1,\cdots,F_n\in\mathscr{F}$，对应的不动点集合为$S_1,\cdots,S_n$. 当$n=1$时，$S_1\neq\varnothing$. 设当$i<$

n时$\bigcap_{k=1}^{i} S_k \neq \varnothing$. 对$x\in\bigcap_{i=1}^{n-1} S_i$,有

$$F_i(F_n(x)) = F_n(F_i(x)) = F_n(x) \quad i=1,\cdots,n-1,$$

因此,$F_n(x)\in\bigcap_{i=1}^{n-1} S_i$,从而有

$$F_n\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} S_i\right)\subset\bigcap_{i=1}^{n-1} S_i,$$

再一次利用定理 1,即知存在 $z\in\bigcap_{i=1}^{n-1} S_i$,使得$F_n(z)=z$,也就是说,$z$是$F_1,\cdots,F_n$的公共不动点. 证毕.

5.6.3 非紧性测度

从上一段容易看出,由 Brouwer 不动点定理推广为 Schauder 不动点定理,需要借助某种紧性条件. 为了适当地减弱这类条件,我们引入非紧性测度的概念.

定义 设X是度量空间,Ω是X中的有界集,记

$\alpha(\Omega)=\inf\{d\,|\,$存在有限个集$S_i\subset X$, $\mathrm{diam}S_i\leqslant d$, $\bigcup S_i\supset\Omega\}$

称$\alpha(\Omega)$为Ω的**非紧性测度**.

由定义容易知道:Ω是完全有界集的充要条件是$\alpha(\Omega)=0$. 显然,若Ω和Ω_1均是X中的有界集,那末

$$\Omega\subset\Omega_1\text{时},\alpha(\Omega)\leqslant\alpha(\Omega_1)$$

$$\alpha(\Omega\cup\Omega_1)=\max(\alpha(\Omega),\alpha(\Omega_1));$$

$$\alpha(\overline{\Omega})=\alpha(\Omega).$$

定理 1 设X是完备的度量空间,$\{A_n\}$是X中一列单调下降的非空闭集,$\alpha(A_n)\to 0$,则$A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$是非空紧集.

证 容易知道,只要任何形如$x_n\in A_n$的序列$\{x_n\}$均有收敛子

列，则 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 必为非空紧集.

设 $x_n\in A_n(n=1,2,\cdots)$. 由定义，存在有限个集 $S_\alpha^{(n)}$，满足 $\operatorname{diam} S_\alpha^{(n)}\leqslant\alpha(A_n)+\frac{1}{n}$，$\bigcup_\alpha S_{\alpha\alpha}^{(n)}\supset A_n$.

由于 $\{x_1,x_2,\cdots\}\subset A_1$，故有某个 $S_\alpha^{(1)}$ 包含一无穷子列，设为 $\{x_{i_1}, x_{i_2},\cdots,\}$，其中 $1<i_1<i_2<\cdots$.

又由 $\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots\}\subset A_2$，故有某个 $S_\alpha^{(2)}$ 包含一无穷子列，设为 $\{x_{j_1},x_{j_2},\cdots\}$，其中 $i_1<j_1<j_2<\cdots$.

如此递推，得一列子序列. 依次取每个子列的第一个元，构成一个新的子序列 $\{x_{n_1},x_{n_2},\cdots\}$. 对任何 k，易知

$$\{x_{n_k},x_{n_{k+1}},\cdots\}\subset S_\alpha^{(k)}.$$

因为 $\operatorname{diam} S_\alpha^{(k)}\leqslant\alpha(A_k)+\frac{1}{k}\to 0$，所以 $\{x_{n_k}\}$ 是基本序列. 由 X 的完备性可知它必收敛. 证毕.

现在设 X 是赋范线性空间，Ω 和 Ω_1 是 X 中的有界集，容易看到

$$\alpha(\lambda\Omega)=|\lambda|\alpha(\Omega),$$
$$\alpha(\Omega+\Omega_1)\leqslant\alpha(\Omega)+\alpha(\Omega_1),$$

其中 $\lambda\Omega=\{\lambda x|x\in\Omega\}$，$\Omega_1+\Omega=\{x+y|x\in\Omega,y\in\Omega_1\}$.

引理 1 设 Ω 是赋范线性空间 X 中的有界集，则

$$\operatorname{diam}\Omega=\operatorname{diam}(\operatorname{co}\Omega).$$

证 显然，$\operatorname{diam}\Omega\leqslant\operatorname{diam}(\operatorname{co}\Omega)$. 如果存在 $x,y\in\operatorname{co}\Omega$，使得 $\|x-y\|>\operatorname{diam}\Omega$，记 $\Omega_1=O(x,\operatorname{diam}\Omega)$，则 $y\overline{\in}\Omega_1$.

如果 $\Omega\subset\Omega_1$，因 Ω_1 是凸集，它必包含 $\operatorname{co}\Omega$，此与 $y\overline{\in}\Omega_1$ 矛盾；如果存在 $z\in\Omega\setminus\Omega_1$，则 $\|z-x\|>\operatorname{diam}\Omega$，记 $\Omega_2=\overline{O(z,\operatorname{diam}\Omega)}$，则 $\Omega\subset\Omega_2$，但 Ω_2 是凸集，所以它包含 $\operatorname{co}\Omega$，因而 $\|z-x\|\leqslant\operatorname{diam}\Omega$，这又

是矛盾. 证毕.

定理 2 设 X 是赋范线性空间, Ω 是 X 中的有界集, 则

$$\alpha(\overline{\mathrm{co}\Omega})=\alpha(\Omega).$$

证 只要证明 $\alpha(\Omega)=\alpha(\mathrm{co}\Omega)$. 实际上, 只要证 $\alpha(\mathrm{co}\Omega)\leqslant\alpha(\Omega)$ 即可. 分三步来证明结论.

(i) 取 $\varepsilon>\alpha(\Omega)$, 设 $S_1,\cdots,S_n$ 覆盖 Ω, $\mathrm{diam}S_i<\varepsilon\ (i=1,\cdots,n)$. 不妨设 $S_i\subset\Omega$. 取 ε_1, 使得对 $i=1,\cdots,n$,

$$\mathrm{diam}S_i\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon,$$

由引理 1, $\mathrm{diam}(\mathrm{co}S_i)\leqslant\varepsilon_1$. 考察 $\mathbf{R}^n$ 的子集 A:

$$A=\{\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\,|\,\lambda_i\geqslant0\ (i=1,\cdots,n),\ \Sigma\lambda_i=1\},$$

对应于 λ, 作 $Y(\lambda)\subset X$:

$$Y(\lambda)=\left\{x\,|\,x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i,\ x_i\in\mathrm{co}S_i,\ i=1,\cdots,n\right\}.$$

今证 $\mathrm{diam}Y(\lambda)\leqslant\varepsilon_1$. 实际上, 设 $x,y\in Y(\lambda)$, $x=\Sigma\lambda_ix_i$, $y=\Sigma\lambda_iy_i$, 其中 $x_i,y_i\in\mathrm{co}S_i$, 则有

$$\|x-y\|\leqslant\Sigma\lambda_i\|x_i-y_i\|\leqslant\Sigma\lambda_i\cdot\mathrm{diam}(\mathrm{co}S_i)\leqslant\varepsilon_1\Sigma\lambda_i=\varepsilon_1.$$

(ii) 记 $Y(A)=\bigcup\limits_{\lambda\in A}Y(\lambda)$, 则 $Y(A)=\mathrm{co}\Omega$. 实际上, 显然 $\Omega\subset Y(A)$. 又对 $x,y\in Y(A)$, 设 $x=\Sigma\lambda_ix_i$, $y=\Sigma\mu_iy_i$, 这里 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$, $\lambda,\ \mu\in A$; $x_i,y_i\in\mathrm{co}S_i\ (i=1,\cdots,n)$. 对 $h\in(0,1)$, 考察 $z=hx+(1-h)y$. 易见

$$z=\sum_{i=1}^{n}\theta_iz_i,$$

其中 $\theta_i=h\lambda_i+(1-h)\mu_i$, $z_i=(h\lambda_ix_i+(1-h)\mu_iy_i)/(h\lambda_i+(1-h)\mu_i)$, 所以 $z\in Y(\theta)\subset Y(A)$, 这说明 $Y(A)$ 是凸的. 又显然 $Y(A)\subset\mathrm{co}\Omega$, 因此, $Y(A)=\mathrm{co}\Omega$.

(iii) 对 $\eta>0$, 记 $Y(\lambda)$ 的 η 邻域为 $[Y(\lambda)]_\eta$. 对给定的 $\lambda\in A$

和 $\eta>0$，存在 $\varepsilon_2>0$，使得 $\|\lambda-\mu\|<\varepsilon_2$ 时

$$Y(\mu)\subset[Y(\lambda)]_\eta.$$

由于 A 是紧集，故存在 A 中有限个点 $\lambda_1,\cdots,\lambda_\nu$ 的 ε_2 邻域 $N_1,\cdots,N_\nu$，使得 $\bigcup_{j=1}^{\nu}N_j\supset A$，但

$$Y(\lambda)\subset[Y(\lambda_j)]_\eta\quad(\lambda\in N_j,j=1,\cdots,\nu),$$

取 $\eta=\frac{1}{3}(\varepsilon-\varepsilon_1)$，则对 $j=1,\cdots,\nu$，

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(Y(N_j))&\leqslant\operatorname{diam}([Y(\lambda_j)]_\eta)\leqslant\operatorname{diam}(Y(\lambda_j))+2\eta\\&\leqslant\varepsilon_1+2\eta<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，由

$$\mathrm{co}\Omega=Y(A)=\bigcup_{j=1}^{\nu}Y(N_j)$$

和 $\operatorname{diam}(Y(N_j))<\varepsilon$，得到 $\alpha(\mathrm{co}\Omega)\leqslant\alpha(\Omega)$. 证毕.

5.6.4 集压缩映射的不动点

通常的压缩映射是指两点间的距离被压缩，集压缩映射则是指把集合的非紧性测度压缩.

定义 设 X 是度量空间，$f:X\to X$ 是连续映射，如果存在 $k\in[0,1)$，使得对 X 中一切有界非紧子集 A，均有

$$\alpha(f(A))\leqslant k\alpha(A),$$

则称 f 为集压缩映射.

定理 1 设 X 是 Banach 空间，K 是 X 中的有界闭凸集，$f:K\to K$ 是集压缩映射，则 f 在 K 中必有不动点.

证 作 X 的一列子集 $\{K_n\}$ 如下：

$$K_1=\overline{\mathrm{co}}f(K),\quad K_n=\overline{\mathrm{co}}f(K_{n-1}),n=2,3,\cdots$$

显然，$K_n\supset K_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，易知 $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$ 是一个闭凸集，今证它是

紧集. 实际上,取 $k\in[0,1)$,使得

$$\alpha(f(A))\leqslant k\alpha(A)$$

对 X 的一切子集 A 成立,于是,

$$\begin{aligned}\alpha(K_n)&=\alpha(\overline{\mathrm{co}}f(K_{n-1}))=\alpha(f(K_{n-1}))\leqslant k\alpha(K_{n-1})\\&\leqslant\cdots\leqslant k^n\alpha(K),\end{aligned}$$

因为 $k<1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(K_n)=0$,从而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n$ 是非空凸紧集,因 $f(K_n)\subset K_{n+1}$,所以

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\right)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n,$$

由 5.6.2 定理 1,f 在 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n$ 中存在不动点. 证毕.

5.6.5 多值映射的不动点

最后介绍关于多值映射的 Kakutani 不动点定理. 为此我们先引入若干基本概念.

定义 设 X,Y 为度量空间,用 2^Y 表示 Y 的子集全体,称 X 到 2^Y 的映射为**多值映射**.

对多值映射 $f:X\to 2^Y$,称 $X\times Y$ 中的子集 $G(f)=\{(x,y)\mid y\in f(x)\}$ 为 f 的**图形**.

定义 多值映射 $f:X\to 2^Y$ 称为在 $x\in X$ 处是闭的,是指从 $x_n\to x$, $y_n\to y$,其中 $y_n\in f(x_n)$ 可导致 $y\in f(x)$. 如果 f 在每一点均是闭的,则称 f 为**闭映射**.

显然,f 是闭映射的充要条件是 $G(f)$ 为 $X\times Y$ 中的闭集.

定义 多值映射 $f:X\to 2^Y$ 称为在点 $x\in X$ 处**上半连续**,是指对包含 $f(x)$ 的任一开集 U,必存在 x 的邻域 V,使得 $\bigcup\limits_{z\in V}f(z)\subset U$.

如果在每一点上 f 都是上半连续的，则称 f 是上半连续的映射.

引理 1 设 Y 是紧集，多值映射 $f: X\to 2^Y$ 是闭映射，则 f 是上半连续的.

证 设 $x\in X$，开集 $U\supset f(x)$，今证集合 $V=\{z\in X\mid f(z)\subset U\}$ 是开集，即 $V^c=\{z\in X\mid f(z)\cap(Y\setminus U)\neq\varnothing\}$ 是闭集. 实际上，如果 $\{z_n\}\in X\setminus V$，$z_n\to z$，则必能取到 $y_n\in f(z_n)\cap(Y\setminus U)$. 由 Y 的紧性，可取到子序列 $\{y_{n_k}\}$，使得 $y_{n_k}\to y\in Y\setminus U$. 因为 f 是闭映射，所以 $y\in f(z)$，故而 $y\in f(z)\cap(Y\setminus U)$，即得 $z\in X\setminus V$. 证毕.

定义 设有多值映射 $f: X\to 2^Y$，如果存在 $x_0\in X$，使得 $x_0\in f(x_0)$，则称 x_0 是 f 的**不动点**.

定理 1(Kakutani) 设 X 是 Banach 空间，K 是 X 中的非空凸紧集，映射 $f: K\to 2^K$ 是闭映射，而且对每个点 $x\in K$，$f(x)$ 均是集合 K 的非空凸子集，则映射 f 具有不动点.

证 由 K 的紧性，对任意 $\varepsilon>0$，存在有限 ε- 网 $x_{\varepsilon_1},\cdots,x_{\varepsilon_n}$，定义 K 上的非负函数

$$\varphi_{\varepsilon_i}(x)=\max(0,\varepsilon-\|x-x_{\varepsilon_i}\|)\quad x\in K,\ i=1,2,\cdots,n(\varepsilon).$$

显然，φ_{ε_i} 在 K 上连续，且对任意的 $x\in K$，至少有某个 i，使 $\varphi_{\varepsilon_i}(x)>0$. 定义

$$v_{\varepsilon_i}(x)=\varphi_{\varepsilon_i}(x)\Big/\sum_j\varphi_{\varepsilon_j}(x)\quad (i=1,2,\cdots,n(\varepsilon)).$$

取 n 个点 y_{ε_i}，$y_{\varepsilon_i}\in f(x_{\varepsilon_i})$，作 $f_\varepsilon: K\to K$

$$f_\varepsilon(x)=\sum_i v_{\varepsilon_i}(x)y_{\varepsilon_i},$$

f_ε 是单值连续映射. 由 5.6.2 定理 1，存在 $x_\varepsilon\in K$，使得 $f_\varepsilon(x_\varepsilon)=x_\varepsilon$.

再利用 K 的紧性，可以得到一列正数 $\{\varepsilon_n\}$ 和 $x^*\in K$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,\ x_{\varepsilon_n}\to x^*,\ f_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n})=x_{\varepsilon_n}.$$

今证 $x^*\in f(x^*)$：记 $O_\delta=\{y\mid\|y\|<\delta\}\ (\delta>0)$，$U_\delta=f(x^*)+O_\delta$，容易看出只要证明 $x^*\in\bigcap\limits_{\delta>0}U_\delta$，即能由 $f(x^*)$ 的闭性得到 $x^*\in f(x^*)$。

对任意的 $\delta>0$，U_δ 是凸开集，且 $f(x^*)\subset U_\delta$. 由引理 1，可以取到球 $K_\varepsilon=\{x\mid\|x-x^*\|<\varepsilon\}$，使得 $f(K_\varepsilon)\subset U_\delta$，再取正整数 N，使 $n>N$ 时，$\varepsilon_n<\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $x_{\varepsilon_n}\in K_{\frac{\varepsilon}{2}}$. 注意到 $U_{\varepsilon(n_i)}(x_{\varepsilon_n})>0$ 时

$$\|x_{\varepsilon(n_i)}-x^*\|\leqslant\|x_{\varepsilon(n_i)}-x_{\varepsilon_n}\|+\|x_{\varepsilon_n}-x^*\|<\varepsilon_n+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon(n_i)=\varepsilon_{n_i}$，对这样的 i，便有

$$y_{\varepsilon(n_i)}\in f(x_{\varepsilon(n_i)})\subset f(K_\varepsilon)\subset U_\delta.$$

另一方面，

$$x_{\varepsilon_n}=f_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n})=\sum v_{\varepsilon(n_i)}(x_{\varepsilon_n})y_{\varepsilon(n_i)},$$

由 U_δ 的凸性可知 $x_{\varepsilon_n}\in U_\delta$，令 $n\to\infty$，则有 $x^*\in\overline{U}_\delta\subset U_{2\delta}$，这就得到了 $x^*\in\bigcap\limits_{\delta>0}U_\delta$. 证毕。

附录　Brouwer不动点定理的分析证明

设 n 是自然数，记 $B^n=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$，$S^{n-1}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|=1\}$.

引理　不存在 B^n 到 S^{n-1} 上的连续可微映射使得 S^{n-1} 的每个点都是这映射的不动点.

证　用反证法. 设 f 是 B^n 到 S^{n-1} 上的连续可微映射，并且 S^{n-1} 的每个点都是 f 的不动点. 令

$$g(x)=f(x)-x \qquad x\in B^n$$

$$f_t(x)=x+tg(x)=(1-t)x+tf(x) \qquad x\in B^n, 0\leqslant t\leqslant 1.$$

由于 g 是连续可微的，所以有常数 c 使得

$$\|g(y)-g(x)\|\leqslant c\|y-x\| \qquad \forall x,y\in B^n.$$

如果 $0\leqslant t<\frac{1}{c}$，$x,y\in B^n$ 使 $f_t(x)=f_t(y)$，则

$$\|x-y\|=\|tg(y)-tg(x)\|\leqslant tc\|y-x\|,$$

因此 $x=y$，即当 $0\leqslant t<\frac{1}{c}$ 时，f_t 是 B^n 到 B^n 中的单射.

g 是 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的取值于 $\mathbf{R}^n$ 的映射，由于 g 关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一阶偏导数一致有界，Jacobi 矩阵是

$$\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_t}{\partial x_n}\right)=I_n+t\left(\frac{\partial g}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right), \tag{1}$$

其中 I_n 是 n 阶单位阵，因此有正数 t_0，使得当 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 时，f_t 的 Jacobi 矩阵是非奇异的. 这时，由反函数定理，f_t 将 B^n 的内部映成开集 $G_t(\subset B^n)$.

任取 $t\in[0,t_0]$，考虑集 G_t. 如果 $x_0\notin G_t$，$x_0\in B^n$，连结 x_0 与 G_t 中的点 y，在线段 x_0y 上取点 y_0 是 G_t 的边界点. 由于 $f_t(B^n)$ 是紧集，因此 $y_0\in f_t(B^n)$，从而有 $z_0\in B^n$ 使 $f_t(z_0)=y_0$，但因 $y_0\notin G_t$，所以 $z_0\in S^{n-1}$. 由作法，S^{n-1} 中的点都是 f_t 的不动点，$f_t(z_0)=z_0$. 再因为 y_0 在线段 x_0y 上，可知 $x_0=y_0$. 所以不在 G_t 中的 B^n 中的点在 S^{n-1} 中，即 $G_t=B^n\setminus S^{n-1}$，f_t 是满射. 因此，当 $t\in[0,t_0]$ 时，f_t 是 B^n 到 B^n 的双射.

对于 $t\in[0,1]$，考虑积分

$$I(t)=\int_{B^n}\frac{\partial f_t}{\partial x}dx=\int\int\cdots\int\det\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_t}{\partial x_n}\right)dx_1\cdots dx_n,$$

当 $t\in[0,t_1]$时，由体积的计算公式可知 $I(t)=V_n$(V_n 是 B^n 的体积)．但由(1)式，显然 $I(t)$ 是 t 的多项式，因此 $\forall t\in[0,1]$，$I(t)\equiv V_n$．然而 f_1 即为 f，$f\cdot f=1$，因此

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot f=0 \qquad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=0 \qquad \forall x\in B^n,$$

所以 $I(1)=0$，与 $I(t)\equiv V_n>0$ 矛盾．证毕．

推论 设 f 是 B^n 到 B^n 中的连续可微映射，则 f 至少有一个不动点．

证 用反证法，如果 f 是 B^n 到 B^n 中的连续可微映射，且 f 在 B^n 中无不动点，对于 $x\in B^n$，以 $f(x)$ 为起点，连结 $f(x)$ 与 x 作半直线，它与 S^{n-1} 的交点记为 $g(x)$．这样作出的 g 是 B^n 到 S^{n-1} 的连续可微映射，且 S^{n-1} 中的点都是 g 的不动点，与引理矛盾．证毕．

定理(Brouwer 不动点定理) 设 f 是 B^n 到 B^n 中的连续映射，则 f 至少有一个不动点．

证 由 Weierstrass 一致逼近定理，对于 $\nu=1,2,3,\cdots$，有多项式 P_ν(即 P_ν 的每个分量均为 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式)，使

$$\|f(x)-P_\nu(x)\|\leqslant\frac{1}{\nu} \qquad \forall x\in B^n.$$

在 B^n 上，再作 Q_ν 如下：

$$Q_\nu(x)=\begin{cases}P_\nu(x) & \text{当}\|P_\nu(x)\|\leqslant 1\text{ 时},\\ \dfrac{P_\nu(x)}{\|P_\nu(x)\|} & \text{当}\|P_\nu(x)\|>1\text{ 时}.\end{cases}$$

于是，每个 Q_ν 是 B^n 到 B^n 的连续可微映射．由引理的推论，Q_ν 有不动点 $x_\nu\in B^n$ ($\nu=1, 2, \cdots$)．在$\{x_\nu\}$中必有收敛的子点列，不妨设$\{x_\nu\}$是收敛的．设 $x_\nu\to x_0\in B^n$，于是

$$\|f(x_0)-x_0\|\leqslant\|f(x_0)-f(x_\nu)\|+\|f(x_\nu)-Q_\nu(x_\nu)\|+\|x_\nu-x_0\|$$

令 $\nu\to\infty$，即得 $f(x_0)=x_0$，因而 f 有不动点 x_0，证毕．

参 考 文 献

[1] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌, 实变函数论与泛函分析, 高等教育出版社, 第二版, 1984.

[2] 关肇直, 泛函分析讲义, 高等教育出版社, 1958.

[3] 关肇直, 张恭庆, 冯德兴, 线性泛函分析入门, 上海科学技术出版社, 1979.

[4] 陈文嫄, 非线性泛函分析, 甘肃人民出版社, 1982.

[5] N. Dunford, J. Schwartz, Linear Operators, Vols. I and II (1958, 1963), Interscience.

[6] E. Hille, R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-groups, American Mathematical Society Colloquium, Vol. 31. 1957.

[7] N. G. Lloyd, Degree theory, Camb., Camb. Univ. Pr., 1978.

[8] J. Diestel, J. J. Uhr, Vector Measure, Mathematical Surveys, 15, 1977.

[9] G. Köthe, Topologische Lineare Räume, I, Springer Verlag, 1960.

[10] J. L. Kelley, I. Namioka, Linear Topological Spaces, D. Van Nostrand Company, Inc. 1963.

[11] A. P. Robertson & W. J. Robertson, Topological Vector Spaces Cambridge at the University Prees, 1964.

[12] Ronald Larsen, Functional Analysis, Marcel Dekker, Inc. 1973.

[13] E. Hewitt and K. A. Ross Abstract Harmonic Analysis Vol. I, Springer Verlag, 1963.

[14] M. A. Наймарк, Нормированные Кольца, Государственное издательсмво технико-теоретической литературы, 1956.

索　引

(主要名词和主要定理)

① 5.3.2表示第五章§3第2段.

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画